

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ  
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

# ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΤΣΙΜΕΝΤΟΚΟΝΙΑΣ ΤΥΠΟΥ ΑΕΡΟΓΕΛΗΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ



ΟΝΟΜ/ΝΟ: ΑΡΑΒΑΝΗΣ ΜΑΡΙΟΣ-ΘΕΟΦΑΝΗΣ

ΑΜ: 7512

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : ΤΣΙΝΟΠΟΥΛΟΣ ΣΤΕΦΑΝΟΣ

ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

Πάτρα, 2022

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το παρόν τεύχος αποτελεί την Πτυχιακή Εργασία που εκπονήθηκε στο Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών του Πανεπιστημίου Πελοποννήσου και αναφέρεται στην προσομοίωση μηχανικών ιδιοτήτων τσιμεντοκονίας τύπου αερογέλης με την μέθοδο των συνοριακών στοιχείων. Είναι γνωστό ότι πολλές οικίες, ειδικά στη χώρα μας πάσχουν από ελλιπή θερμική μόνωση και μία λύση στο φαινόμενο αυτό αποτελεί η τσιμεντοκονία ‘οιονεί’ – αερογέλης.

Μιας και η χρήση τέτοιου είδους μείγματος είναι σχετικά πρώιμη, στην αρχή μελετάται η εφαρμογή της αερογέλης ως θερμομονωτικό σε κτήρια καθώς και σε άλλες εγκαταστάσεις. Στη συνέχεια γίνεται μια εμβάθυνση στο μίγμα της αερογέλης, καθώς και στα προτερήματα και μειονεκτήματα του μίγματος μαζί με ενδελεχή αναφορά στην μέθοδο των συνοριακών στοιχείων, τις εξισώσεις που διέπουν τη συγκεκριμένη μέθοδο καθώς και η αριθμητική της εφαρμογή. Τέλος, παρουσιάζονται σχηματικά τα αποτελέσματα της μελέτης με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων με στόχο την προσομοίωση ενός μοντέλου τσιμεντοκονιάματος με αερογέλη σε υπολογιστικό περιβάλλον.

Ευχαριστώ θερμά τον Επιβλέποντα Καθηγητή μου κ.Στέφανο Τσινόπουλο, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών, για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση που μου προσέφερε για την εκπόνηση της παρούσας Εργασίας.

Καταληκτικά, ευχαριστώ τους καθηγητές της σχολής μου που συνέβαλαν στην απόκτηση των απαραίτητων γνώσεων για την επιτυχή φοίτηση μου και την εκπόνηση της πτυχιακής μου εργασίας, αλλά κυρίως που ενίσχυσαν την αγάπη μου για τον κλάδο της μηχανολογίας.

Αραβανής Μάριος-Θεοφάνης

Μάρτιος 2022

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα διπλωματική εργασία ασχολείται με το θέμα της εκτίμησης των μηχανικών ιδιοτήτων τσιμεντοκονιάς τύπου αερογέλης με την μέθοδο των συνοριακών στοιχείων. Το αντικείμενο του παρόντος έργου, είναι η μελλοντική παρασκευή θερμομονωτικού επιχρίσματος με εξαιρετικές θερμομονωτικές ιδιότητες, εφάμιλλες των σύνθετων συστημάτων εξωτερικής θερμομόνωσης τύπου κελύφους ETICS, ώστε το νέον προϊόν που θα παραχθεί να συνδυάσει τα πλεονεκτήματα της λύσης επιχρίσματος που είναι, όπως ήδη αναφέρθηκε, η ευκολία, το εφικτό της εφαρμογής και το χαμηλό κόστος, με την αποδοτικότητα των συστημάτων ETICS. Ξεκινώντας, η παρούσα διπλωματική εστιάζει στην ανάλυση των ιδιοτήτων του τσιμεντοκονιάματος 'οιονεί'-αερογέλης κάνοντας μια αναφορά στο γενικότερο πλαίσιο των ιδιοτήτων τέτοιων τύπων κονιαμάτων. Συνεχίζοντας, αναλύονται οι ιδιότητες της αερογέλης μεμονωμένα, καθώς και οι τρόποι παρασκευής της, ενώ γίνεται και περαιτέρω αναφορά στις ιδιότητες μηχανικές ιδιότητες του συγκεκριμένου μίγματος. Έπειτα, η εργασία επικεντρώνεται στη μελέτη των μηχανικών ιδιοτήτων σύνθετων υλικών με πολύπλοκες δομές με τη χρήση της μεθόδου των συνοριακών στοιχείων. Αρχικά, γίνεται μια σύντομη εισαγωγή στην μέθοδο των συνοριακών στοιχείων προτού μετά αναλυθεί ενδελεχώς η μέθοδος καθώς και οι εξισώσεις από τις οποίες πλαισιώνεται. Μετά, παρουσιάζεται το περιοδικό μοντέλο γεωμετρίας καθώς και οι μαθηματικές εξισώσεις, οι οποίες το συνοδεύουν μαζί με σχηματικές αναπαραστάσεις. Ακόμα, πραγματοποιήθηκε αριθμητική εφαρμογή της μεθόδου ενώ παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της χρήσης της συγκεκριμένης μεθόδου όπως προκύπτουν από υπάρχοντα πειράματα και μελέτες. Καταληκτικά, πραγματοποιείται διεξοδική ανάλυση μοντέλου κονιάματος «οιονεί» – αερογέλης με χρήση πραγματικών δεδομένων συνοδευόμενη από φωτογραφίες στις οποίες αποτυπώνεται σχηματικά η μέθοδος των συνοριακών στοιχείων.

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ.....[2]

ΠΕΡΙΛΗΨΗ .....[3]

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....[6]

1.1. Αντικείμενο της εργασίας.....[6]

2. ΤΣΙΜΕΝΤΟΚΟΝΙΑΜΑ ΟΙΟΝΕΙ-ΑΕΡΟΓΕΛΗΣ.....[7]

2.1. Γενικά στοιχεία.....[7]

2.2. Ιδιότητες αερογέλης.....[8]

2.3. Παρασκευή ‘οιονεί – αερογέλης’.....[11]

2.4. Μηχανικές ιδιότητες τσιμεντοκονιαμάτων ‘οιονεί’ αερογέλης.....[15]

3. ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΙΣΟΤΡΟΠΑ ΚΑΙ ΟΜΟΓΕΝΗ ΜΕΣΑ.....[24]

3.1: Εισαγωγή στη γραμμική ελαστικότητα ισότροπου και ομογενούς μέσου.....[24]

**4. ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΚΑΙ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΜΕΘΟΔΟΥ  
ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.....[32]**

- 4.1. Ολοκληρωτική αναπαράσταση του προβλήματος συνοριακών τιμών.....[32]
- 4.2. Ολοκληρωτική αναπαράσταση για τις τάσεις.....[36]
- 4.3. Διακριτοποίηση.....[37]
- 4.4. Παρεμβολή των μεταβλητών.....[39]
- 4.5. Συναρτήσεις σχήματος και παρεμβολής για μονοδιάστατα στοιχεία.....[40]
- 4.6. Συναρτήσεις σχήματος και παρεμβολής για επιφανειακά στοιχεία.....[42]
- 4.7. Μετασχηματισμός συντεταγμένων.....[44]
- 4.8. Δημιουργία του συστήματος εξισώσεων .....[46]

**5. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ  
ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.....[49]**

- 5.1. Ομογενοποίηση.....[49]
- 5.2. Μοντελοποίηση περιοδικής γεωμετρίας.....[51]
- 5.3. Περίληψη της μεθόδου.....[53]

**6. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΜΕΛΕΤΗΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ  
ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ .....[54]**

- 6.1. Παρουσίαση αποτελεσμάτων με τη χρήση της μεθόδου των συνοριακών στοιχείων.....[54]

**7. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....[81]**

**8. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.....[82]**

# 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

## 1.1. Αντικείμενο της εργασίας

Στην παρούσα εργασία μελετώνται οι μηχανικές ιδιότητες τσιμεντοκονίας τύπου αερογέλης με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων. Μέσω της μελέτης αυτής, θα αναπτυχθεί καινοτόμο τεχνητό αδρανές υλικό «οιονεί-αερογέλης» με εξαιρετικά χαμηλή θερμική αγωγιμότητα, τουλάχιστον υποτριπλάσια από τα συμβατικά αδρανή υλικά που χρησιμοποιούνται στα υπάρχοντα θερμομονωτικά επιχρίσματα. Ως τελικός στόχος, τίθεται η μελλοντική παραγωγή του εν λόγω θερμομονωτικού επιχρίσματος, στην κατεύθυνση ανάπτυξης ενός καινοτόμου εμπορικού προϊόντος. Ξεκινώντας, το ζητούμενο ερώτημα ήταν η προσομοίωση της θερμικής και μηχανικής συμπεριφοράς των τσιμεντοκονιαμάτων. Συνεπώς, αναπτύχθηκαν προηγμένα προσομοιώματα μεθόδου συνοριακών στοιχείων μέσω των οποίων, θα εκτιμηθούν οι μηχανικές και οι θερμικές ιδιότητες που θα έχει η τσιμεντοκονία. Από την σύγκριση των εκάστοτε αριθμητικών αποτελεσμάτων με τις τιθέμενες επιθυμητές ιδιότητες για την τσιμεντοκονία, θα υπολογισθούν η ελάχιστη απαιτούμενη θερμική αγωγιμότητα που θα πρέπει να έχει το νέο υπό σύνθεση υλικό τύπου «αερογέλης», καθώς και η κοκκομετρία και η απαιτούμενη συγκέντρωσή του στη τσιμεντοκονία, ώστε κατ' ελάχιστον να επιτευχθούν οι επιθυμητές ιδιότητες της θερμομονωτικής τσιμεντοκονίας. Τα προσομοιώματα αυτά, επιτεύχθηκαν με τη σύνταξη κώδικα στο υπολογιστικό περιβάλλον του ANSYS, ενώ πραγματοποιήθηκε η εξαγωγή τους, μέσω drivers συνταγμένους στο πρόγραμμα της fortran για καλύτερη συλλογή και επεξεργασία των αποτελεσμάτων, σε συνδυασμό με τη χρήση της μεθόδου των συνοριακών στοιχείων, μέσω της οποίας έγινε σαφής διατύπωση του φυσικού προβλήματος και έπειτα η μορφοποίηση των μαθηματικών προσομοιωμάτων.

## 2. ΤΣΙΜΕΝΤΟΚΟΝΙΑΜΑ ‘ΟΙΟΝΕΙ’-ΑΕΡΟΓΕΛΗΣ

### 2.1. Γενικά στοιχεία

Με την αύξηση του παγκόσμιου πληθυσμού και των ανθρώπινων αναγκών, η κατανάλωση ενέργειας και η ζήτηση έχουν αυξηθεί σημαντικά, με αποτέλεσμα τα πιο ενεργειακά αποδοτικά κτίρια ή κτίρια εξοικονόμησης ενέργειας. Οι προηγούμενες μελέτες δείχνουν ότι η εκτιμώμενη κατανάλωση ενέργειας μόνο στον οικοδομικό τομέα θα μπορούσε να φθάσει το 35-40% της συνολικής ενέργειας που καταναλώνεται. Εκτός από αυτό, ο οικοδομικός τομέας είναι επίσης ο μεγαλύτερος παραγωγός αερίων θερμοκηπίου, ο οποίος επηρεάζει αρνητικά το περιβάλλον. Η κατανάλωση ενέργειας ενός κτιρίου εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τη θερμική μόνωση του κτιρίου για την κάλυψη των αναγκών προηγμένης ενεργειακής απόδοσης.

Η ζήτηση για θερμομονωτικά και βιώσιμα σύνθετα υλικά τσιμεντοκονίας αυξάνεται για να μειωθεί η κατανάλωση ενέργειας και να βελτιωθεί η θερμομόνωση του κτιρίου. Διάφοροι τύποι ελαφρών θερμομονωτικών αδρανών υλικών, όπως τα διογκώμενα γυάλινα σφαιρίδια, το διογκωμένο πολυστυρένιο, ο διογκωμένος περλίτης, καθώς και ο διογκωμένος άργιλος, χρησιμοποιούνται σε σύνθετα υλικά τσιμεντοκονίας για τη βελτίωση των θερμομονωτικών ιδιοτήτων ενός κτιρίου.

Η «αερογέλη» είναι ένα από τα εξαιρετικά θερμομονωτικά και ελαφριά υλικά που χρησιμοποιούνται σε τσιμεντένια υλικά για την ενίσχυση των θερμομονωτικών τους ιδιοτήτων. Η θερμική αγωγιμότητα της αερογέλης παρατηρείται χαμηλότερα από τον αέρα. Έχουν διεξαχθεί αρκετές έρευνες σχετικά με τη χρήση σκόνης/σωματιδίων αερογέλης στο τσιμεντένιο σύνθετο θερμομονωτικό. Τα αποτελέσματα έδειξαν υψηλότερες ιδιότητες θερμομόνωσης σε σύγκριση με άλλα ελαφριά σκυροδέματα που κατασκευάζονται χωρίς αερογέλη. Ενδεχομένως, η αερογέλη που ενσωματώνεται σε θερμομονωτικό τσιμεντένιο σύνθετο μπορεί να λύσει το πρόβλημα κατανάλωσης ενέργειας και να ικανοποιήσει τις αυξημένες απαιτήσεις θερμομόνωσης. Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, η χρήση αερογέλης ενσωματωμένης σε τσιμεντοειδή σύνθετο σε εξωτερικό τοίχο μπορεί να εξοικονομήσει 5-6% ενέργεια θέρμανσης/ψύξης του δοθούντος χώρου. Το μέγεθος των σωματιδίων της αερογέλης παίζει ζωτικό ρόλο στην εξαγωγή της πυκνότητας τους, ενώ μεταβάλλονται οι θερμικές και ακουστικές ιδιότητες ανάλογα με το μέγεθος των σωματιδίων. Οι μικροί κόκκοι αερογέλης έχουν υψηλή πυκνότητα και καλύτερες θερμομονωτικές ιδιότητες, ενώ έχει παρατηρηθεί μείωση κατά 17% της θερμικής αγωγιμότητας από τους κόκκους μεγαλύτερου μεγέθους. Λόγω της ελαφριάς πυκνότητας και των θερμομονωτικών ιδιοτήτων της αερογέλης, έχει χρησιμοποιηθεί και μελετηθεί εκτενώς σε θερμομονωτικά σύνθετα υλικά. Εκτός από τις θερμομονωτικές ιδιότητες, η αερογέλη είναι ένα εύθραυστο υλικό και έχει ιδιότητες χαμηλής αντοχής.

Έχουν διεξαχθεί αρκετές έρευνες σχετικά με τα τσιμεντένια σύνθετα υλικά με βάση την αερογέλη. Ορισμένοι ερευνητές μελέτησαν τη θερμομόνωση και τις μηχανικές ιδιότητες της, προσθέτοντας γραφένιο, νανοσωλήνες άνθρακα, και νανοίνες απταπουλίτη. Επί του παρόντος, πολλοί τύποι αερογέλης είναι άμεσα διαθέσιμοι στην αγορά, όπως η αερογέλη κυτταρίνης, η αερογέλη γραφενίου, η αερογέλη άνθρακα και η αερογέλη πυριτίου. Λόγω του χαμηλού κόστους και της διαδικασίας σύνθεσης της, η αερογέλη πυριτίου είναι ευρέως και εμπορικά διαθέσιμη. Η θερμική αγωγιμότητα της αερογέλης είναι πολύ χαμηλότερη από τα συμβατικά χρησιμοποιούμενα θερμομονωτικά υλικά όπως το αφρώδες γυαλί, το βαμβάκι, ο αφρός πολυστερίνης, ο πετροβάμβακας και ο αφρός πολυουρεθάνης. Η προσθήκη υδροφοβικής αερογέλης πυριτίου σε τσιμεντένιο σύνθετο υλικό θα μπορούσε να μειώσει την αντοχή και τη ρευστότητα, λόγω των χαμηλότερων ιδιοτήτων προσκόλλησης του και της εύθραυστης φύσης του. Η ελαφριά πυκνότητα και η ευθραυστότητα της αερογέλης καθιστούν δύσκολη τη δημιουργία ενός ομοιογενούς μίγματος μεταξύ αερογέλης και τσιμεντοειδών σύνθετων υλικών. Σε μια προσπάθεια να χρησιμοποιήσουν αποτελεσματικά την αερογέλη, οι ερευνητές έχουν λάβει διάφορα μέτρα για να αποφύγουν τη σύνθλιψη της αερογέλης και να ενισχύσουν τη σύνδεση μεταξύ υδροφοβικού πυριτίου αερογέλης και υδρόφιλων σύνθετων υλικών τσιμεντοκονίας.

## **2.2. Ιδιότητες αερογέλης**

Οι φυσικές ιδιότητες και το κόστος της αερογέλης πυριτίου εξαρτώνται από τη διαδικασία σύνθεσης. Κυρίως πυριτικό νάτριο, πολυεθοξυδιλοξάνιο, τετραεθοξυσιλάνη και τετραμεθοξυσιλάνη χρησιμοποιούνται ως πρόδρομα υλικά για τη σύνθεση αερογέλης πυριτίου. Η τετραμεθοξυσιλάνη και η τετραεθοξυσιλάνη θεωρούνται ακριβά και επικίνδυνα υλικά, και συνεπώς δεν έχει εμπορευματοποιηθεί για την παραγωγή αερογέλης πυριτίου. Για την αποδοτικότητα του κόστους, ο Schwertfeger [1] χρησιμοποίησε πυριτικό νάτριο ως φθηνότερη πηγή πυριτίου για την παραγωγή αερογέλης πυριτίου. Ο Carlson [1] και λοιποί επιστήμονες έδειξαν ότι η παρασκευή της αερογέλης πυριτίου από το πυριτικό νάτριο ήταν 7.7-13.5 φορές φθηνότερη από την αντίστοιχη, παρασκευασμένη από τετραεθοξυσιλάνη, συντεθειμένη αερογέλη πυριτίου. Ο Einasrud [1], δημιούργησε αερογέλη πυριτίου με διαφορετικούς πρόδρομους τρόπους δημιουργίας και διαπίστωσε ότι η αερογέλη πυριτίου κατασκευασμένη από πυριτικό νάτριο που είναι το γυαλί από νερό, περιέχει τον υψηλότερο βαθμό μονολιθικότητας, λόγω της υψηλής ακαμψίας της και του μεγαλύτερου μεγέθους πόρων της. Οι μελέτες δείχνουν ότι η εγγενής αερογέλη πυριτίου είναι εύθραυστη στη φύση και υπόκειται σε χαμηλότερη καταπόνηση. Τα πρόσθετα διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στην εξαγωγή των μηχανικών ιδιοτήτων και του μεγέθους των πόρων της αερογέλης. Η αερογέλη είναι ένα εξαιρετικά εύθραυστο θερμομονωτικό υλικό και για να βελτιωθούν οι μηχανικές και θερμικές μονωτικές ιδιότητες εκτεταμένη έρευνα πραγματοποιήθηκε τα τελευταία χρόνια. Πολλοί ερευνητές πρότειναν, ότι η προσθήκη πολυαιθυλενογλυκόλης στο διάλυμα μπορεί να ρυθμίσει τη δύναμη της μήτρας του διαλύματος. Ωστόσο, ένας υψηλός αριθμός συγκέντρωσης πολυαιθυλενογλυκόλης αποδυναμώνει τη μήτρα, ενώ η χαμηλή συγκέντρωση την



ενισχύει. Επίσης, η συγκέντρωση του υδατοδιαλύτου πολυμερούς ελέγχει το μέγεθος των πόρων του πορώδους πυριτίου της αερογέλης.

Ο Zhang [1] διερεύνησε την επίδραση του οξειδίου του γραφενίου στην αερογέλη και ανέφερε, ότι με την προσθήκη του 0,1% οξειδίου του γραφενίου, η συμπιεστική αντοχή βελτιώθηκε κατά 30% και αυξήθηκε στα 0,87 έως 1,13 MPa και ο συντελεστής του Young [1] παρουσίασε βελτίωση κατά 90% που κυμαίνεται από 38,5 έως 58,1 MPa αντίστοιχα. Guo, Lei [1] και λοιποί ανέφεραν επίσης ότι το οξείδιο του γραφενίου στην αερογέλη επηρεάζει θετικά την μηχανική απόδοση και την θερμομονωτική της ιδιότητα. Ο Guo [1] και οι συνεργάτες του, πρότειναν ότι 0-2 wt% φόρτωση του οξειδίου του γραφενίου μέσα σε αερογέλη γραφενίου-ρενορκινόλης-φορμαλδεΐδης, έδωσε σύνθετα αποτελέσματα με μείωση της γραμμικής συρρίκνωσης από 28,3% σε 2,0% και η πυκνότητα του σύνθετου μειώθηκε ταυτόχρονα από 506 kg/m<sup>3</sup> σε 195 kg/m<sup>3</sup>. Ο Lei [1] έδειξε ότι χρησιμοποιώντας 0.0-5.0 wt% γραφένιο μαζί με οξείδιο του πυριτίου σε σύνθετο οξείδιο του πυριτίου/οξειδίου του γραφενίου, ενίσχυσε τη μηχανική αντοχή του σύνθετου οξειδίου των αερογέλη/γραφένιο από 0.238 MPa σε 0.394 MPa, λόγω της ισχυρής διατομιακής αλληλεπίδρασης μεταξύ μήτρας πυριτίου και οξειδίου του γραφενίου. Το οξείδιο του γραφενίου βελτιώνει το πορώδες με την αλληλεπίδραση της μήτρας πυριτίου, η οποία περιορίζει τη μεταφορά θερμότητας αερίου και βελτιώνει τις θερμομονωτικές ιδιότητες από 13,5% έως 19,1%, σε σύγκριση με την καθαρή αερογέλη πυριτίου. Η θερμική αγωγιμότητα καθαρής αερογέλης πυριτίου και αερογέλης που περιέχει το οξείδιο του γραφενίου 5,0 wt% μετρήθηκε ως 0,0089 W/(mK) και 0,0075 W/(mK), αντίστοιχα. Η προσθήκη οξειδίου του γραφενίου σε αερογέλη όχι μόνο βελτίωσε της μηχανικής και θερμομόνωσης ιδιότητες, αλλά βελτίωσε τη θερμική σταθερότητα του συνθέτου.

Ομοίως, η προσθήκη διαφορετικών τύπων ινών στην αερογέλη μπορεί να επηρεάσει τη μηχανική αντοχή και τη θερμική αγωγιμότητα. Ο Patil [1] διερεύνησε την επίδραση διαφορετικών ινών όπως ίνες γυαλιού, νανοσωλήνες άνθρακα και νανόφυλλα γραφενίου στο διοξείδιο του πυριτίου της αερογέλης και ανέφερε μια σχετική μελέτη με εγγενή αερογέλη πυριτίου. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι συνδιασμοί γυάλινες ίνες/αερογέλη, οι νανοσωλήνες άνθρακα/αερογέλη και τα νανόφυλλα γραφενίου/αερογέλη, το σύνθετο έδειξε βελτίωση σε εφελκυσμό κατά ~3, ~9, και ~8 φορές και ~3.5, ~11.5, και ~9.5 φορές υψηλότερη ελαστική σταθερά από την εγγενή αερογέλη, ενώ αντίστοιχα, ο Li [1] διεξήγαγε ερευνητικές μελέτες για να βελτιώσει τη θερμομόνωση και τις μηχανικές ιδιότητες της αερογέλης με τη χρήση νανοϊνών αταπουγγίτη (ATP) που κυμαίνονται από 0 έως 20 wt% ,αποξηραμένες με τη μέθοδο περιβάλλοντος υψηλής πίεσης. Μετρήθηκε μια αύξηση από 0,8 έως 2,5 MPa σε συμπιεστική αντοχή και 1,0 έως 2,7 MPa αύξηση στον συντελεστή ελαστικότητας. Εκτός από τη βελτίωση των θερμικών και μηχανικών ιδιοτήτων, η ATP παρέχει στήριξη και αντέχει στις καταπονήσεις κατά τη διάρκεια της διαδικασίας ξήρανσης, η οποία μειώνει την πυκνότητα των σύνθετων υλικών. Εκτός από ανόργανες ίνες, έχει διεξαχθεί εκτεταμένη έρευνα με τη χρήση οργανικών ινών για τη βελτίωση των ιδιοτήτων των σύνθετων υλικών 'οιονει'-αερογέλης. Ο Lee [1] και οι συνάδελφοί του διεξήγαγαν εκτενείς μελέτες σχετικά με το συνδιασμό αραμίδιο/πυρίτιο ως

σύνθετα υλικά αερογέλης για τη βελτίωση των μηχανικών ιδιοτήτων και της θερμικής μονωσης. Τα αποτελέσματα της μελέτης έδειξαν, ότι τα σύνθετα υλικά αραμιδίου/αερογέλη σιλικόνης κατείχαν χαμηλότερο συντελεστή κάμψης με εξαιρετική ευκαμψία. Παρατηρήθηκε συμπίεστική αντοχή έως 1,2 MPa με εξαιρετικά χαμηλή μέτρηση θερμικής αγωγιμότητας  $0,0227 \pm 0,0007 \text{ W/(mK)}$ , ενώ παράλληλα παρατηρήθηκε, πως η ίνα αραμιδίου μειώνει τη συρρίκνωση του όγκου της αερογέλης κατά τη διάρκεια της διαδικασίας ξήρανσης (σε ξήρανση περιβάλλοντος) και λειτουργεί υποστηρικτικά στο σύνθετο.

Βιβλιογραφικές μελέτες δείχνουν, ότι η αερογέλη πυριτίου είναι το πιο χρησιμοποιούμενο και εμπορευματοποιημένο θερμομονωτικό υλικό λόγω της προσιτής διαδικασίας ξήρανσης και των οικονομικών πρώτων υλών. Η διαδικασία ξήρανσης περιβάλλοντος έχει πλεονεκτήματα χαμηλού κόστους που την καθιστούν κατάλληλη για εμπορική παραγωγή αερογέλης. Γενικά, η αερογέλη είναι ένα εξαιρετικά θερμικό μονωτικό υλικό με χαμηλότερες μηχανικές ιδιότητες, οι οποίες μπορούν να προσαρμοστούν ή να βελτιωθούν με την ενσωμάτωση αρκετών προσθέτων νέας γενιάς, όπως το γραφένιο και οι νανοσωλήνες άνθρακα κατά τη διάρκεια της διαδικασίας συνθετοποίησης. Επίσης, η αερογέλη είναι χημικά σταθερή και περιέχει κυρίως διοξείδιο του πυριτίου. Λόγω των εξαιρετικών της ιδιοτήτων, η αερογέλη πυριτίου θεωρείται το καταλληλότερο υλικό για την κατασκευή τσιμεντοειδών-θερμικών μονωτικών σύνθετων υλικών.

**Πίνακας 2.1:** Φυσικές ιδιότητες αερογέλης

Μέγεθος σωματιδίου	Επιφάνεια( $\text{m}^2/\text{g}$ )	Πορώδης	Πυκνότητα $\alpha(\text{kg}/\text{m}^3)$	Διάμετρος πόρων(n m)	Θερμική αγωγιμότητα( $\text{W}/\text{M}^*\text{k}$ )
1-10 $\mu\text{m}$	700-800`	95%	50	109.5 nm	0.020
0.1-5mm	366.5	>90%	40-150	20-100	-
2-20 $\mu\text{m}$	300-400	90-98%	50-80	20-40	0.016-0.020
2-4nm	600-1000	85- 99.9%	-350	1-100	0.010-0.020
0-4mm	500-1000	>90%	100	20-100	0.020
2-5nm	600-1000	-	98-230	Περίπου 20	-
4.94-6nm	160.8-169.4	90.4- 91.7	-	155-160	-
-	800-1100	87.9- 96.8	98-230	-	0.015

### **2.3. Παρασκευή οιονεί - αερογέλης**

Λόγω της κακής αντοχής, της χαμηλής πυκνότητας, της εύθραυστης συμπεριφοράς και της υδροφοβικής φύσης της αερογέλης, γίνεται δύσκολο να συνδιαστεί με τσιμεντένια υλικά. Ρωγμές μπορούν εύκολα να εντοπιστούν στην επιφάνεια της εγγενούς κατασκευασμένης αερογέλης με Ηλεκτρονικό Μικροσκόπιο Σάρωσης (SEM). Κατά τη διάρκεια της διαδικασίας ανάμιξης, τα σωματίδια αερογέλης μπορούν εύκολα να συνθλιβούν, να διαφύγουν ή να επιπλέουν στο καλούπι και να επηρεάζουν την ομοιογενή διασπορά των σωματιδίων αερογέλης/σκόνης εντός της τσιμεντένιας μήτρας. Ως εκ τούτου, καθίσταται αναγκαίο να βελτιωθεί η ομοιογένεια, η συνοχή και η σύνδεση της αερογέλης πυριτίου με τσιμεντένια υλικά. Προηγούμενες ερευνητικές μελέτες [1] έδειξαν διάφορες τεχνικές αντιμετώπισης όπως η προεπεξεργασία της αερογέλης, προσεκτική διαχείριση ανάμιξη, και επιφανειακή τροποποίηση με μεθανόλη, η οποία χρησιμοποιείται ως ανιονική επιφανειοδραστική ουσία για τη βελτίωση της ομοιογένειας και της σύνδεσης της αερογέλης με τσιμεντοειδή υλικά. Η επεξεργασία σωματιδίων αερογέλης με μεθανόλη μειώνει τις πιθανότητες εμφάνισης ρωγμών μετά τη διαδικασία σκλήρυνσης και η χαμηλή ανάμιξη κουράς με το χέρι θα μειώσει τη σύνθλιψη των σωματιδίων αερογέλης κατά τη διάρκεια της διαδικασίας ανάμιξης. Αν και η σύνθλιψη των σωματιδίων της αερογέλης είναι αναπόφευκτη, είτε η αερογέλη είναι προεργασμένη είτε όχι, μερικά σωματίδια αερογέλης συνθλίβονται κατά τη διάρκεια της διαδικασίας ανάμιξης, λόγω των ιδιοτήτων χαμηλότερης αντοχής. Όπως φαίνεται στις λιγότερες μελέτες, όπου σωματίδια αερογέλης αναμίχθηκαν με συνδετικά υλικά στο ξηρό περιβάλλον και στη συνέχεια προστέθηκαν νερό και χημικές προσμείξεις κατά τη διάρκεια της διαδικασίας ανάμιξης, παρατηρήθηκαν η σύνθλιψη και η αποικοδόμηση ορισμένων σωματιδίων αερογέλης μεγάλου μεγέθους το οποίο θα μπορούσε να οφείλεται στην υψηλή τριβή που προκαλείται λόγω της παρουσίας άμμου στο ξηρό περιβάλλον κατά τη διαδικασία ανάμιξης. Εκτός αυτού, η σύνθεση αναμειγνύεται και πάλι μετά την προσθήκη νερού και πρόσμιξης και ως εκ τούτου, οι πιθανότητες της σύνθλιψης και της υποβάθμισης της εγγενούς αερογέλης αυξάνονται. Προς αποφυγή της σύνθλιψης σωματιδίων, τα σωματίδια αερογέλης προστέθηκαν στο τελευταίο στάδιο της διαδικασίας ανάμιξης και αναμίχθηκαν πολύ απαλά. Αν και τα σωματίδια αερογέλης αναμίχθηκαν ομοιόμορφα χρησιμοποιώντας διάφορα μέσα που μπορούν να προκαλέσουν ελάχιστη σύνθλιψη, οι μελέτες εξακολουθούν να υποδεικνύουν χαμηλότερες συγκολλητικές ιδιότητες της αερογέλης με τσιμεντένια υλικά. Αρκετά κενά εντοπίστηκαν μεταξύ αερογέλης και τσιμεντοειδών υλικών μετά την τη διαδικασία σκλήρυνσης. Πραγματοποιήθηκαν διάφορες μελέτες για τη βελτίωση της συγκολλητικών ιδιοτήτων και την ομοιόμορφη κατανομή της αερογέλης εντός του σύνθετο τσιμέντου, αφαιρώντας αερογέλη με φυσικό τρόπο ή χρησιμοποιώντας χημικά με απώτερο σκοπό να αποφευχθούν τέτοια φαινόμενα.

Ο Zhu [1] ανέφερε ότι η υδροφοβική αερογέλη πυριτίου παραμένει σχετικά σταθερή σε ένα εξαιρετικά αλκαλικό περιβάλλον. Ο μελετητής χρησιμοποιεί πολυβινυλική αλκοόλη ως διασκορπιστικό παράγοντα για την ομοιογενή κατανομή σωματιδίων αερογέλης. Αν και η μελέτη με Ηλεκτρονικό Μικροσκόπιο Σάρωσης (SEM) των δειγμάτων έδειξε την ομοιογένεια των σωματιδίων αερογέλης εντός της δομής, παρατηρήθηκε μια ασήμαντη βελτίωση στην πρόσφυση της αερογέλης με τα τσιμεντένια υλικά. Η μελέτη έδειξε τα κενά στη διεπαφή μεταξύ των τσιμεντοειδών υλικών και των σωματιδίων αερογέλης. Ο Kim [1] χρησιμοποίησε μεθανόλη για την εκ νέου επεξεργασία της αερογέλης και για τη φυσική χημική της σταθερότητα, ενώ πραγματοποίησε ανάμιξη με τσιμέντο. Χρήση φασματοσκοπίας υπέρυθρων μετασχηματισμών Fourier (FTIR) του σύνθετου υλικού, υποδεικνύει ότι η εκ νέου επεξεργασία με τη χρήση μεθανόλης ήταν πολύ χρήσιμο στο να εγκατασταθούν τα σωματίδια της αερογέλης σταθερά μέσα στο τσιμεντένιο σύνθετο, ενώ παράλληλα είχε μια πολύ καλή χημική αντίδραση κατά τη διάρκεια της διαδικασίας σκλήρυνσης για να συμπυκνωθεί η αερογέλη. Η μελέτη δεν έδειξε κανένα στοιχείο χημικής αλλαγής μορίων σωματιδίων της αερογέλης κατά τη διάρκεια της διαδικασίας ενυδάτωσης. Επιπλέον, η μελέτη με Ηλεκτρονικό Μικροσκόπιο Σάρωσης (SEM) δεν έδειξε επίσης χημική αποικοδόμηση, που υποδηλώνει ότι η μεθανόλη ήταν ευεργετική για να αναμειγνύεται η αερογέλη με τη μήτρα τσιμέντου. Επίσης διαπίστωσε ότι η μεθανόλη μείωσε τις ρωγμές μεταξύ της αερογέλης και των ενυδατωμένων τσιμεντένιων υλικών στη ζώνη διεπιφανειακής μετάβασης (ITZ). Ομοίως, ο Al Zaidi [1] χρησιμοποίησε επίσης μεθανόλη για να αναμίξει την αερογέλη με τσιμέντο και μείωσε την πιθανή εμφάνιση ρωγμών στην ξηρή κατάσταση. Η μελέτη SEM έδειξε, ότι η προεπεξεργασία με μεθανόλη παράγει τζελ χαμηλού πορώδους μέσα στη σύνθετη δομή. Η μεθανόλη χημικά συνδεδεμένη με την αερογέλη μειώνει το πορώδες, δίνει σταθερά με την πάστα τσιμέντου και μειώνει τις ρωγμές μεταξύ των σωματιδίων ενυδάτωσης. Ωστόσο, ορισμένες μελέτες υποδεικνύουν, ότι η ταχύτητα θέρμανσης και εξαερισμού θα πρέπει να ελέγχονται για να αποφευχθεί η ρωγμή του μονόλιθου. Σύμφωνα με τους Gao [1] και de Fátima Júlio [1] η χρήση μεθανόλης θα πρέπει αποφευχθεί για κατασκευαστικούς σκοπούς, λόγω των τοξικών επιδράσεων της.

Οι Lou [1] και Fei [1], χρησιμοποίησαν παράγοντα σύζευξης σιλανίου(KH-550) για την τροποποίηση της επιφάνειας της υδροφοβικής αερογέλης πυριτίου και παρέχουν καλή συμβατότητα με τσιμεντοκονία και αύξηση της σύνδεσης μεταξύ τους. Οι παράγοντες σύζευξης σιλανίου αντιδρούν με τις υδρόφοβες ομάδες σωματιδίων αερογέλης κατά οργανική ομάδα αντιδραστικότητας για την κάλυψη του αλκυλικού της επιφάνειας της αερογέλης. Οι μελέτες με SEM και FTIR δείχνουν ότι τόσο τα τροποποιημένα όσο και τα μη τροποποιημένα σωματίδια αερογέλης αναμίχθηκαν σταθερά εντός της σύνθετης δομής χωρίς οποιαδήποτε υποβάθμιση. Επιπλέον, η τροποποίηση της επιφάνειας από το KH-550 είναι αποτελεσματική, όσον αφορά τη σταθερότητα και την πρόσφυση. Τα σωματίδια αερογέλης ήταν στενά συνδεδεμένα με τα τσιμεντένια υλικά, ενώ τα μη διαμορφωμένα σωματίδια αερογέλης ήταν διάσπαρτα μέσα στη σύνθετη δομή. Μελέτη των αποτελεσμάτων δείχνει επίσης, ότι η μεσοπορική δομή της αερογέλης δεν επηρεάστηκε από την τροποποίηση της επιφάνειας. Ως εκ τούτου, η τροποποίηση της επιφάνειας δεν επηρεάστηκε από τις επιδόσεις θερμομόνωσης της αερογέλης, όταν είχε ενταχθεί σε τσιμεντοειδή υλικά.

Ο Wang [1] χρησιμοποίησε ακρυλαμίδιο για να διασκορπίσει ομοιογενώς τα σωματίδια αερογέλης, εντός της μήτρας τσιμέντου χωρίς να επηρεάζουν τη μηχανική απόδοση του σύνθετου. Η μελέτη SEM έδειξε, ότι τα δείγματα των σωματιδίων αερογέλης διανεμήθηκαν ομοιόμορφα και καταλήγει στο συμπέρασμα σχετικά με τα οφέλη των χημικών

προσμίξεων. Ο de Fátima Júlio [1] χρησιμοποίησε ανιονική επιφανειοδραστική ουσία για να διασκορπίσει τα σωματίδια αερογέλης μέσα στη μήτρα τσιμέντου. Εικόνα SEM των δειγμάτων, αποκαλύπτει την ύπαρξη σωματιδίων αερογέλης με σταθερή ενυδάτωση και ομοιόμορφα διασκορπισμένα στη μήτρα, αλλά εντοπίστηκαν σαφή κενά διαχωρισμού μεταξύ των τσιμεντοειδών υλικών και των σωματιδίων αερογέλης. Αυτό μπορεί να οφείλεται στη συρρίκνωση του όγκου της πάστας τσιμέντου κατά τη διάρκεια της διαδικασίας ενυδάτωσης.

Οι προαναφερθείσες μελέτες καταδεικνύουν ότι η προεπεξεργασία της υδροφοβικής αερογέλης πυριτίου οδήγησε σε ομοιόμορφα διασκορπισμένη αερογέλη μέσα στη σύνθετη δομή και παρουσίασε καλύτερη συνοχή με τα τσιμεντένια υλικά. Τα κενά διαχωρισμού και οι ρωγμές βρέθηκαν σε αρκετές μελέτες με μη επεξεργασμένη αερογέλη και επεξεργασμένη αερογέλη, ενώ η προεργασία με παράγοντα σύζευξης σιλανίου και η μεθανόλη μείωσαν αποτελεσματικά τις ρωγμές και αύξησαν τη σταθερότητα των ιδιοτήτων πρόσφυσης. Η επιφάνεια πυριτίου στην αερογέλη αποτελείται από πολλές υδρόφοβες ομάδες, οι οποίες οδηγούν στην αποδυνάμωση της συμβατότητας με τα τσιμεντένια υλικά. Αλατούχες ουσίες σύζευξης δρουν, ως μεταβατικοί παράγοντες για τη βελτίωση της πρόσφυσης μεταξύ τσιμεντοειδούς υλικού-αερογέλης, ενεργώντας στην περιοχή διεπαφής μεταξύ ανόργανου και οργανικού υποστρώματος, μέσω οργανικών ομάδων-αντιδραστικότητας και αλκοξυσιλάνης-ανόργανης αντιδραστικότητας. Εκτός αυτού, η σύνθλιψη της αερογέλης πυριτίου κατά τη διάρκεια της διαδικασίας ανάμειξης εξακολουθεί να είναι αναπόφευκτη και μπορεί να επηρεάσει διάφορες ιδιότητες του ελαφριού σκυροδέματος. Ως εκ τούτου, μια προσεκτική μέθοδος ανάδευσης και προσθήκη αερογέλης στο τελευταίο στάδιο της διαδικασίας ανάμειξης μπορεί να συμβάλει στη μείωση της μέγιστης σύνθλιψης της αερογέλης.

**Πίνακας 2.2:** Διαδικασίες παραγωγής αερογέλης και τα προτερήματά τους

<b>ΜΗΤΡΑ</b>	<b>ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΒΕΛΤΙΩΣΗΣ ΑΕΡΟΓΕΛΗΣ</b>	<b>ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΒΕΛΤΙΩΣΗΣ</b>
Πάστα	Μεθανόλη	Μείωση ρωγμών και σταθερή ανάμιξη πάστας φρέσκου τσιμέντου
Τσιμεντοκονία	KH550 παράγοντας σύζευξης σιλανίου	Ενίσχυση δεσμού μεταξύ της αερογέλης και του επικολλούμενου υλικού
Τσιμεντοκονία	Ανιονική επιφανειοδραστική ουσία	Ομοιόμορφη διασπορά της αερογέλης εντός

		του τσιμεντένιου συνθέτου
Λάσπη	ΚΗ550 παράγοντας σύζευξης σιλανίου	Για την παροχή καλής συμβατότητας με πάστα τσιμέντου
Τσιμέντο	Ακρυλαμύδιο	Να διασκορπίσει ομοιόμορφα την αερογέλη εντός της μήτρας τσιμέντου χωρίς να επηρεάσει τη μηχανική εκτέλεση.
Τσιμέντο	Διασκορπιστικός παράγοντας πολυβινυλοϊκής αλκοόλης	Για να διασκορπιστεί ομοιόμορφα η σύνθεση ανάμειξης μέσα στο τσιμεντένιο σύνθετο
Τσιμέντο	Σε προστεγνωμένο φούρνο στους 130°C προεπεργασμένο με μεθάνιο	Ο φούρνος ξηραίνεται για να χάσει την υδροφοβία και για καλύτερη διαδικασία ανάμειξης με αερογέλη προεγκατεστημένη με μεθανόλη για να σταθεροποιηθεί το μείγμα και να μειωθούν οι ρωγμές μετά τη διαδικασία σκλήρυνσης
Τσιμέντο	Χαμηλή ανάμιξη κουράς με το χέρι	Για να αποφευχθεί η σύνθλιψη και η υποβάθμιση των σωματιδίων αερογέλης .

UHPC	Χαμηλή ανάμιξη κουράς	Για να αποφευχθεί η σύνθλιψη των κόκκων αερογέλης
Αφρώδες τσιμέντο	Πυκνωτικό	Για την επικάλυψη των σωματιδίων της αερογέλης και για τη ρύθμιση του ιξώδους του πολτού.

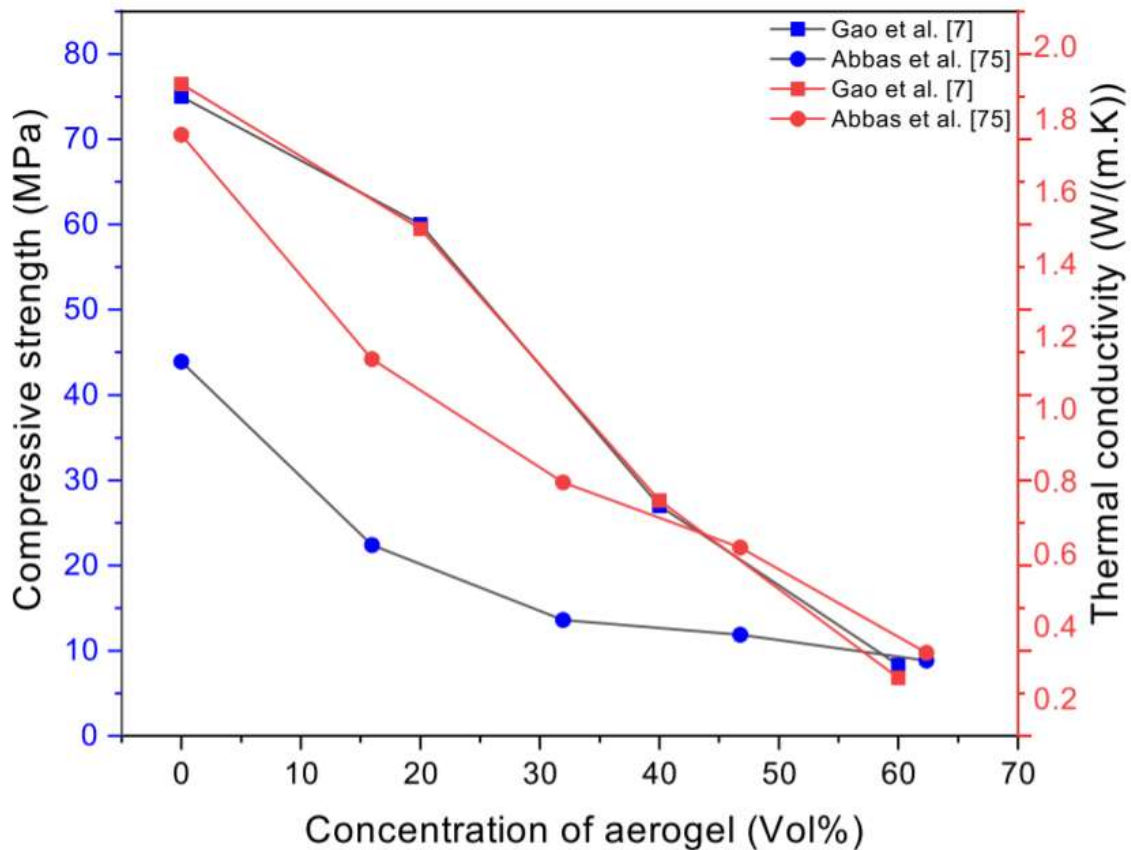
#### **2.4.Μηχανικές ιδιότητες τσιμεντοκονιαμάτων «οιονεί»- αερογέλης**

Η αερογέλη είναι ένα εξαιρετικό θερμικό μονωτικό υλικό με χαμηλές σχετικά μηχανικές ιδιότητες και ως επί το πλείστον, η αερογέλη χρησιμοποιείται ως θερμική μόνωση. Αν και το σκυρόδεμα με βάση την αερογέλη έχει αποδεκτή συμπίεστική αντοχή, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως δομικό στοιχείο, όπως το να φέρει φορτία στους τοίχους των κτιρίων. Προετοιμασμένο θερμικό μονωτικό κονίαμα χρησιμοποιείται για τους σκοπούς σοβατίσματος του τοίχου, που καλύπτει τον θερμικό μονωτικό πίνακα, μονώνοντας το επίστρωμα ενάντια στη φωτιά, ενώ παρέχει θερμική προστασία, αλλά και σφράγιση θερμικών γεφυρών. Το θερμικό μονωτικό κονίαμα μπορεί εύκολα να επικολληθεί, να ψεκαστεί και να επικαλυφθεί, καθιστώντας το ιδανικότερο για χρήση πέρα από το θερμικό μονωτικό σκυρόδεμα. Το θερμομονωτικό κονίαμα και το αφρώδες σκυρόδεμα υπόκεινται σε υψηλότερες θερμομονωτικές επιδόσεις, ενώ το ελαφρύ θερμικό μονωτικό σκυρόδεμα υπόκειται στο να έχει περισσότερη μηχανική δύναμη και επαρκή θερμομονωτική ικανότητα.

Ο πίνακας 2.2 δείχνει τις μελέτες αρκετών ερευνητών σχετικά με τις επιπτώσεις της προσθήκης αερογέλης στο σκυρόδεμα, τα θερμομονωτικά τσιμεντένια σύνθετα υλικά και το κονίαμα. Είναι προφανές, ότι η παρουσία μεγάλου όγκου αερογέλης μέσα στο τσιμεντένιο θερμικό μονωτικό σύνθετο θα μειώσει τη μηχανική απόδοση και θα αυξήσει την θερμομονωτική ικανότητα.

Ο Abbas [1] εξήγαγε αερογέλη πυριτίου προερχόμενη από φλοιό ρυζιού με την sol-gel τεχνική και χρησιμοποίησε την αερογέλη σε ένα ελαφρύ σύνθετο με βάση το τσιμέντο. Τα αποτελέσματα της μελέτης ανέφεραν, ότι η συμπίεστική αντοχή των συνθέτων μειώνεται με την αύξηση της συγκέντρωσης αερογέλης πυριτίου στο τσιμέντο. Η συμπίεστική αντοχή του δείγματος ελέγχου χωρίς αερογέλη μετρήθηκε 43,93 MPa που μειώθηκε σε 11,89 MPa και 8,85 MPa στα 15,96 vol% και 62,34 vol% περιεκτικότητα σε αερογέλη, αντίστοιχα. Λόγω της αύξησης της συγκέντρωσης αερογέλης, ο όγκος διαμέτρων των πόρων στο σύνθετο επίσης αυξήθηκε, γεγονός που οδήγησε στην αύξηση του συνολικού πορώδους

του συνθέτου. Μετρήθηκε επίσης, το πορώδες του δείγματος ελέγχου και τα δείγματα που περιείχαν περιεκτικότητα σε αερογέλη 15,96 vol% και 62,34 vol%. 16,38%, 24,53% και 47,98%, και αντίστοιχα, λόγω αύξησης πορώδους, η πυκνότητα και η συμπιεστική δύναμη μειώθηκαν. Ομοίως, ο Gao προετοίμασε ένα σύνθετο θερμικό μονωτικό με ενσωματωμένη αερογέλη που περιέχει 0% έως 60% όγκο αερογέλης, όπως απεικονίζει το σχήμα 2.1.

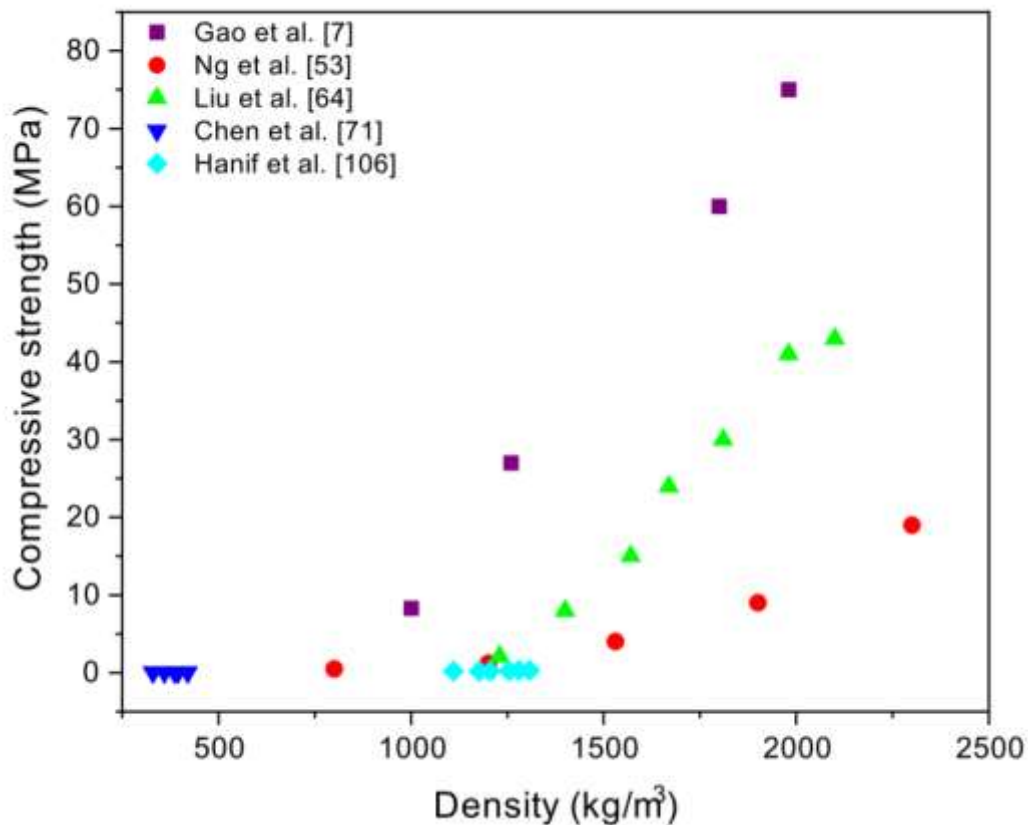


**Σχήμα 2.1:** Σχέση μεταξύ συγκέντρωσης αερογέλης - διατμητικής τάσης και θερμικής αγωγιμότητας σε πειράματα διαφόρων επιστημόνων [1].

Τα αποτελέσματα δείχνουν, ότι η αύξηση της ποσότητας της αερογέλης μειώνει τη μηχανική απόδοση των σύνθετων υλικών. Η πυκνότητα των 1980 kg/m<sup>3</sup> και σχεδόν 75 MPa συμπιεστικής αντοχής ήταν μετρούμενη για δείγματα σκυροδέματος αναφοράς χωρίς περιεκτικότητα σε αερογέλη. Ενώ, στο 60 vol% περιεκτικότητάς αερογέλης, η πυκνότητα και η συμπιεστική δύναμη μειώθηκε στα 1000 kg/m<sup>3</sup> και 8,3 MPa, αντίστοιχα. Η μελέτη



έδειξε μείωση της πυκνότητας κατά 50% και 9 φορές μείωση της συμπιεστικής αντοχής. Παρόμοια μείωση της συμπιεστικής αντοχής παρατηρήθηκε σε ορισμένες προηγούμενες μελέτες. Επιπροσθέτως, μερικές προηγούμενες μελέτες έδειξαν αύξηση της συγκέντρωσης αερογέλης έως και 80% περιεκτικότητας σε όγκο και σημαντική μείωση της συμπιεστικής αντοχής (σχεδόν ή χαμηλότερη από 1 MPa). Η μείωση της συμπιεστικής αντοχής οφείλεται κυρίως στην χαμηλή αντοχή της αερογέλης. Οι σχέσεις μεταξύ πυκνότητας και συμπιεστικής δύναμης που επιτυγχάνονται από διάφορους ερευνητές παρουσιάζεται στο σχήμα 2.2. Η μείωση της συμπιεστικής αντοχής μπορεί να εξηγηθεί από την ενσωμάτωση της αερογέλης στο σκυρόδεμα που οδηγεί σε αύξηση του πορώδους. Επιπλέον, το σκυρόδεμα χαμηλότερης πυκνότητας υποβάλλεται στο να έχει υψηλότερο πορώδες, γεγονός που οδηγεί σε μείωση της αντοχής του τσιμεντοειδούς σύνθετου. Ο Lian έχει παρουσιάσει στις μελέτες του, ότι η συμπιεστική δύναμη του πορώδους στο σκυρόδεμα μειώθηκε με την αύξηση του πορώδους. Επιπλέον, οι ελαφριά πορώδη υλικά, επίσης χρησιμοποιούνται συνδυαστικά με την αερογέλη για την παραγωγή ελαφρού σκυροδέματος. Εκτός αυτού, διάφοροι παράγοντες όπως το μέγεθος, η μορφή της αερογέλης, ο λόγος νερού/τσιμέντου, ο τύπος επιφανειοδραστικού διαλύματος, οι συνθήκες σκλήρυνσης, το υδροθερμικό περιβάλλον, καθώς και τα χρησιμοποιούμενα μέσα πρόσμιξης επηρεάζουν τη μηχανική και θερμομονωτική ικανότητα του σκυροδέματος 'οιονεί'- αερογέλης.



**Σχήμα 2.2:** Σχέση μεταξύ της συμπιεστικής αντοχής και της πυκνότητας της αερογέλης με βάση τσιμεντένια σύνθετα υλικά [1].

Ο Tsioulou [1] διερεύνησε την επίδραση του μεγέθους ενός σωματιδίου αερογέλης στις ιδιότητες θλιπτικής αντοχής του σκυροδέματος 'οιονει'-αερογέλης. Τα αποτελέσματα της μελέτης δείχνουν ότι οι τσιμεντοκονίες που περιέχουν το 30% της σκόνης αερογέλης έδειξαν αντοχή σε θλίψη περίπου 60 MPa. Αυτό δείχνει, ότι η σκόνη αερογέλης ενσωματωμένη σε κονίαμα παρουσιάζει χαμηλότερη μηχανική απόδοση από την αερογέλη ενσωματωμένη σε σύνθετα υλικά με βάση το τσιμέντο. Ωστόσο, οι Adhikary [1] και Rudzionis [1] ανέφεραν τα αντίθετα φαινόμενα, μια ελαφρά αύξηση στη θλιπτική αντοχή παρατηρήθηκε για ελαφρύ σκυρόδεμα που παρασκευάζεται με σκόνη αερογέλης. Αν και οι δύο μελέτες δείχνουν την ελαφρά αύξηση/μείωση της αντοχής με την προσθήκη αερογέλης σε μορφή σκόνης ή σωματιδίων.

Ο Ng [1] μελέτησε τις επιπτώσεις των συνθηκών αποθήκευσης και σκλήρυνσης σε αυξημένες θερμοκρασίες σε κονιάματα ενσωματωμένα στην αερογέλη με βάση τη συνταγή σκυροδέματος εξαιρετικά υψηλής απόδοσης (UHPC). Τα αποτελέσματα της

μελέτης ανέφεραν, ότι τα δείγματα σκυροδέματος πέτυχαν διαφορετικές τιμές αντοχής σε διαφορετικές συνθήκες αποθήκευσης και σκλήρυνσης με παρόμοια σύνθεση ανάμειξης. Τα δείγματα που περιέχουν 60 vol% και 70 vol% αερογέλη παρουσίασαν βέλτιστη συμπίεστική απόδοση που αποθηκεύτηκαν στους 80 °C σε ξηρές συνθήκες για 24 ώρες και στους 80 °C βυθισμένο σε νερό για 28 ημέρες (80S h). Τα δείγματα σκυροδέματος πέτυχαν 18,1 MPa και 8,3 MPa συμπίεστική αντοχή. Η χαμηλότερη συμπίεστική αντοχή παρατηρήθηκε για δείγματα σκυροδέματος που περιέχουν 60 vol% και 70 vol% αερογέλη αποθηκευμένη στους 120 C σε ξηρές συνθήκες για 24 ώρες και θεραπεύονται στους 120 C στεγνωτήρια καλυμμένα με αλουμινοχαρτο για 28 ημέρες (120D h). Τα δείγματα σκυροδέματος έδειξαν μείωση 77% στη συμπίεστική τους αντοχή για δείγματα που περιέχουν 60 vol% και 70 vol% αερογέλη σε σχέση με δείγματα σκυροδέματος 80S h. Ως εκ τούτου, η σκλήρυνση στο νερό σε υψηλές θερμοκρασίες ήταν ευεργετική για τη βελτίωση των μηχανικών ιδιοτήτων του σκυροδέματος. Αυτό μπορεί να αποδοθεί στην επιτάχυνση της ενυδάτωσης και της βελτίωσης της μικροδομής. Κατά τη θεραπεία δειγμάτων σε βυθισμένο νερό και η διαθεσιμότητα του νερού μπορεί να λειτουργήσει ως εμπόδιο για την αύξηση της συμπίεστικής αντοχής. Η μείωση της θλιπτικής αντοχής μπορεί να αποδοθεί στην υπερβολική διαστολή και την πρόωρη αφυδάτωση για τα δείγματα που θεραπεύονται άμεσα σε ανεβασμένες θερμοκρασίες. Ομοίως, ο Wang [1] μελέτησε την επίδραση της θερμοκρασίας σκλήρυνσης στη μηχανική απόδοση της πάστας τσιμέντου εμπλουτισμένη με αερογέλη. Τα αποτελέσματα της μελέτης, ανέφεραν ότι η συμπίεστική αντοχή και η κάμψη της με αερογέλη αυξάνονταν με την αύξηση της θερμοκρασίας σκλήρυνσης μέχρι 50 °C θερμοκρασία που 'θεραπεύει' τη πάστα τσιμέντου, ενώ, παρατηρήθηκε ελαφρά πτώση της θλιπτικής και καμπτικής αντοχής της πάστας τσιμέντου με αερογέλη που 'θεραπεύεται' σε θερμοκρασία μεγαλύτερη από 50°C. Σχεδόν 45% και 34% αύξηση στη συμπίεστική δύναμη και κάμψη μετρήθηκε για το δείγμα που θεραπεύτηκε σε ζεστό νερό 50 C από το δείγμα που 'θεραπεύτηκε' σε νερό 5°C. Η αύξηση της συμπίεστικής αντοχής έως και 50 °C μπορεί να αποδοθεί επιτάχυνση της ενυδάτωσης και παραγωγής σταθερών C-S-H πηκτωμάτων. Ενώ, τα δείγματα που 'θεραπεύτηκαν' σε θερμοκρασία 65-80 °C παρήγαγαν μεγάλους πόρους εντός της σύνθετης δομής, οι οποίοι οδήγησαν σε πτώση της θλιπτικής και καμπτικής αντοχής.

Ο Al Zaidi [1] και οι συνάδελφοι του, ανέφεραν επίσης την επίδραση της μεθόδου σκλήρυνσης για τη μηχανική και θερμική απόδοση του τσιμεντένιου συνθέτου με βάση την αερογέλη. Μετά την αρχική σκλήρυνση (24 ώρες), τα δείγματα σκυροδέματος διατηρήθηκαν 7 ημέρες ακόμα. Για την πρώτη μέθοδο, τα σύνθετα δείγματα διατηρούνται στον κλιματικό θάλαμο σε θερμοκρασία 25 C και 50% σχετική υγρασία, ενώ για τη δεύτερη μέθοδο, τα σύνθετα δείγματα διατηρούνται σε υπαίθριο αέρα σε θερμοκρασία δωματίου και για την τρίτη μέθοδο, τα σύνθετα διατηρήθηκαν σε νερό που απομονώθηκε μέχρι 28 ημέρες της διαδικασίας ενυδάτωσης. Η καλύτερη καμπτική δύναμη και η βέλτιστη θερμική αγωγιμότητα παρουσιάστηκε στην πρώτη μέθοδο σκλήρυνσης, ενώ η δεύτερη μέθοδος έδειξε καλύτερη συμπίεστική δύναμη.

Ο Al Zaidi [1] διερεύνησε την επίδραση του νερού-τσιμέντου αναλογία και νανο-διοξείδιο του πυριτίου στις μηχανικές ιδιότητες του σκυροδέματος αερογέλης. Τα αποτελέσματα δείχνουν μείωση της συμπιεστικής αντοχής, της καμπτικής δύναμης και της πυκνότητας από ~ 30%, ~25.15%, και ~ 7.1%, αντίστοιχα για σκυρόδεμα που περιέχει το 60% της περιεκτικότητας του σε αερογέλη ενώ, αυξάνεται η περιεκτικότητα σε νερό από 0,40 έως 0,45. Μετά την εξάτμιση του νερού, το σκυρόδεμα αποκτά μια πιο πορώδη δομή σε υψηλή αναλογία νερού-τσιμέντου, που οδηγεί σε μείωση της αντοχής και της πυκνότητας. Εκτός αυτού, μια υψηλότερη αναλογία νερού-τσιμέντου καθυστερεί τη διαδικασία ενυδάτωσης και παράγει χαμηλή θερμότητα κατά τη διάρκεια της διαδικασίας ενυδάτωσης, οδηγώντας σε χαμηλότερες ιδιότητες αντοχής. Επιπροσθέτως, τα αποτελέσματα δείχνουν ότι το σκυρόδεμα 'οιονεί'-αερογέλης με 3% νανο-διοξείδιο του πυριτίου αύξησε τη συμπιεστική αντοχή κατά 14%. Αυτό μπορεί να αποδοθεί στις επιδράσεις των πυρήνων του νανο-πυριτίου που για C-S-H, επιταχύνει την ενυδάτωση του τσιμέντου, γεμίζει τα κενά και αυξάνει τη μηχανική απόδοση.

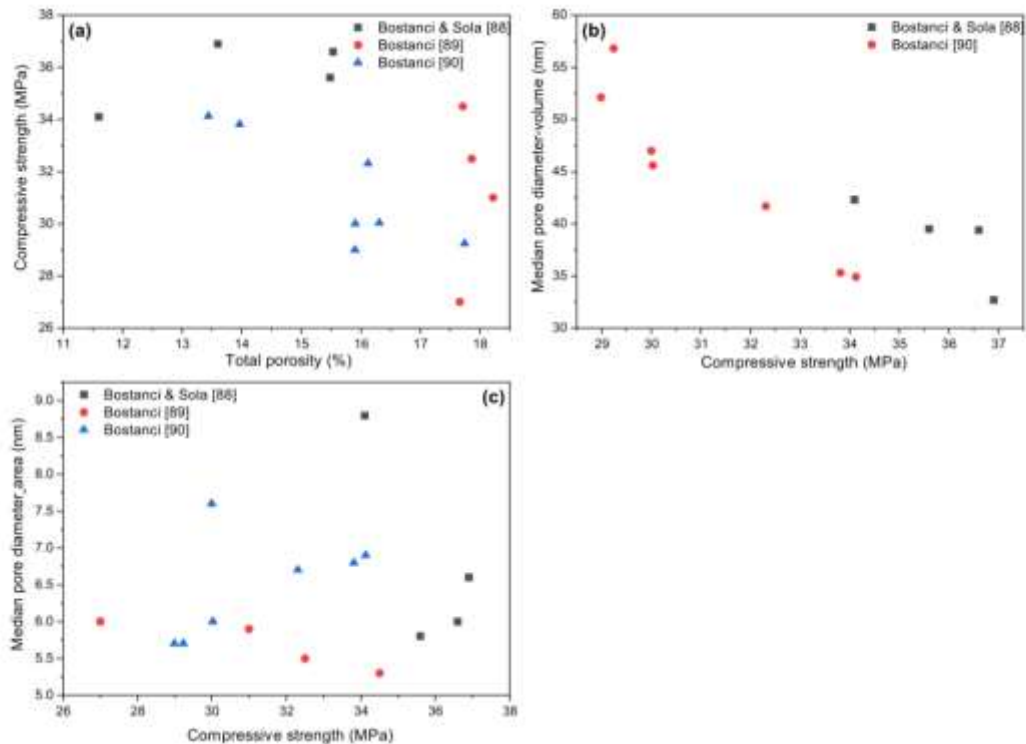
Ο Ng [1] διερεύνησε την επίδραση ασβεστοποιημένων αργίλων στις ιδιότητες του κονιάματος 'οιονεί'-αερογέλης. Τα αποτελέσματα της μελέτης δείχνουν, ότι η ενσωμάτωση ασβεστοποιημένου αργίλου μείωσε σημαντικά τη δύναμη του συνθέτου. Παρατηρήθηκε μείωση σχεδόν 52% σε συμπιεστική δύναμη για το σύνθετο που περιέχει 40% αερογέλη με τον ασβεστοποιημένο πηλό.

Ο Adhikary [1] ανέφερε, ότι η ενσωμάτωση νανοσωλήνων άνθρακα στο σκυρόδεμα αερογέλης μπορεί να βελτιώσει σημαντικά τη μηχανική απόδοση. Με παρόμοια συγκέντρωση αερογέλης και αυξάνοντας τις δόσεις νανοσωλήνων άνθρακα στο 0,6%, η αντοχή αυξήθηκε κατά σχεδόν 41,48% από το δείγμα ελέγχου χωρίς νανοσωλήνες άνθρακα. Ο λόγος για τη βελτίωση της συμπιεστικής δύναμης μπορεί να πιστωθεί στους νανοσωλήνες άνθρακα που βελτίωσαν τη μικροδομή γεμίζοντας τα κενά και συνέβαλαν στη μείωση των κενών διαχωρισμού μεταξύ αερογέλης και τσιμεντοειδών υλικών στη ζώνη μετάβασης από τα προϊόντα ενυδάτωσης και τους νανοσωλήνες άνθρακα. Εκτός αυτού, οι νανοσωλήνες άνθρακα παρέχουν αναφορές για υψηλότερη ανάπτυξη πηκτωμάτων C-S-H που θα μπορούσε να συμβάλει στη βελτίωση της συμπιεστικής αντοχής του σύνθετου υλικού εμπλουτισμένο με αερογέλη. Λόγω παρόμοιου φαινομένου παρατηρήθηκε αύξηση της συμπιεστικής αντοχής του σκυροδέματος «οιονεί»-αερογέλης με την εισαγωγή νανοπλακικού γραφενίου και υβριδικούς νανοσωλήνες άνθρακα - γραφενίου.

Ο Yoon [1] παρασκεύασε ελαφρύ αφρώδες σκυρόδεμα που χρησιμοποιεί δύο διαφορετικές πρόδρομες ουσίες (μεθυλτριμεθοξυσιλάνη, τετρααιθυλική ορθοσιλική μεθυλτριμεθοξυσιλάνη). Το συμβατικό αφρώδες σκυρόδεμα πέτυχε 0,81 MPa αντοχής ενώ, το αφρώδες σκυρόδεμα με βάση τη μεθυλοτριμεθοξυσιλάνη και το τετρααιθυλικό ορθοσιλικό μεθύλιο με βάση την τριμεθοξυσιλάνη πέτυχε 0,82 MPa και 0.78 MPa συμπιεστική δύναμη. Σε αντίστοιχο δείγμα σκυροδέματος, οι πυκνότητες υπολογίστηκαν για 300 kg/m<sup>3</sup>, 320 kg/m<sup>3</sup>, και 310 kg/m<sup>3</sup> αντίστοιχα. Η μελέτη δείχνει ότι ο τύπος των πρόδρομων νημάτων επιδρά ελαφρώς στις μηχανικές ιδιότητες του αφρώδους

σκυροδέματος. Αυτό, μπορεί να οφείλεται στον τύπο των πρόδρομων νημάτων που επηρεάζουν τη φυσική και μηχανική απόδοση της αερογέλης.

Ο Lu [1] ανέφερε τη σημασία του πορώδους στις μηχανικές ιδιότητες της αερογέλης, ενώ ενσωμάτωσε τσιμεντοειδείς σύνθετες ουσίες. Τα αποτελέσματα της μελέτης ανέφεραν, ότι με την ενσωμάτωση της αερογέλης, το πορώδες του σύνθετου αυξήθηκε και οδήγησε σε μείωση της μηχανικής του απόδοσης. Το πορώδες του συνθέτου με περιεκτικότητα σε αερογέλη 25 vol% μετρήθηκε κατά 42,8%, που αυξήθηκε στο 76,6% για το 66% των αερογέλων σε πυρίτιο. Λόγω αύξησης του πορώδους, η συμπιεστική αντοχή του σύνθετου μειώθηκε σε 1,1 MPa από 26,7 MPa. ενώ η πυκνότητα μειώθηκε σε 355 kg/m<sup>3</sup> από 1251 kg/m<sup>3</sup>. Ο συγγραφέας ανέφερε επίσης, ότι η επιφάνεια τροποποίησης από τον παράγοντα σύζευξης σιλανίου KH-550 ελαφρώς μειώνει το πορώδες. Για σύνθετα υλικά με 25 vol% και 66 vol% περιεκτικότητα σε επιφανειακά τροποποιημένο πολτό αερογέλης, μετρήθηκε το πορώδες 40,6% και 72,8%, το οποίο ήταν ελαφρώς χαμηλότερο από το μη τροποποιημένο σύνθετο αερογέλης. Λόγω του χαμηλότερου πορώδους και υψηλότερης συμπιεστικής αντοχής, η αντοχή και η πυκνότητα μετρήθηκαν για τροποποιημένο σύνθετο αερογέλης. Ο Bostanci [1] και οι συνάδελφοί του ανέφεραν στις διάφορες μελέτες τους, ότι η αύξηση της συγκέντρωσης αερογέλης οδηγεί σε αύξηση του πορώδους και μείωση της μέσης διαμέτρου των πόρων. Το σχήμα 2.3 αποτυπώνει, την μηχανική αντοχή του σύνθετου, το πορώδες, το μέσο όγκο της μέσης διαμέτρου των πόρων και τη μέση διάμετρο των πόρων. Το σχήμα 2.3 a) δείχνει ότι η συμπιεστική αντοχή του τσιμεντοειδούς σύνθετου με βάση την αερογέλη μειώνεται με την αύξηση του συνολικού πορώδους. Η εικόνα 2.3 b) και η εικόνα 2.3 c) παρουσιάζουν υψηλότερη συμπιεστική αντοχή. Με την αύξηση του λόγου μέσης διαμέτρου-όγκου πόρων (mm), η συμπιεστική αντοχή του συνθέτου μειώνεται. Ο πιθανός λόγος για τα φαινόμενα αυτά μπορεί να περιγραφεί από τον αυξανόμενο διάμεσο όγκο διαμέτρου πόρων που αύξησε το συνολικό πορώδες του συνθέτου, οδηγώντας σε χαμηλότερες τιμές πυκνότητας και μείωση της συμπιεστικής αντοχής



**Σχήμα 2.3:** Σχέσεις μεταξύ της συμπιεστικής αντοχής και της δομής των πόρων των τσιμεντοειδών σύνθετων υλικών με βάση την αερογέλη [1].

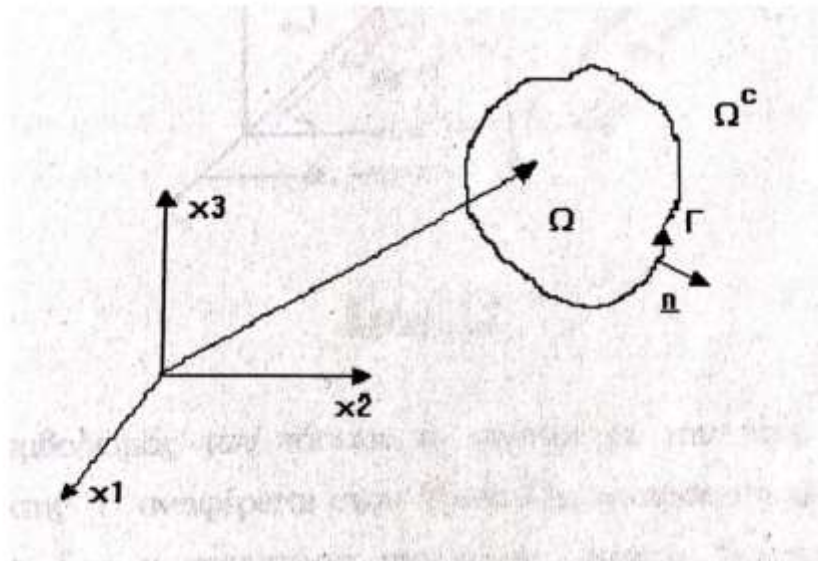
Μια ολοκληρωμένη ανασκόπηση των παραπάνω, δείχνει ότι η ενσωμάτωση της αερογέλης σε σύνθετα υλικά με βάση το τσιμέντο μειώνει τις μηχανικές τους επιδόσεις με την αύξηση της συγκέντρωσής της. Ο λόγος για τη μείωση της δύναμης μπορεί να εξηγηθεί από την εύθραυστη φύση της αερογέλης που δεν μπορεί να αντισταθεί σε αρκετά φορτία υπό πίεση. Επιπλέον, η ενσωμάτωση αερογέλης αυξάνει τον όγκο των πόρων, οδηγώντας σε αύξηση του πορώδους και μείωση της δύναμης. Ωστόσο, παρατηρήθηκε ότι η συμπιεστική αντοχή της αερογέλης στο σύνθετο μπορεί να βελτιστοποιηθεί μειώνοντας την αναλογία νερού-τσιμέντου ή χρησιμοποιώντας νανο-διοξείδιο του πυριτίου, νανοσωλήνες άνθρακα και μεθόδους σκλήρυνσης με ζεστό νερό. Παρατηρήθηκε επίσης, ότι το μέγεθος σωματιδίων αερογέλης και πρόδρομων νημάτων για την παρασκευή αερογέλης δεν επηρεάζει σημαντικά την μηχανική απόδοση του σύνθετου, ενώ η συμπιεστική δύναμη της αερογέλης μπορεί να ποικίλει από την ανάμειξη, τη σύνθεση και τον σχεδιασμό του μείγματος. Σύμφωνα με τη σύσταση CEB/RILEM, η πυκνότητα σκυροδέματος μεταξύ 1600-2000 kg/m<sup>3</sup> θα πρέπει να έχει πάνω από 15 MPa συμπιεστική αντοχή που πρέπει να ληφθεί υπόψη ως δομικό σκυρόδεμα. Αρκετοί συγγραφείς ανέφεραν περισσότερα από 15 MPa συμπιεστικής αντοχής για αερογέλη ενσωματωμένη σε τσιμεντένια σύνθετα υλικά εντός της πυκνότητας των 1600-2000 kg/m<sup>3</sup>.

Ωστόσο, περισσότερο από το 40% της αερογέλης στο τσιμεντένιο σύνθετο μπορεί να μειώσει τη συμπίεστική δύναμη από τις οριακές τιμές που προτείνονται από τις απαιτήσεις της CEB. Οι περισσότερες από τις μελέτες υποδεικνύουν τη χρήση μικρής συγκέντρωσης αερογέλης σε σκυρόδεμα για να το καταστήσει κατάλληλο για δομικό σκυρόδεμα. Αντίθετα, υπάρχουν λίγες μελέτες που η χρήση του 80 vol% της περιεκτικότητας σε αερογέλη μπορεί να μειώσει σημαντικά τη συμπίεστική αντοχή σε 1 MPa.

### 3. ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΙΣΟΤΡΟΠΑ ΚΑΙ ΟΜΟΓΕΝΗ ΜΕΣΑ

#### 3.1. Εισαγωγή στη γραμμική ελαστικότητα για ισότροπα και ομογενή μέσα

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται οι βασικές εξισώσεις που περιγράφουν την ελαστική συμπεριφορά ενός ισότροπου και ομογενούς μέσου στις 3 διαστάσεις. Ο όρος «γραμμική» αναφέρεται α) στη γραμμικότητα μεταξύ των παραμορφώσεων και των μετατοπίσεων και β) στη γραμμικότητα μεταξύ τάσεων και παραμορφώσεων, όπως προέκυψε από τον νόμο του Hooke για ένα ισότροπο ελαστικό μέσο. Ο όρος «στατική» αναφέρεται στο γεγονός, ότι όλα τα βασικά μεγέθη που εμφανίζονται στις εξισώσεις είναι ανεξάρτητα χρόνου. Περισσότερες λεπτομέρειες μπορούν να βρεθούν στο βιβλίο των Timoshenko και Goodier(1970), καθώς και σε διάφορα άλλα κλασικά βιβλία ελαστικότητας.



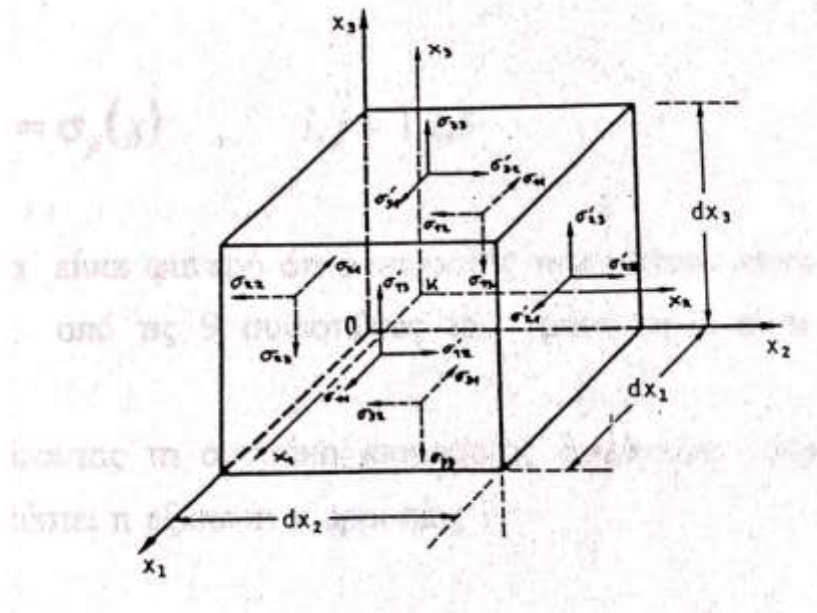
Σχήμα 3.1



Ας θεωρήσουμε ένα στερεό σώμα όγκου  $\Omega$  μέσα στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο με σύνορο  $\Gamma$  και έστω  $\Omega^c$  το συμπληρωματικό χωρίο του  $\Omega$  τέτοιο ώστε  $\Omega \cup \Omega^c \equiv \mathbb{R}^3$ , (Σχήμα 3.1)

Με την παρουσία εξωτερικού αιτίου στο σώμα αναπτύσσεται εντατική και παραμορφωσιακή κατάσταση, η σχέση των οποίων εμφανίζεται στις καταστατικές εξισώσεις, όπως θα δούμε παρακάτω.

Η εντατική κατάσταση σε μια μικρή περιοχή ενός σημείου  $x$  του ελαστικού σώματος περιγράφεται μέσα από έναν ταυυστή δεύτερης τάξης, οι εννέα συνιστώσες του οποίου συμβολίζονται με  $\sigma_{ij}(x)$  και ονομάζονται τάσεις. Οι συνιστώσες του ταυυστή των τάσεων στη γειτονιά του σημείου  $x$  αναπτύσσονται στις πλευρές ενός στοιχειώδους κύβου  $dV = dx_1 dx_2 dx_3$  (Σχήμα 3.2)



**Σχήμα 3.2**

Ο συμβολισμός των τάσεων  $\sigma_{ij}$  γίνεται με την εξής σύμβαση: Ο πρώτος δείκτης  $i$  αναφέρεται στον άξονα  $Ox_i$ , στον οποίο είναι κάθετο το επίπεδο που δρα η συνιστώσα της τάσης, ενώ ο δεύτερος δείκτης  $j$  αναφέρεται στον άξονα  $Ox_j$  την διεύθυνση του οποίου έχει η συγκεκριμένη συνιστώσα.

Η προσήμανση των τάσεων γίνεται ως εξής: Οι ορθές συνιστώσες (αυτές δηλαδή που δρουν σε επίπεδο κάθετο στη διεύθυνση τους) θεωρούνται θετικές εφόσον είναι εφελκυστικές, ενώ είναι αρνητικές εφόσον είναι θλιπτικές. Οι διατμητικές θεωρούνται θετικές όταν δρουν σε θετικό επίπεδο(δηλαδή σε επίπεδο του οποίου το μοναδιαίο κάθετο διάλυσμα διευθύνεται προς τη θετική φορά κάποιου άξονα) και έχουν θετική φορά ή όταν δρουν σε αρνητικό επίπεδο και έχουν αρνητική φορά. Στο σχήμα 3.2 έχουν σχεδιαστεί μόνο θετικές συνιστώσες του τανυστή τάσεων.

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη ισορροπίας ροπών στον στοιχειώδη κύβο  $dV$  προκύπτει :

$$\sigma_{ij}(x) = \sigma_{ji}(x) , i, j = 1,2,3 \dots \dots \dots (3.1)$$

από την οποία προκύπτει, ότι ο τανυστής των τάσεων είναι συμμετρικός και επομένως από τις 9 συνιστώσες μόνο οι 6 είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη ισορροπίας δυνάμεων στον στοιχειώδη κύβο  $dV$  προκύπτει η εξίσωση ισορροπίας :

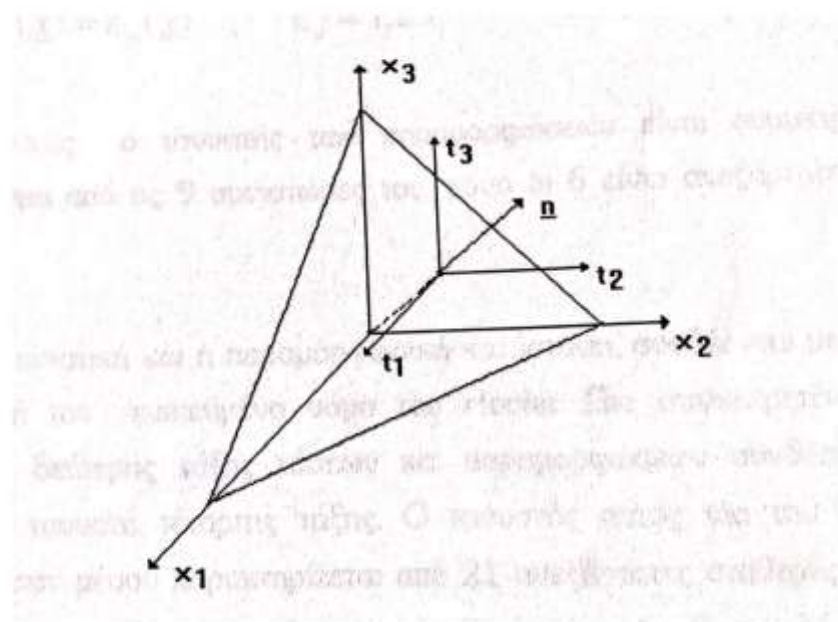
$$\sigma_{ij,j}(x) + b_i(x) = 0 , i, j = 1,2,3 \dots \dots \dots (3.2)$$

όπου  $b_i(x)$  οι συνιστώσες των βαρυτικών δυνάμεων ανά μονάδα μάζας. Από την πλήρη ανάπτυξη της (3.2) προκύπτουν τρεις εξισώσεις, οι οποίες εφράζουν την ισορροπία του στερεού σώματος στις τρεις διαστάσεις του χώρου.

Η προβολή του τανυστή των τάσεων σε ένα σημείο  $x$  μιάς επιφάνειας  $S$  πάνω στο διάλυσμα που είναι κάθετο στην επιφάνεια (Σχήμα 3.3), ονομάζεται διάνυσμα τάσεων ή επιφανειακών φορτίων και δίνεται από τη σχέση :

$$t_i(x) = \sigma_{ij}(x) \cdot n_j(x) , i, j = 1,2,3 \dots \dots \dots (3.3)$$

όπου  $n(x)$  το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια, στο σημείο  $x$



**Σχήμα 3.3**

Η παραμορφωσιακή κατάσταση στη γειτονιά ενός σημείου  $x$  του συνεχούς μέσου, λόγω της ύπαρξης των τάσεων, περιγράφεται μέσα από ένα τανυστή δεύτερης τάξης, οι εννέα συνιστώσες του οποίου συμβολίζονται με  $\epsilon_{ij}(x)$  και ονομάζονται παραμορφώσεις. Σύμφωνα με τις θεωρίες των μικρών παραμορφώσεων και μετατοπίσεων οι συνιστώσες  $\epsilon_{ij}(x)$  δίνονται από τη σχέση :

$$\epsilon_{ij}(x) = \frac{1}{2} (u_{i,j}(x) + u_{j,i}(x)) , i, j = 1,2,3 \dots \dots \dots (3.4)$$

όπου με  $u_i$  συμβολίζουμε τις τρεις συνιστώσες του διανύσματος της μετατόπισης.

Από (3.4) προκύπτει :

$$\epsilon_{ij}(x) = \epsilon_{ji}(x) , i, j = 1,2,3 \dots \dots \dots (3.5)$$

και συνεπώς, ο τανυστής των παραμορφώσεων είναι συμμετρικός με αποτέλεσμα από τις 9 συνιστώσες του, μόνο οι 6 να είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Η εντατική και η παραμορφωσική κατάσταση, συνδέονται μεταξύ τους μέσα από τον γενικευμένο νόμο του Hooke. Πιο συγκεκριμένα, οι δύο τανυστές δεύτερης τάξης τάσεων και παραμορφώσεων συνδέονται μέσα από ένα τανυστή τέταρτης τάξης. Ο τανυστής αυτός για την περίπτωση ανισότροπου μέσου χαρακτηρίζεται από 21 σταθερές, οι οποίες μειώνονται στις 2 για ισότροπο ελαστικό μέσο. Οι δύο αυτές σταθερές είναι γνωστές σαν σταθερές του Lamé και συμβολίζονται με  $\lambda$  και  $\mu$ . Για την περίπτωση του ισότροπου ελαστικού μέσου ο νόμος του Hooke γράφεται :

$$\epsilon_{ij}(x) = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij}, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \dots \dots \dots (3.6)$$

όπου  $\delta_{ij}$  το δέλτα του Kronecker και

$$\epsilon_{kk} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} \dots \dots \dots (3.7)$$

Οι σταθερές Lamé μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει άλλων σταθερών (οι οποίες έχουν το πλεονέκτημα να έχουν κάποια φυσική σημασία), όπως είναι το μέτρο ελαστικότητας  $E$ , το μέτρο διάτμησης  $G$ , ο λόγος Poisson  $\nu$ , καθώς και το μέτρο διόγκωσης  $K$ . Οι σχέσεις μεταξύ των διάφορων ελαστικών σταθερών φαίνονται στον παρακάτω πίνακα :

**Πίνακας 3.1:** Σχέσεις μεταξύ των διάφορων ελαστικών σταθερών.

	$\lambda$	$\mu$	$E$	$\nu$	$K$
$\lambda, \mu$	-	-	$\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$	$\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$	$\frac{3\lambda + 2\mu}{3}$
$\lambda, E$	-	$\frac{A + (E - 3\lambda)}{4}$	-	$\frac{A - (E + \lambda)}{4\lambda}$	$\frac{A + (3\lambda + E)}{6}$
$\lambda, \nu$	-	$\frac{\lambda(1 - 2\nu)}{2\nu}$	$\frac{\lambda(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{\nu}$	-	$\frac{\lambda(1 + \nu)}{3\nu}$
$\lambda, K$	-	$\frac{3(K - \lambda)}{2}$	$\frac{9K(K - \lambda)}{3K - \lambda}$	$\frac{\lambda}{3K - \lambda}$	-
$\mu, E$	$\left(\frac{\mu(2\mu - E)}{E - 3\mu}\right)$	-	-	$\frac{E - 2\mu}{2\mu}$	$\frac{\mu E}{3(3\mu - E)}$
$\mu, \nu$	$\frac{2\mu\nu}{1 - 2\nu}$	-	$2\mu(1 + \nu)$	-	$\frac{2\mu(1 + \nu)}{2(1 - 2\nu)}$
$\mu, K$	$\frac{3K - 2\mu}{3}$	-	$\frac{9K\mu}{3K + \mu}$	$\frac{3K - 2\mu}{2(3K + \mu)}$	-
$E, \nu$	$\frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$	$\frac{E}{2(1 + \nu)}$	-	-	$\frac{E}{3(1 - 2\nu)}$
$K, E$	$\frac{3K(3K - E)}{9K - E}$	$\frac{3EK}{9K - E}$	-	$\frac{3K - E}{6K}$	-
$\nu, K$	$\frac{3K\nu}{1 + \nu}$	$\frac{3K(1 - 2\nu)}{2(1 + \nu)}$	$3K(1 - 2\nu)$	-	-

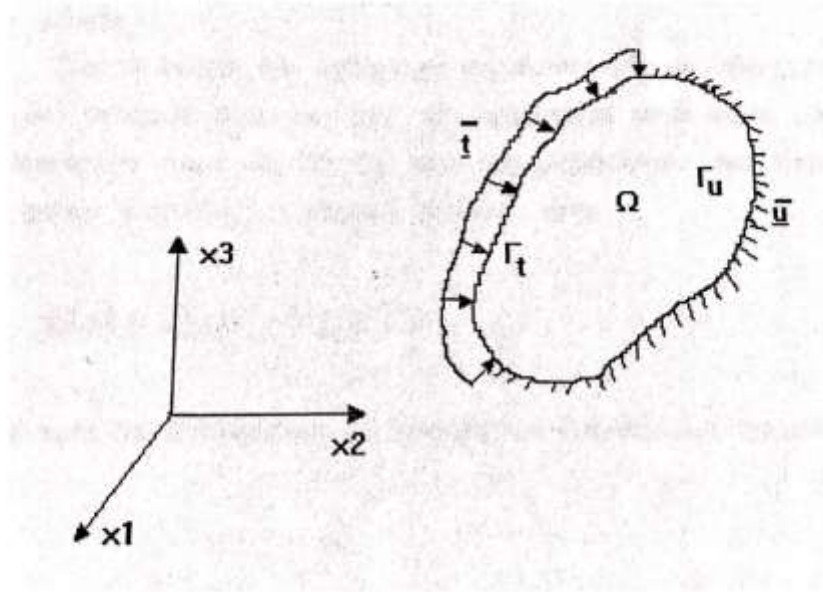
Όπου :  $A = \sqrt{E^2 + 2\lambda E + 9\lambda^2}$

Συνδυάζοντας τις (3.2), (3.4) και (3.6) προκύπτουν οι σχέσεις Navier-Cauchy :

$$(\lambda + \mu)u_{i,ij}(x) + \mu u_{j,ii}(x) + b_j = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots \quad (3.8)$$

Η καλή τοποθέτηση ενός προβλήματος συνοριακών τιμών απαιτεί οι μετατοπίσεις  $u_i$  εκτός από την (3.8) να ικανοποιούν και ένα σύνολο συνοριακών συνθηκών. Η γενική περίπτωση

συνοριακών συνθηκών που μπορεί να επικρατεί σε ένα ελαστικό μέσο φαίνεται στο σχήμα 3.4



**Σχήμα 3.4**

Στο  $\Gamma_t$  τμήμα του συνόρου  $\Gamma$  θεωρούνται γνωστές οι επιφανειακές δυνάμεις και άρα η λεγόμενη ‘φυσική’ συνοριακή συνθήκη είναι :

$$t_i(x) = \bar{t}_i(x) \quad \forall x \in \Gamma_t \dots \dots \dots (3.9)$$

όπου  $t_i$  γνωστά επιφανειακά φορτία  
 Συνδιάζοντας τις (3.3) και (3.9) προκύπτει :

$$t_i = \sigma_{ij} \cdot n_j = \bar{t}_i, \quad i, j = 1, 2, 3 \dots \dots \dots (3.10)$$

Η συνθήκη (3.10) υποδηλώνει ότι οι εφαρμοζόμενες δυνάμεις βρίσκονται σε ισορροπία με τις συνιστώσες των επιφανειακών δυνάμεων, που προκύπτουν από τις αντίστοιχες των τάσεων προβαλλόμενες στο επίπεδο.

Όσον αφορά την εφαρμογή της συνοριακής συνθήκης στο τμήμα  $\Gamma_u$  του συνόρου, είναι πιο απλό να εφαρμοστεί αυτή στους όρους των μετατοπίσεων παρά σε αυτούς των παραμορφώσεων και επομένως η λεγόμενη 'ουσιώδης' συνοριακή συνθήκη είναι :

$$u_i(x) = \bar{u}_i(x) \quad \forall x \in \Gamma_u \dots \dots \dots (3.11)$$

όπου  $u_i$  οι προκαθορισμένες συνιστώσες του διανύσματος μετατόπισης.

## 4. ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΚΑΙ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΜΕΘΟΔΟΥ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

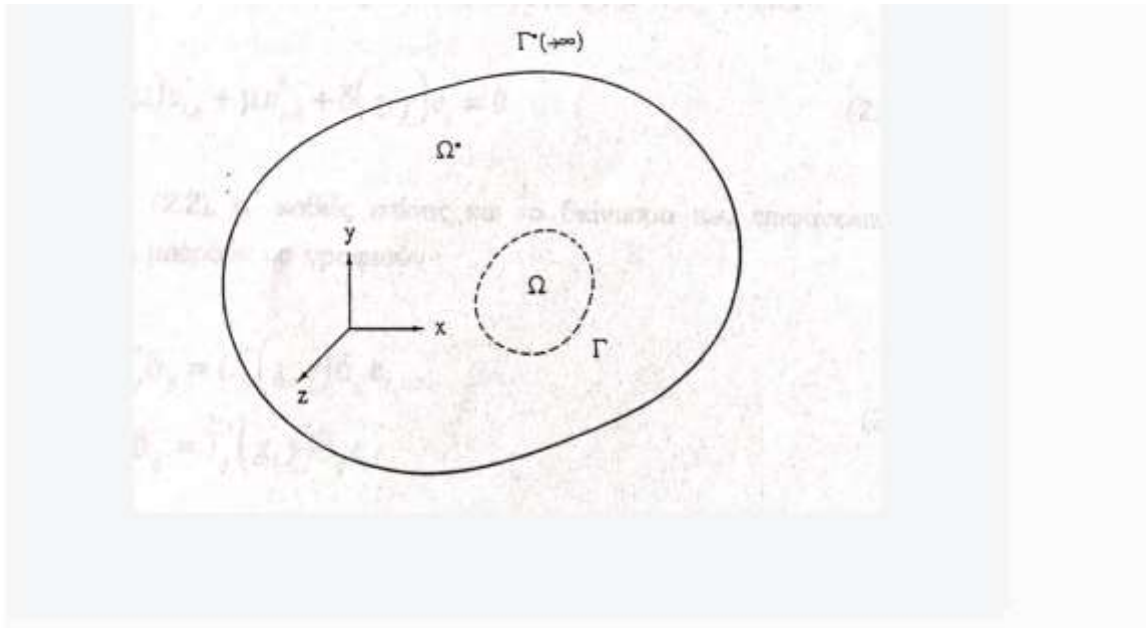
### 4.1 Ολοκληρωτική αναπαράσταση του προβλήματος συνοριακών τιμών

Οι διατυπώσεις των συνοριακών στοιχείων μπορούν γενικά να διαιρεθούν σε δύο διαφορετικές κατηγορίες, την «άμεση» και την «έμμεση». Στην «άμεση» οι άγνωστες συναρτήσεις που παρουσιάζονται στη διατύπωση είναι πραγματικές φυσικές ποσότητες του προβλήματος, όπως για παράδειγμα στην ελαστικότητα οι μετατοπίσεις και τα επιφανειακά φορτία. Αντίθετα, στην «έμμεση» οι άγνωστες συναρτήσεις παριστάνονται από ποσότητες χωρίς φυσική σημασία, τις οποίες πρέπει κανείς να ολοκληρώσει για να προκύψουν οι αντίστοιχες πραγματικές ποσότητες. Στις διατυπώσεις αυτές μπορούμε να καταλήξουμε με αρκετούς μαθηματικούς τρόπους, όπως με τη χρήση του θεωρήματος της αμοιβαιότητας, της θεωρίας των μεταβολών ή μιας συναρτησιακής διατύπωσης παρόμοιας με αυτής που χρησιμοποιείται για τη διατύπωση της αριθμητικής μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Στην ανάλυση που ακολουθεί χρησιμοποιείται η «άμεση» διατύπωση με τη χρήση του θεωρήματος αμοιβαιότητας του Betti (Betti's reciprocal theorem). Περισσότερες λεπτομέρειες για όλες τις διατυπώσεις μπορούν να βρεθούν στα βιβλία των Manolis and Beskos (1988) και των Brebbia and Dominguez (1989).

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις από το κεφάλαιο 3, εύκολα προκύπτει το θεώρημα αμοιβαιότητας του Betti, με βάση το οποίο γίνεται η απόδειξη της ολοκληρωτικής αναπαράστασης του προβλήματος των συνοριακών τιμών. Η διατύπωση του θεωρήματος είναι η εξής :

Έστω ένα χωρίο  $\Omega$  με σύνορο  $\Gamma$  στο οποίο με επιβολή εξωτερικής φόρτισης επικρατεί μια ελαστοστατική κατάσταση που περιγράφεται από τα μεγέθη  $u_i, t_i, b_i$  και έστω ένα άλλο χωρίο  $\Omega^*$  με σύνορο  $\Gamma^*$  το οποίο περιέχει το  $\Omega$  (Σχήμα 4.1) και στο οποίο αναπτύσσεται μια δεύτερη κατάσταση που περιγράφεται από τα μεγέθη  $u_i^*, t_i^*, b_i^*$  όπου  $u_i, t_i, b_i$  τα διανύσματα αντίστοιχα των μετατοπίσεων των επιφανειακών δυνάμεων και των πεδιακών δυνάμεων. Οι ελαστικές ιδιότητες και στα δύο χωρία θεωρούνται οι ίδιες.





**Σχήμα 4.1**

Το θεώρημα αμοιβαιότητας συνδέει τις δύο αυτές ελαστοστατικές καταστάσεις σύμφωνα με τη σχέση :

$$\int_{\Omega} b_i^* t_i \, d\Omega + \int_{\Gamma} t_i^* b_i \, d\Gamma = \int_{\Omega} b_i u_i^* \, d\Omega + \int_{\Gamma} t_i u_i^* \, d\Gamma \dots \dots \dots (4.1)$$

Η θεμελιώδης λύση ή η λεγόμενη μερικές φορές συνάρτηση Green, σε ένα σημείο  $y$ , προκύπτει από τη λύση της εξίσωσης Navier (3.8), εφαρμόζοντας στο σημείο  $x$  μοναδιαία σημειακή δύναμη. Έτσι, ο όρος των πεδριακών δυνάμεων γίνεται :

$$b_j = \delta(x, y) e_j \dots \dots \dots (4.2)$$

όπου  $\delta$  η συνάρτηση Dirac και  $e_j$  οι τρεις συνιστώσες της μοναδιαίας φόρτισης που έχει επιβληθεί.

Άρα η εξίσωση Navier-Cauchy αντικαθιστώντας την (4.2) γίνεται :

$$(\lambda + \mu) u_{i,jj}^* + \mu u_{j,ii}^* + \delta(x, y) e_j \dots \dots \dots (4.3)$$

Η λύση της (4.2),  $u_i^*$  καθώς επίσης και το διάνυσμα των επιφανειακών δυνάμεων  $t_i^*$ , μπορούν να γραφούν :

$$\begin{aligned} u_i^* &= u_j^* \delta_{ij} = U_{ij}^*(x,y) \delta_{ij} e_i \\ t_i^* &= t_j^* \delta_{ij} = T_{ij}^*(x,y) \delta_{ij} e_i \dots \dots \dots (4.4) \end{aligned}$$

όπου  $U_{ij}^*$   $T_{ij}^*$  οι θεμελιώδεις των μετατοπίσεων και των επιφανειακών φορτίων, οι οποίες εκφράζουν την  $i$  συνιστώσα της μετατόπισης ή του επιφανειακού φορτίου αντίστοιχα, στο σημείο  $y$  εξαιτίας της μοναδιαίας δύναμης που εφαρμόζεται στο σημείο  $x$  και τη διεύθυνση  $j$ .

Οι όροι των θεμελιωδών λύσεων δίνονται από τις παρακάτω εκφράσεις :

$$U_{ij}^* = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} [(3 - 4\nu)\delta_{ij} + r_i r_j] \dots \dots \dots (4.5)$$

$$T_{ij}^* = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} [(\eta_k r_k)[(1 - 2\nu)\delta_{ij} + 3r_i r_j] + (1 - 2\nu)[n_i r_j - n_j r_i] \dots \dots \dots (4.6)$$

Σε όλες τις παραπάνω σχέσεις, οι δείκτες  $i, j, k$  παίρνουν τις τιμές 1, 2, 3, όπου  $\delta_{ij}$  είναι το δέλτα του Kronecker,  $n_i$  συνιστώσες του μοναδιαίου κάθετου,  $r$  είναι η απόσταση μεταξύ των σημείων  $x$  και του  $y$  και του  $r_i$  υποδηλώνει παραγωγή του  $r$  ως προς την  $i$  συνιστώσα του σημείου  $x$ , δηλαδή :

$$r_i = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} (\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}) = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = \frac{x_i}{r} \dots \dots \dots (4.7)$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα αμοιβαιότητας του Betti, σχέση (4.1), τις θεμελιώδεις λύσεις από την (4.4), τις ιδιότητες Dirac αμελώντας τις βαρυτικές δυνάμεις, και βάζοντας στην (4.1)  $U_{ij}^*$  και  $T_{ij}^*$  στις θέσεις των  $u_i^*$  και  $t_i^*$  προκύπτει η ολοκληρωτική αναπαράσταση του προβλήματος ή η λεγόμενη ταυτότητα Somigliana :

$$\int_{\Gamma} U_{ij}^*(x, y) t_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} T_{ij}^*(x, y) u_j(x, y) d\Gamma(x) = \begin{cases} 0, & \forall y \in \Omega^c \\ u_i(x), & \forall x \in \Gamma \end{cases} \dots (4.8)$$

η οποία δίνει την μετατόπιση σε ένα οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο του σώματος, λαμβάνοντας ως δεδομένες τις μετατοπίσεις και τα επιφανειακά φορτία όλων των σημείων του συνόρου.

Για την επίλυση του γενικού προβλήματος συνοριακών τιμών της στατικής ελαστικότητας, πρέπει να παραχθεί η λεγόμενη συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση η οποία συσχετίζει τις μετατοπίσεις και τα επιφανειακά φορτία των σημείων του συνόρου. Αυτό γίνεται ακολουθώντας μια συνήθη οριακή διαδικασία, όπου ένα εσωτερικό σημείο του σώματος πλησιάζει στο σύνορο. Έτσι αντικαθιστώντας στην (4.8) προκύπτει η συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση :

$$C_{ij}(y) u_j(y) = \int_{\Gamma} U_{ij}^*(x, y) t_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} T_{ij}^*(x, y) u_j(x) d\Gamma(x), \forall x, y \in \Gamma \dots (4.9)$$

Ο  $C_{ij}$  είναι ένας τανυστής οποίος εξαρτάται από την τοπική γεωμετρία του σημείου  $y$  στο οποίο αναφέρεται, και δίνεται από την σχέση :

$$C_{ij}(y) = \delta_{ij} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} T_{ij}^*(x, y) d\Gamma(x) \right\} \dots (4.10)$$

όπου  $\Gamma_\varepsilon$  είναι η επιφάνεια της σφαίρας με ακτίνα  $\varepsilon$  που περιέχει το σημείο  $y$ . Για ομαλό σύνορο η (4.8) δίνει :

$$C_{ij}(y) = \begin{cases} 1 & \forall y \in \Gamma \\ 0.5\delta_{ij} & \forall y \in \Gamma \\ 0 & \forall y \notin \Omega \cup \Gamma \end{cases} \dots (4.11)$$

όπου  $\delta_{ij}$  το  $\delta$  του Kronecker

Έχοντας πλέον γνωστές τις συνοριακές τιμές των μετατοπίσεων και των επιφανειακών φορτίων, είναι δυνατό με τη χρήση της (4.8) να βρεθούν οι μετατοπίσεις και τα επιφανειακά φορτία σε οποιοδήποτε σημείο  $y$  του σώματος.

## 4.2 Ολοκληρωτική αναπράσταση για τις τάσεις

Ο τανυστής των τάσεων παίρνοντας τις γενικευμένες παραγώγους (gradients των μετατοπίσεων από την (4.8) και εισάγοντας αυτές στον γενικευμένο νόμο του Hooke (3.6) Έτσι με αντικατάσταση προκύπτει :

$$\sigma_{ik} = \int_{\Gamma} \left[ \lambda \delta_{ik} \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial x_i} + \mu \left( \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial x_k} + \frac{\partial u_{kj}^*}{\partial x_i} \right) \right] t_j d\Gamma - \int_{\Gamma} \lambda \delta_{ik} \left[ \frac{\partial T_{ij}^*}{\partial y_1} + \mu \left( \frac{\partial T_{ij}^*}{\partial y_k} + \frac{\partial T_{kj}^*}{\partial y_i} \right) \right] u_j d\Gamma \dots (4.12)$$

Εάν

$$U_{ikj}^* = \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial y_k} \text{ και } T_{ikj}^* = \frac{\partial T_{ikj}^*}{\partial y_k} \dots (4.13)$$

Τότε :

$$U_{ikj}^* = \frac{1}{16\pi(1-\nu)\mu r^2} \left[ (3 - 4\nu)r_k \delta_{ij} - r_j \delta_{ki} - r_i \delta_{jk} + 3r_i r_j r_k \right] \dots (4.14)$$

$$T_{ikj}^* = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^3} \left[ 3n_1 r_1 (1 - 2\nu) \delta_{ij} r_k - \delta_{ik} r_j - \delta_{jk} r_i + 5r_i r_j r_k \right] - 3n_k r_i r_j + (1 - 2\nu) \left[ 3n_i r_j r_k - 3n_j r_i r_k - n_i \delta_{jk} + n_j \delta_{ik} - n_k \delta_{ij} \right] \dots (4.15)$$

και αντικαθιστώντας τις (4.14) και (4.15) στην (4.12) προκύπτει :

$$\sigma_{ik}(y) = \int_{\Gamma} U_{0ikj}^* t_j d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} T_{0ikj}^* u_j d\Gamma(x) \dots (4.16)$$

όπου οι θεμελιώδεις λύσεις των τάσεων  $U_{0ikj}^*$  και  $T_{0ikj}^*$  δίνονται πλέον από τις σχέσεις :

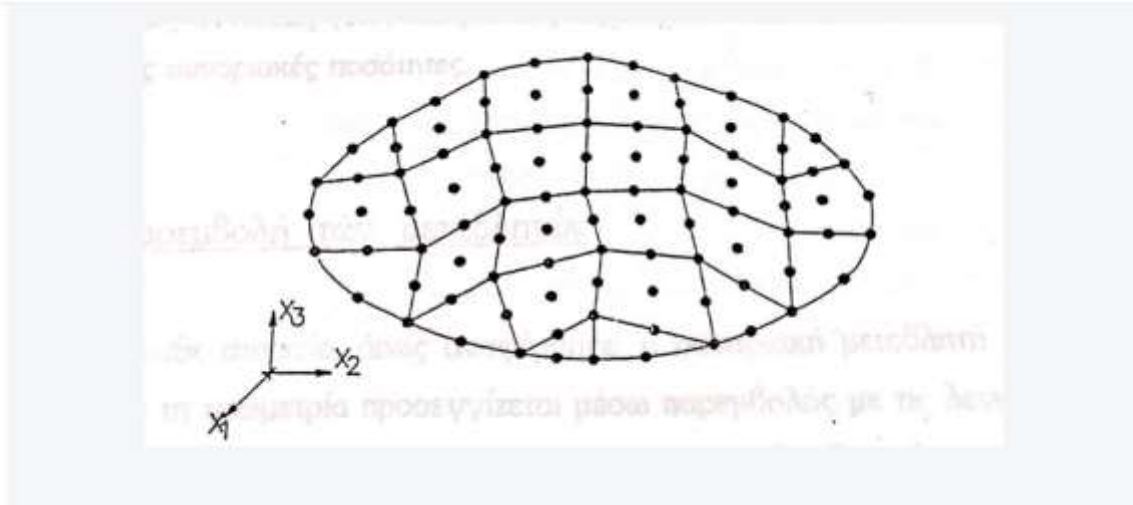
$$U0_{ikj}^* = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} [(1 - 2\nu)(\delta_{ik}r_j + \delta_{ij}r_k - \delta_{kj}r_i) + 3r_i r_k r_j] \dots \dots \dots (4.17)$$

$$T0_{ikj}^* = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^3} [3n_1 r_1 (1 - 2\nu) \delta_{kj} r_i + \nu(\delta_{ki} + r_j + \delta_{ij} r_k) - 5r_i r_j r_k + 3\nu(n_k r_i r_j + n_j r_i r_k) + (1 - 2\nu)(3n_i r_j r_k + n_j \delta_{ik} + n_k \delta_{ij}) - (1 - 4\nu)n_i \delta_{jk}] \dots \dots \dots (4.18)$$

### 4.3 Διακριτοποίηση

Οι ολοκληρωτικές συνοριακές εξισώσεις (4.9) έχουν αναλυτική λύση μόνο για απλές γεωμετρικές και συνοριακές συνθήκες. Στη γενική περίπτωση όμως, η αναλυτική επίλυση είναι αδύνατη. Για το λόγο αυτό απαιτείται αριθμητική επίλυση.

Όπως είναι γνωστό, οι αριθμητικές μέθοδοι επιδιώκουν προσεγγιστική λύση υποβιβάζοντας τον άπειρο βαθμό ελευθερίας της εξίσωσης που διέπει το πρόβλημα, σε διακριτό βαθμό. Για το σκοπό αυτό στη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων το σύνορο  $\Gamma$  του υπό εξέταση σώματος, διακριτοποιείται σε ένα αριθμό στοιχείων, τα οποία αποτελούνται από κόμβους (Σχήμα 4.1). Με τον τρόπο αυτό, η τιμή κάθε μεταβλητής της εξίσωσης (στη συγκεκριμένη οι μετατοπίσεις, τα επιφανειακά φορτία, καθώς και η γεωμετρία) σε οποιοδήποτε σημείο του συνόρου, το οποίο ανήκει σε συγκεκριμένο στοιχείο, προσεγγίζεται μέσω παρεμβολής, συναρτήσε των τιμών της μεταβλητής πάνω στους κόμβους του στοιχείου.



**Σχήμα 4.1**

Έτσι, αν θεωρηθεί ότι το σύνορο χωρίζεται σε  $N$  στοιχεία δηλαδή :

$$\Gamma = \sum_{n=1}^N \Gamma_n \dots \dots \dots (4.19)$$

Τότε η (2.9) γίνεται :

$$C_{ij}(y)u_j(y) = \sum_{n=1}^N \int_{\Gamma_n} U_{ij}^*(x,y)t_j d\Gamma(x) - \sum_{n=1}^N \int_{\Gamma_n} T_{ij}^*(x,y)u_j d\Gamma(x) \dots \dots \dots (4.20)$$

Γράφοντας την (4.20) για όλους τους κόμβους των στοιχείων προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων, το οποίο εφόσον εφαρμοστούν οι συνοριακές συνθήκες (3.9) και (3.11) μπορεί να επιλυθεί δίνοντας όλες τις άγνωστες συνοριακές ποσότητες.

#### 4.4. Παρεμβολή των μεταβλητών

Σε κάθε στοιχείο, όπως αναφέρθηκε, η συνοριακή μεταβλητή  $x$  που περιγράφει τη γεωμετρία προσεγγίζεται μέσω παρεμβολής με τις λεγόμενες «συναρτήσεις σχήματος» (shape functions) με τον ακόλουθο τρόπο :

$$x = \sum_{\alpha=1}^A M^{\alpha} x^{\alpha} \dots\dots\dots(4.21)$$

όπου,  $M^{\alpha}$  οι συναρτήσεις σχήματος,  $A$  ο αριθμός τους, γεγονός που σημαίνει ότι προσεγγίζεται με πολυώνυμο  $A-1$  βαθμού, και  $x^{\alpha}$  οι γεωμετρικές επικόμβιες τιμές των συντεταγμένων.

Όμοια προσεγγίζονται το διάνυσμα της μετατόπισης και του επιφανειακού φορτίου με τις λεγόμενες «συναρτήσεις παρεμβολής» (interpolation functions) με τον ακόλουθο τρόπο :

$$u = \sum_{\beta=1}^B N^{\beta} u^{\beta}$$
$$t = \sum_{\beta=1}^B N^{\beta} t^{\beta} u^{\beta} \dots\dots\dots(4.22)$$

όπου,  $N^{\beta}$  οι συναρτήσεις παρεμβολής,  $B$  ο αριθμός τους, γεγονός που σημαίνει ότι προσεγγίζονται με πολυώνυμο  $B-1$  βαθμού, και  $u^{\beta}, t^{\beta}$  οι συναρτησιακές επικόμβιες τιμές της μετατόπισης και του επιφανειακού φορτίου αντίστοιχα αντίστοιχα. Αν  $A=B$  τότε η διατύπωση ονομάζεται ως ισοπαραμετρική, αν  $A>B$  υπερπαραμετρική, και αν  $A<B$  υποπαραμετρική. Στην παρούσα ανάλυση, η διατύπωση είναι ισοπαραμετρική.

Όπως αναφέρθηκε, οι συναρτήσεις σχήματος αναφέρονται στους γεωμετρικούς κόμβους, ενώ οι συναρτήσεις παρεμβολής αναφέρονται στους συναρτησιακούς κόμβους. Οι ακραίοι γεωμετρικοί κόμβοι βρίσκονται στα όρα του στοιχείου, ενώ οι αντίστοιχοι συναρτησιακοί υπάρχει περίπτωση να βρίσκονται στο εσωτερικό αυτού. Στην περίπτωση όπου τα δύο είδη κόμβων συμπίπτουν το στοιχείο ονομάζεται συνεχές και προφανώς  $N^{\alpha}=M^{\alpha}$ , ενώ διαφορετικά ονομάζεται ασυνεχές. Με τη χρήση ασυνεχών στοιχείων επιτυγχάνεται να οριστούν συνοριακές συνθήκες, όπως είναι αυτές που αλλάζουν σημειακά, να οριστεί το μοναδιαίο κάθετο σε γωνίες ή σε διεπιφάνειες υποχωρίων και καθώς επίσης να προσεγγιστεί με ικανοποιητικό τρόπο το τασικό πεδίο κοντά σε ρωγμές.

Οι συναρτήσεις σχήματος και παρεμβολής για επιφανειακά συνοριακά στοιχεία (δισδιάστατα) παράγονται με ένα απλό πολλαπλασιασμό μονοδιάστατων. Για το λόγο αυτό, θα οριστούν αρχικά οι αντίστοιχες συναρτήσεις των μονοδιάστατων στοιχείων.

#### **4.5. Συναρτήσεις σχήματος και παρεμβολής για μονοδιάστατα στοιχεία**

Οι συναρτήσεις σχήματος και παρεμβολής γενικά να είναι πολυώνυμα οποιασδήποτε μορφής. Στην παρούσα διατύπωση είναι συναρτήσεις που προκύπτουν από τα πολυώνυμα Lagrange. Αυτά ορίζονται ως προς μια αδιάστατη συντεταγμένη  $\xi$ , η οποία αναφέρεται σε τοπικό σύστημα του κάθε στοιχείου, παίρνει τιμές στο διάστημα  $-1 \leq \xi \leq 1$  και δίνονται από τη σχέση :

$$\Phi^\alpha(\xi) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq \alpha}}^A \frac{\xi - \xi_i}{\xi_\alpha - \xi_i} \dots \dots \dots (4.23)$$

όπου  $A-1$  ο βαθμός του πολυώνυμου και  $\xi_i$  η τιμή της  $\xi$  στον  $i$  κόμβο. Τα πολυώνυμα Lagrange έχουν τις εξής ιδιότητες :

$$\Phi^\alpha(\xi_\beta) = \delta_{\alpha\beta}.$$

$$\sum_{\alpha=1}^A \Phi^\alpha(\xi) = 1 \text{ και } \sum_{\alpha=1}^A \frac{d\Phi^\alpha}{d\xi} = 0 \dots \dots \dots (4.24)$$

Για πολυωνυμική προσέγγιση δευτέρου βαθμού χρησιμοποιούνται τα πολυώνυμα Lagrange τα οποία με βάση (4.23) είναι :



$$\Phi^1(\xi) = \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} \frac{\xi - \xi_3}{\xi_1 - \xi_3}$$

$$\Phi^2(\xi) = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} \frac{\xi - \xi_3}{\xi_2 - \xi_3} \tag{4.25}$$

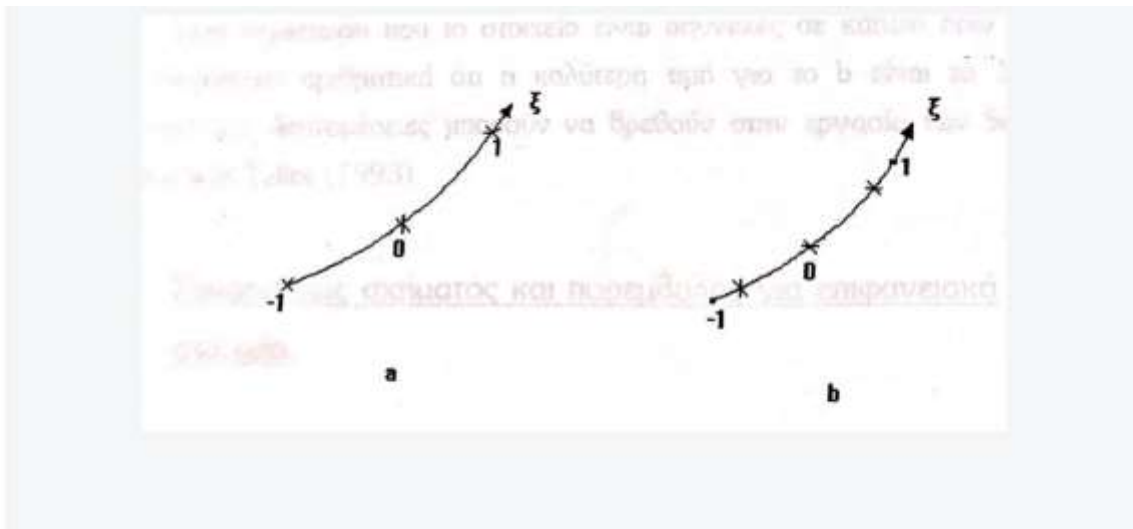
$$\Phi^3(\xi) = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_3 - \xi_1} \frac{\xi - \xi_2}{\xi_3 - \xi_2}$$

Στις συναρτήσεις σχήματος M, οι ακραίοι γεωμετρικοί κόμβοι βρίσκονται στα όρια του στοιχείου (Σχήμα 4.2) και επομένως αυτές προκύπτουν από την (3.7) αντικαθιστώντας  $\xi_1 = -1$ ,  $\xi_2 = 0$  και  $\xi_3 = 1$

$$M^1(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)$$

$$M^2(\xi) = 1 - \xi^2 \tag{4.26}$$

$$M^3(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)$$



Σχήμα 4.2

Σε αντίθεση στις συναρτήσεις παρεμβολής  $N$  οι ακραίοι συναρτησιακοί κόμβοι δεν βρίσκονται απαραίτητα και στα όρια του στοιχείου, αλλά μπορεί να είναι στο εσωτερικό αυτού απέχοντας από το  $i$  όριο απόσταση  $b_i$  (Σχήμα 4.2). Στην περίπτωση των συνεχών στοιχείων είναι  $b_i = 0$  και προφανώς οι συναρτήσεις παρεμβολής και σχήματος συμπίπτουν. Έτσι αντικαθιστώντας στις (4.25) όπου  $\xi_1 = -\alpha_1, \xi_2 = 0$  και  $\xi_3 = \alpha_2$  όπου  $\alpha_i = 1 - b_i$  προκύπτουν οι συναρτήσεις παρεμβολής :

$$N^1(\xi) = \frac{\xi}{\alpha_1} \frac{\xi - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

$$N^2(\xi) = \frac{\xi - \alpha_1}{\alpha_1} \frac{\xi - \alpha_2}{\alpha_2} \tag{4.27}$$

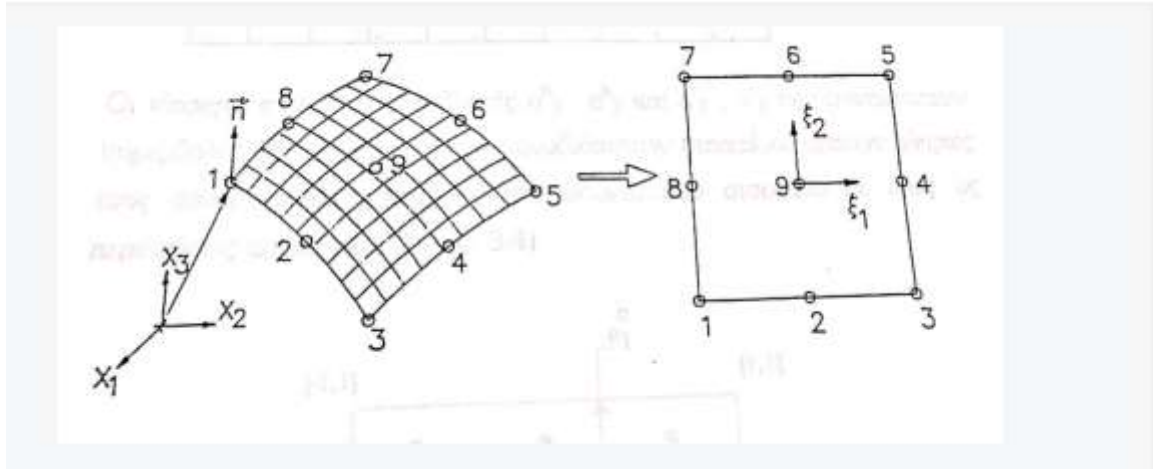
$$N^3(\xi) = \frac{\xi}{\alpha_2} \frac{\xi - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}$$

Στην περίπτωση που το στοιχείο είναι ασυνεχές σε κάποιο όριο του έχει αποδειχτεί αριθμητικά ότι η καλύτερη τιμή για το  $b$  είναι το  $1/3$ . Περισσότερες λεπτομέρειες μπορούν να βρεθούν στην εργασία των Silva, Wrobel and Telles (1993).

#### **4.4. Συναρτήσεις σχήματος και παρεμβολής για επιφανειακά στοιχεία**

Λόγω του πλεονεκτήματος που παρουσιάζει η μέθοδος των συνοριακών συνθηκών να υποβιβάζει κατά ένα τη διάσταση του προβλήματος, χρησιμοποιούνται, για προβλήματα δύο διαστάσεων μονοδιάστατα στοιχεία, ενώ για προβλήματα τριών διαστάσεων δισδιάστατα στοιχεία. Τα επιφανειακά στοιχεία που χρησιμοποιούνται στην παρούσα διατύπωση είναι τετράπλευρα και οι μεταβλητές προσεγγίζονται με πλήρη πολυώνυμα δευτέρου βαθμού. Αυτό σημαίνει ότι κάθε στοιχείο αποτελείται από εννέα κόμβους. (Σχήμα 4.3).

Στα δισδιάστατα στοιχεία, όπως είναι προφανές, τα πολυώνυμα Lagrange είναι συνάρτηση δύο αδιάστατων μεταβλητών  $\xi$ , οι οποίες παίρνοντας τιμές στο διάστημα  $[-1,1]$  αναπαριστούν το επιφανειακό στοιχείο από το φυσικό σύστημα σε ένα μοναδιαίο τετράγωνο στο τοπικό σύστημα του (Σχήμα 4.4)



**Σχήμα 4.4**

Οι εννέα συναρτήσεις σχήματος και παρεμβολής για τα συγκεκριμένα στοιχεία που χρησιμοποιούνται μπορούν πολύ εύκολα να παραχθούν σαν γινόμενο από τις αντίστοιχες των μονοδιάστατων (4.26), (4.27) σύμφωνα με τις σχέσεις :

$$M^a(\xi, \eta) = M^b(\xi) * M^c(\eta)$$

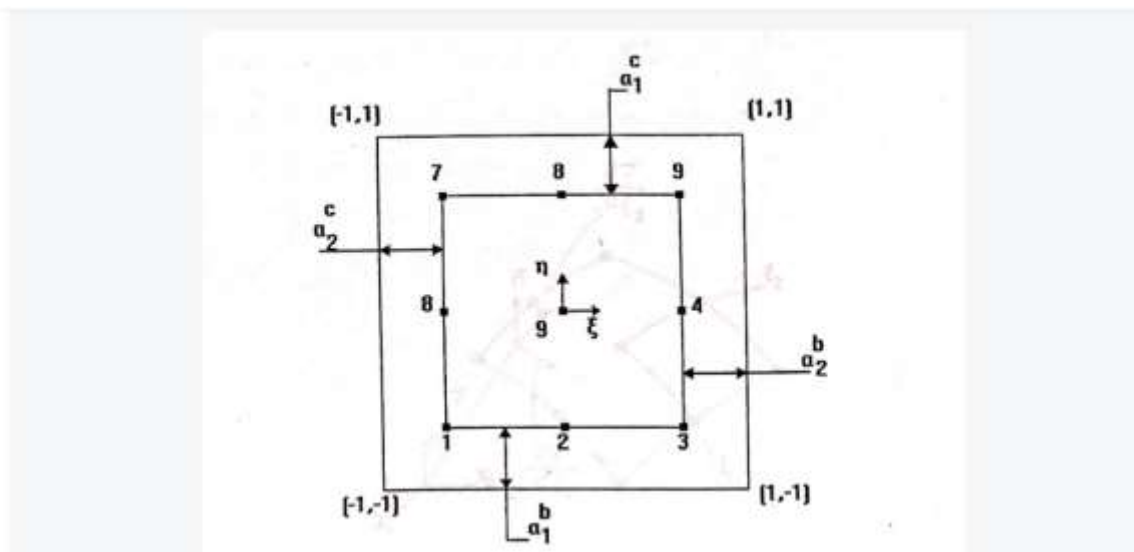
$$N^a(\xi, \eta) = N^b(\xi) * N^c(\eta) \tag{4.28}$$

όπου οι δείκτες  $a, b, c = 1,9$  παίρνουν τιμές από τον παρακάτω πίνακα :

**Πίνακας 4.1**

<b>a</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>
<b>b</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>2</b>
<b>c</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>2</b>

Οι τέσσερις συνολικά συντελεστές  $a^{b_1}$ ,  $a^{b_2}$ , και  $a^{c_1}$ ,  $a^{c_2}$  των συναρτήσεων παρεμβολής  $N^b(\xi)$  και  $N^c(\xi)$  των μονοδιάστατων στοιχείων, ορίζουν πλήρως τους συναρτησιακούς κόμβους του δισδιάστατου στοιχείου σε όλες τις περιπτώσεις ασυνέχειας (Σχήμα 4.5)



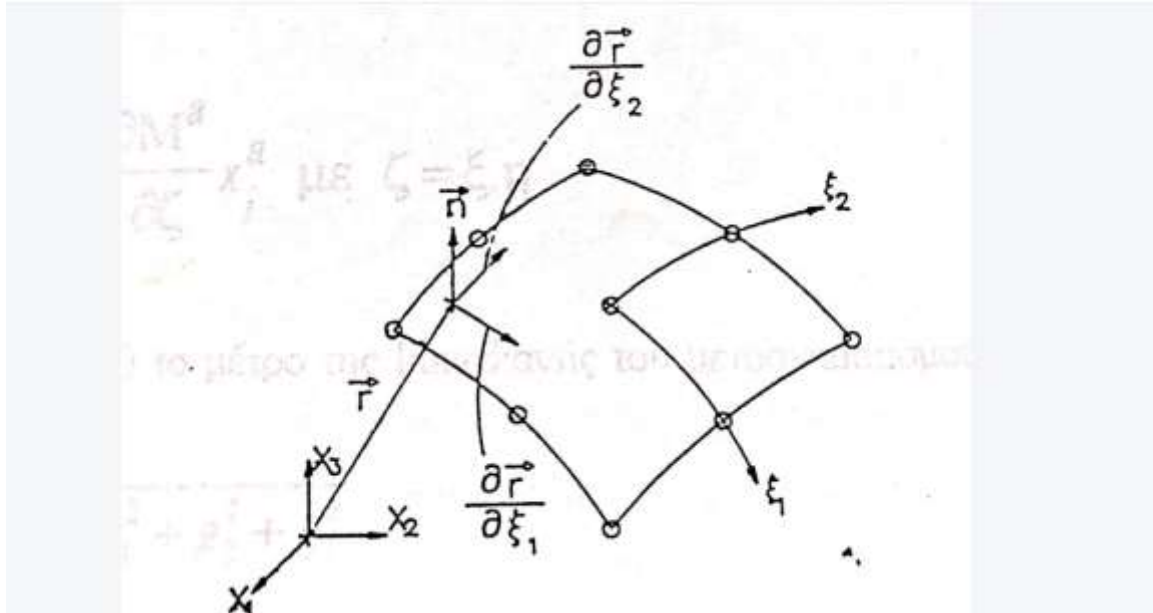
**Σχήμα 4.5**

Συνολικά για όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των τιμών των παραπάνω συντελεστών οι συναρτησιακοί κόμβοι μπορεί να βρίσκονται σε 16 διαφορετικές θέσεις.

#### **4.7. Μετασχηματισμός συντεταγμένων**

Για να ανεξαρτητοποιηθούν τα όρια των ολοκληρωμάτων των όρων των συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων από τη γεωμετρία του εκάστοτε στοιχείου, και να γίνει έτσι η αριθμητική ολοκλήρωση μια επαναληπτική διαδικασία, αυτή γίνεται στο τοπικό σύστημα του στοιχείου με συντεταγμένες  $\xi, \eta$ . Έτσι το διαφορικό της επιφάνειας  $d\Gamma$  (Σχήμα 4.6) το οποίο είναι εκφρασμένο στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων δηλαδή  $d\Gamma = dx_1 dx_2 dx_3$

πρέπει να μετασχηματιστεί στο τοπικό σύστημα και να εκφραστεί σε συνάρτηση των  $d\xi$  των  $d\eta$ .



Σχήμα 4.6

Ο μετασχηματισμός αυτός γίνεται σύμφωνα με τη σχέση :

$$d\Gamma = \left| \frac{\partial r}{\partial \xi} \times \frac{\partial r}{\partial \eta} \right| d\xi d\eta = |G| d\xi d\eta \dots \dots \dots (4.29)$$

όπου  $G$  είναι η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού και  $|G|$  το μέτρο αυτής. Λαμβάνοντας υπόψη, ότι το διάνυσμα  $r$  έχει καρτεσιανές συντεταγμένες  $x_1, x_2, x_3$  η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού είναι :

$$\frac{\partial r}{\partial \xi} \times \frac{\partial r}{\partial \eta} = \begin{cases} \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \frac{\partial x_3}{\partial \eta} - \frac{\partial x_3}{\partial \xi} \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi} \frac{\partial x_1}{\partial \eta} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \frac{\partial x_3}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \frac{\partial x_2}{\partial \eta} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \frac{\partial x_1}{\partial \eta} \end{cases} = \begin{cases} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{cases} \dots \dots \dots (4.30)$$

όπου οι μερικές παράγωγοι σύμφωνα με την (3.3) γίνονται :

$$\frac{\partial x_i}{\partial \zeta} = \frac{\partial M^a}{\partial \zeta} x_i^a \text{ με } \zeta = \xi, \eta$$

Από την (4.30) το μέτρο της Ιακωβιανής του μετασχηματισμού είναι :

$$|G| = \sqrt{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2} \dots \dots \dots (4.31)$$

Όπως φαίνεται από τις παραπάνω σχέσεις, το μέτρο της Ιακωβιανής είναι χαρακτηριστικό του κάθε στοιχείου και για τον υπολογισμό του απαιτούνται οι πρώτες παράγωγοι των συναρτήσεων σχήματος ως προς τις τοπικές συντεταγμένες των γεωμετρικών κόμβων.

#### **4.8. Δημιουργία συστήματος εξισώσεων**

Η διακριτοποιημένη συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση (4.20) με βάση τις σχέσεις των συναρτήσεων παρεμβολής (4.22) και τον μετασχηματισμό συντεταγμένων (4.29) μπορεί να γραφτεί :

$$c_{ij}(y)u_j(y) = \sum_{n=1}^N \sum_{a=1}^A Q_{ij}^{na} \cdot t_j^{na} - \sum_{n=1}^N \sum_{a=1}^A P_{ij}^{na} \cdot u_j^{na} \dots \dots \dots (4.32)$$

όπου οι όροι  $Q^{na}$  και  $P^{na}$  δίνονται από τα διπλά ολοκληρώματα :

$$Q_{ij}^{na} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N^a(\xi, \eta) U_{ij}^*[x(\xi, \eta)y] |G| d\xi d\eta \dots \dots \dots (4.33)$$

$$P_{ij}^a = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N^\alpha(\xi, \eta) T_{ij}^*[x(\xi, \eta)y]|G| d\xi d\eta \dots \dots \dots (4.34)$$

Λαμβάνοντας υπόψη, ότι οι μεταξύ των στοιχείων υπάρχουν κάποιοι κοινοί κόμβοι, ενώ οι τιμές των  $u_j$  και  $t_j$  είναι μοναδικά ορισμένες σε αυτούς, μπορούν οι πολλαπλασιαστές των τιμών αυτών στη σχέση (4.32) να συνδυαστούν και να δώσουν τελικά ένα άθροισμα πάνω σε όλους τους κόμβους. Έτσι, αν γραφτεί η (4.32) για τον τυχαίο συναρτησιακό κόμβο  $y^\beta$  γίνεται :

$$c_{ij}(y^\beta)u_j(y^\beta) = \sum_{m=1}^M G_{ij}^{m\beta} \cdot t_j^m - \sum_{m=1}^M \bar{H}_{ij}^{m\beta} \cdot u_j^m \dots \dots \dots (4.35)$$

όπου M ο συνολικός αριθμός των συναρτησιακών κόμβων και

$$\bar{H}_{ij}^{m\beta} = \sum_{n=1}^N \sum_{a=1}^A Q_{ij}^{na}$$

$$G_{ij}^{m\beta} = \sum_{n=1}^N \sum_{a=1}^A P_{ij}^{na} \dots \dots \dots (4.36)$$

Αν η (4.35) γραφτεί για όλους τους συναρτησιακούς κόμβους  $y^\beta$ ,  $\beta=1, M$  τότε συγκεντρώνοντας όλες τις μετατοπίσεις προκύπτει :

$$\sum_{m=1}^M H_{ij}^{m\beta} \cdot u_j^m = \sum_{m=1}^M G_{ij}^{m\beta} \cdot t_j^m, \beta = 1, M \dots \dots \dots (4.37)$$

όπου  $H_{ij}$  :

$$H_{ij}^{m\beta} = c_{ij}(y^\beta)\delta_{m\beta} + \bar{H}_{ij}^{m\beta} \dots \dots \dots (4.38)$$

όπου  $\delta_{mb}$  το δέλτα του Kronecker

Η (4.37) είναι ένα γραμμικό σύστημα ( $3M \times 3M$ ) το οποίο σε μητρική μπορεί να γραφτεί :

$$[H](u) = [G](t) \dots \dots \dots (4.39)$$

Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες (4.27) και (2.11) και χωρίζοντας γνωστούς από αγνώστους προκύπτει το αλγεβρικό σύστημα :

$$A\{X\} = [B]\{Y\} = \{F\} \dots \dots \dots (4.40)$$



## 5. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

### 5.1 Ομογενοποίηση

Η μέθοδος ομογενοποίησης συνοριακών στοιχείων που βασίζεται σε RVE είναι μια εξαιρετική μέθοδος για την πρόβλεψη των μηχανικών ιδιοτήτων των σύνθετων υλικών, ιδίως σε σύνθετα υλικά με περίπλοκες μικροδομές (π.χ σύνθετα υλικά ενισχυμένα με ανθρακονήματα) και ως εκ τούτου, υιοθετείται για την αξιολόγηση των αποτελεσματικών μηχανικών ιδιοτήτων των σύνθετων υλικών με τις περίπλοκες μικροδομές.

Εξετάζεται ένα RVE  $\omega$  των σύνθετων υλικών με τον όγκο του  $V$  που αποτελείται τη μήτρα  $\omega_0$  με τον όγκο του  $V_0$  και κλάσμα όγκου  $v_0=V_0/V$ , και τις εγκλείσεις  $\omega_1$  με τον όγκο του  $V_1$  και το κλάσμα όγκου  $v_1=1-v_0=V_1/V$ . Για οποιοδήποτε μικροπεδίο  $f$  (όπως καταπόνηση) και εντός του RVE  $\omega$ , ορίζονται οι ακόλουθες μερικές εξισώσεις :

$$\langle f \rangle = \frac{1}{V} \int_{\omega} f(x) dx \quad \text{και} \quad \langle f \rangle_{\omega_1} = \frac{1}{V_1} \int_{\omega_1} f(x) dx, \quad \text{με } i = 0, 1, \dots \quad (5.1)$$

Οι αποτελεσματικές μηχανικές ιδιότητες είναι εγγενείς στα υλικά και, ως εκ τούτου, δεν θα πρέπει να εξαρτώνται από τους εξωτερικούς παράγοντες, όπως η παρουσία σωματικής δύναμης και οριακής κατάστασης. Συνεπώς, για την πρόβλεψη των αποτελεσματικών μηχανικών ιδιοτήτων των σύνθετων υλικών στην περίπτωση απειροελάχιστης παραμόρφωσης, εξετάζεται η ακόλουθη διαφορική εξίσωση, ονομάζεται στατικής ισορροπίας:

$$\text{Div}(\sigma(x))=0 \text{ στο } \omega \quad \dots \quad (5.2)$$

Αν και η οριακή κατάσταση δεν θα επηρεάσει τις μηχανικές ιδιότητες των σύνθετων υλικών, οι οριακές συνθήκες είναι απαραίτητες για πρόβλεψη των αποτελεσματικών μηχανικών ιδιοτήτων των υλικών και πρέπει να ικανοποιεί τον ενεργειακό νόμο του Hill,

$$\langle \sigma : \varepsilon \rangle = \langle \sigma \rangle : \langle \varepsilon \rangle \dots \quad (5.3)$$

Ο ενεργειακός νόμος του Hill ορίζει ότι η ενέργεια σε μικροεπίπεδο πρέπει να είναι η ίδια με την αποτελεσματική ενέργεια για τα ομογενοποιημένα σύνθετα υλικά. Για οποιοδήποτε σημείο  $x$  στο RVE  $\omega$  των σύνθετων υλικών, το μοντέλο σύστασής του είναι

$$\sigma(x) = \sigma(x, \varepsilon(x)) \dots \dots \dots (5.4)$$

Με βάση την αδύναμη μορφή της διαφορικής εξίσωσης στατικής ισορροπίας (2), η οριακή προϋπόθεση που ικανοποιεί τον ενεργειακό νόμο Hill (3) και τη σχέση σύστασης (4), η δύναμη  $\sigma(x)$  και καταπόνηση  $\varepsilon(x)$  οποιουδήποτε σημείου υλικού  $x$  στο RVE  $\omega$  μπορεί να βρεθεί με ανάλυση συνοριακών στοιχείων. Στη συνέχεια, η μέση δύναμη  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  και η μέση καταπόνηση  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$  σε ολόκληρο το RVE  $\omega$  μπορούν να υπολογιστούν από :

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \sum_{e=1}^{n_e} V_e \left[ \sum_{I=1}^{n_{eint}} [\sigma_{ij}(y_I)] \cdot J(y_I) \cdot W(y_I) \right] \text{ και,}$$

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \sum_{e=1}^{n_e} V_e \left[ \sum_{I=1}^{n_{eint}} \varepsilon_{ij} [(y)_I] \cdot J(y_I) \cdot W(y_I) \right] \dots \dots \dots (5.5)$$

Όπου  $n_e$  είναι ο αριθμός του στοιχείου στο RVE  $\omega$ , το  $V_e$  δηλώνει τον όγκο του στοιχείου  $e$ ,  $n_{eint}$  δηλώνει τον αριθμό της ενσωμάτωσης Gauss των σημείων στο στοιχείο  $e$ , το  $W(y_i)$  δηλώνει το βάρος του σημείου ενσωμάτωσης Gauss  $y_i$ , και το  $\sigma_{ij}(y_i)$  και  $\varepsilon_{ij}(y_i)$ , δηλώνουν τη δύναμη και την καταπόνηση των στοιχείων στο σημείο ενσωμάτωσης Gauss  $y_i$ .

Στην περίπτωση γραμμικής ελαστικής παραμόρφωσης, ο αποτελεσματικός ελαστικός συντελεστής ακαμψίας  $\langle C \rangle$  των σύνθετων υλικών μπορεί να υπολογιστεί με τη χρήση του μέσου όρου του πίεσης  $\langle \sigma \rangle$  και καταπόνησης  $\langle \varepsilon \rangle$  :

$$\langle C \rangle = \langle \sigma \rangle \otimes \langle \varepsilon \rangle^{-1} \dots \dots \dots (5.6)$$

Και στην περίπτωση της ελαστο-πλαστικής παραμόρφωσης, αποτελεσματικές απαντήσεις για την ελαστο-πλαστική συμπεριφορά των σύνθετων υλικών μπορούν να ληφθούν με βάση τη μέση πίεση  $\langle \sigma \rangle$  και καταπόνηση  $\langle \epsilon \rangle$  :

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma \rangle(\langle \epsilon \rangle) \dots \dots \dots (5.7)$$

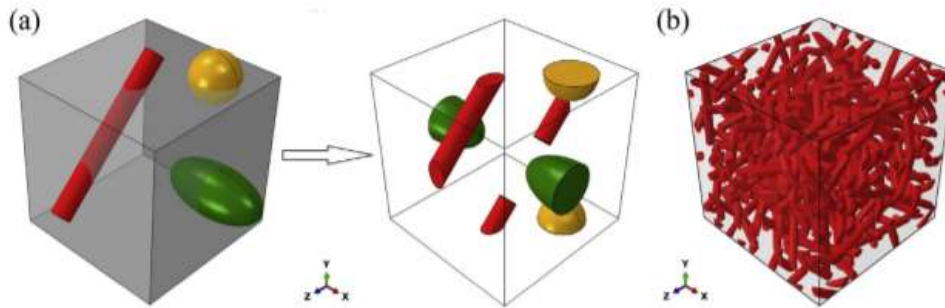
## 5.2 Μοντελοποίηση περιοδικής γεωμετρίας

Για την πρόβλεψη των αποτελεσματικών μηχανικών ιδιοτήτων των σύνθετων χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ομογενοποίησης συνοριακών στοιχείων που βασίζεται σε RVE, το πρώτο και σημαντικό βήμα είναι η δημιουργία ενός RVE για τον ακριβή χαρακτηρισμό των μικροδομών των σύνθετων υλικών. Εδώ, θα ήταν καταλληλότερη για χρήση η τυχαία τεχνική διαδοχικής απορρόφησης (RSA) για τη δημιουργία σύνθετων υλικών με κυλινδρικές εγκλείσεις. Ο αλγόριθμος RSA για RVE γενικά συνίσταται στην προσθήκη των εγκλεισμάτων διαδοχικά σε μια κυβική μήτρα δημιουργώντας τυχαία τις θέσεις και τους προσανατολισμούς τους. Φυσικά, η τομή των δύο εγκλεισμάτων δεν είναι αποδεκτή, απαιτώντας να μην επικαλύπτεται η νεοσυσταθείσα ένταξη των υποψήφιων τυχόν εγκλεισμών που υπήρχαν στην κυβική μήτρα. Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρις ότου να πληρείται το προκαθορισμένο κλάσμα ή ο αριθμός όγκου συμπερίληψης.

Όπως προαναφέρθηκε, η τομή των δύο εγκλεισμάτων δεν είναι φυσικά αποδεκτή, η οποία με τη σειρά της προτείνει την απαίτηση ότι η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των δύο εγκλεισμάτων πρέπει να είναι μεγαλύτερη από 0,0 και μπορεί να διατυπωθεί η ακόλουθη μαθηματική εξίσωση:

$$\min = \{d(I_1, I_2), d(I_1, I_3), \dots, d(I_{n-1}, I_n)\} > 0 \dots \dots \dots (5.8)$$

όπου  $I_n$  σημαίνει τον  $n_{th}$  εγκλεισμό. Ακόμα, η ελάχιστη απόσταση διαχωρισμού μεταξύ των επιφανειών οποιασδήποτε συμπερίληψης και της μήτρας (λαμβάνοντας ως παράδειγμα το 5% της ακτίνας ινών), συνιστάται να είναι βέβαιο, ότι τα δικτυωμένα πεπερασμένα στοιχεία δεν παραμορφώνονται.



**Σχήμα 5.1:** Διαγραμματικό σκίτσο της περιοδικότητας γεωμετρίας ενός RVE και ένα περιοδικό RVE για κυλινδρικές εγκλείσεις με ενισχυμένα σύνθετα υλικά: a) Περιοδικότητα γεωμετρίας RVE, b) Περιοδικό RVE.

Τα σύνθετα υλικά θα πρέπει να προσεγγίζονται με την αναπαράσταση και των RVEs τους σε κατευθύνσεις  $x$ ,  $y$  και  $z$ , αντίστοιχα. Έτσι, ένα RVE σύνθετων υλικών θα πρέπει να διαθέτει περιοδικότητα. Προκειμένου να δημιουργηθεί ένα περιοδικό RVE, οι εγκλείσεις που διεισδύουν στα όρια RVE κόβονται και μετατοπίζονται στις αντίθετες παράλληλες επιφάνειες του RVE. Η απεικόνιση δίνεται στο σχήμα 5.1, στοιχείο a) και η σύνθεση δίνεται ως :

$$I_N(x^i) = I(x^i) - k^i L_m \quad \text{με } i = 1, 2 \text{ ή } 3 \dots \dots \dots (5.9)$$

όπου  $I_N(x^i)$  είναι η μεταφρασμένη συμπερίληψη,  $I(x^i)$  είναι η αρχική συμπερίληψη,  $x^i$  είναι οι μεταφρασμένες συντεταγμένες στην αντίστοιχη διάσταση, όπου  $k \in \{-1, 0, 1\}$  είναι ο συντελεστής ανάλογα με ποια πλευρά έχει γίνει διάτρηση στο RVE και το  $L_m^i$  είναι το μήκος της μήτρας στην αντίστοιχη διάσταση. Σημειώνεται, ότι έως και τρεις επιφάνειες ενός RVE μπορούν να διατηρηθούν με μία μόνο συμπερίληψη.

Ένα RVE για τα σύνθετα υλικά που ενισχύονται από τις κυλινδρικές εγκλείσεις παράγονται χρησιμοποιώντας τον προαναφερθέντα αλγόριθμο RSA και στο σχήμα 5.1, στοιχείο β φαίνεται τόσο η κατανομή όσο και ο προσανατολισμός των κυλινδρικών εγκλεισμάτων τα οποία είναι τρισδιάστατα σε τυχαίες διευθύνσεις. Το κλάσμα όγκου του κυλινδρικού στην RVE είναι 17,5%, ενώ ο λόγος διαστάσεων των κυλινδρικών εγκλεισμάτων είναι 10,0.

### 5.3 Περίληψη της μεθόδου

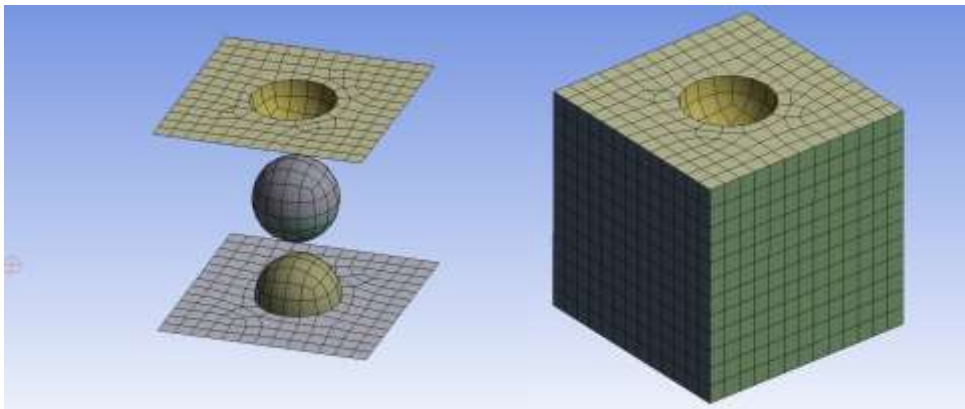
Καταληκτικά, η περιοδική οριακή συνθήκη για την αξιολόγηση των αποτελεσματικών μηχανικών ιδιοτήτων των σύνθετων υλικών με περίπλοκες μικρο-δομές, παρουσιάζεται ο λεπτομερής αλγόριθμος αριθμητικής εφαρμογής της περιοδικής οριακής κατάστασης. Συνδυαζόμενος με τη μέθοδο ομογενοποίησης με συνοριακά στοιχεία και με χρήση του αντιπροσωπευτικού όγκου αναφοράς (RVE), μελετώνται οι αποτελεσματικές ελαστικές ιδιότητες και οι ελαστο-πλαστικές αποκρίσεις των σύνθετων υλικών που ενισχύονται από τις τυχαία κατανεμημένες τρισδιάστατες κυλινδρικές ίνες, αντίστοιχα και συνεπώς, προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Ο προτεινόμενος αλγόριθμος αριθμητικής εφαρμογής για την περιοδική οριακή κατάσταση εγγυάται τη συνέχεια του φορτίου και της καταπόνησης για τους κόμβους στις παράλληλες αντίθετες επιφάνειες του RVE για τα σύνθετα υλικά με περίπλοκες μικροδομές.
- Ο προτεινόμενος αλγόριθμος αριθμητικής εφαρμογής για την περιοδική οριακή κατάσταση, εγγυάται τον περιορισμό της μονοαξονικής παραμόρφωσης του RVE για τα σύνθετα υλικά με περίπλοκες μικροδομές.
- Η μέθοδος ομογενοποίησης συνοριακών στοιχείων με χρήση του RVE παράλληλα με την περιοδική οριακή κατάσταση μπορεί να αξιολογήσει με ακρίβεια τις αποτελεσματικές ελαστικές ιδιότητες και ελαστο-πλαστικές αποκρίσεις των σύνθετων υλικών με περίπλοκες μικροδομές.

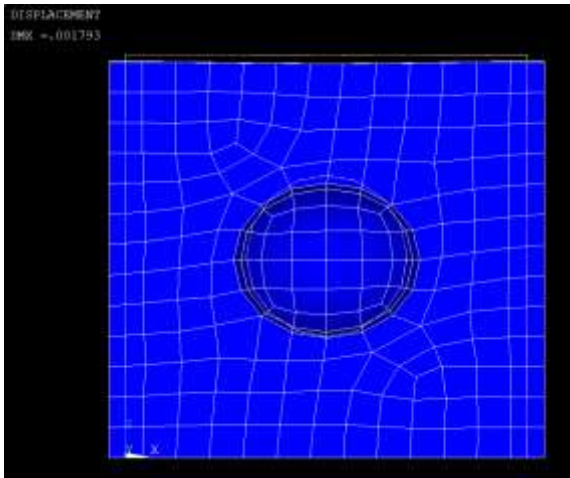
## 6. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΜΕΛΕΤΗΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

### 6.1. Παρουσίαση αποτελεσμάτων με τη χρήση της μεθόδου των συνοριακών στοιχείων.

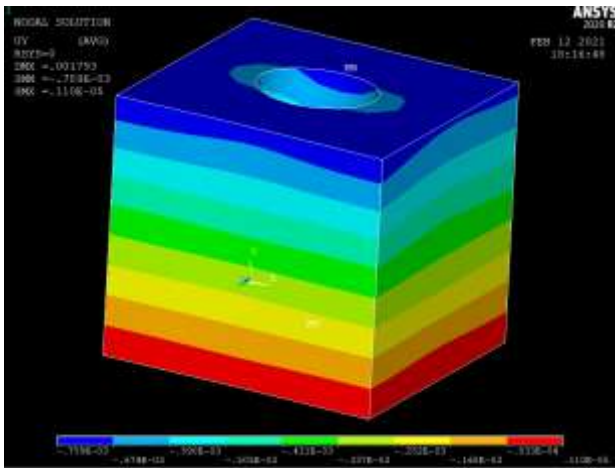
Στο παρακάτω κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προκύπτουν με χρήση της μεθόδου των συνοριακών στοιχείων. Οι πρώτες φωτογραφίες αποτυπώνουν την ανάλυση ενός απλού μοντέλου με συνεχή (constant), γραμμικά (linear), και τετραεδρικά (quadratic) στοιχεία ενώ οι επόμενες απεικονίζουν ένα μοντέλο γεωμετρίας το οποίο έχει αρκετά κενά (voids).



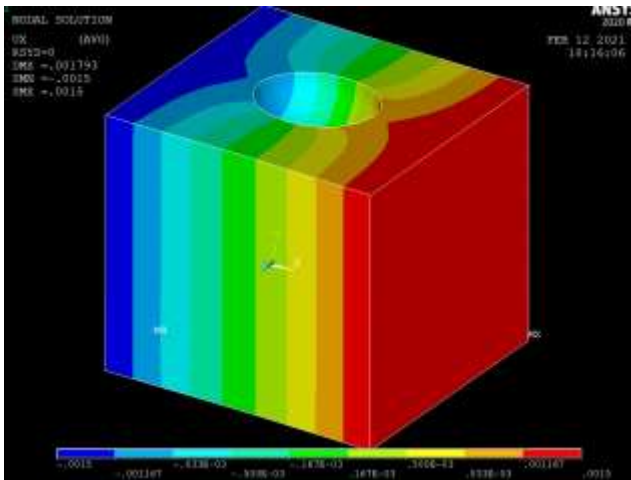
**Εικόνες 6.1 6.2 :** Παρουσίαση των απλοποιημένων μοντέλων από τα οποία θα γίνει η εξαγωγή των αποτελεσμάτων



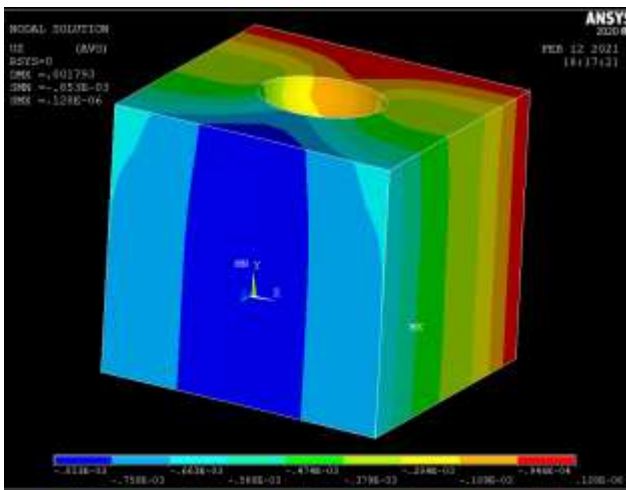
Εικόνα 6.3 : Αποτύπωση μετατοπίσεων στο μοντέλο.



Εικόνα 6.4 : Μετατόπιση κατά τη διεύθυνση του άξονα y.

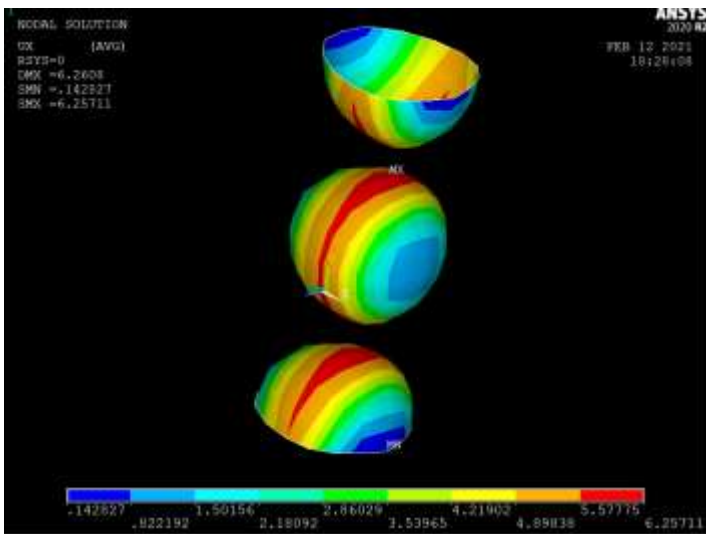
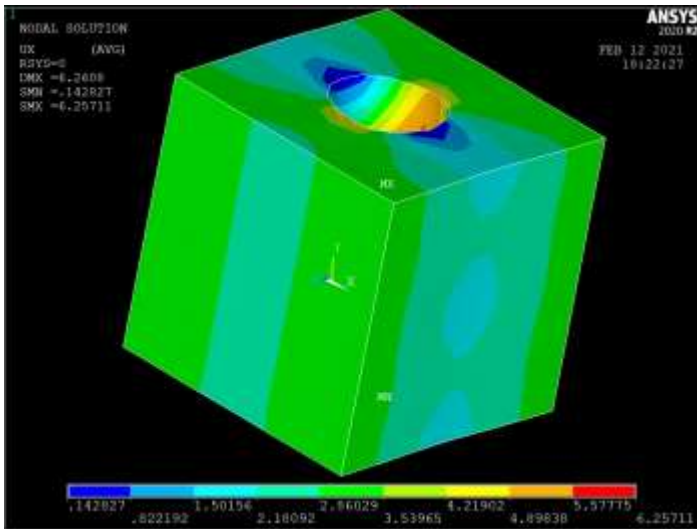


Εικόνα 6.5 : Μετατόπιση κατά τη διεύθυνση του άξονα x.

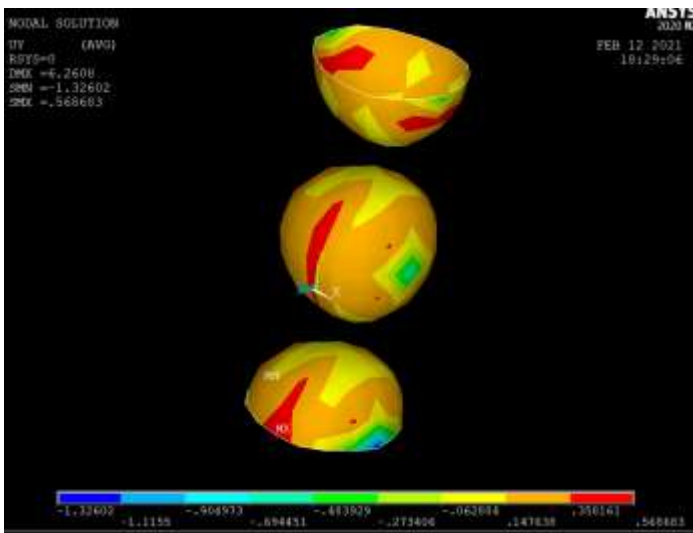
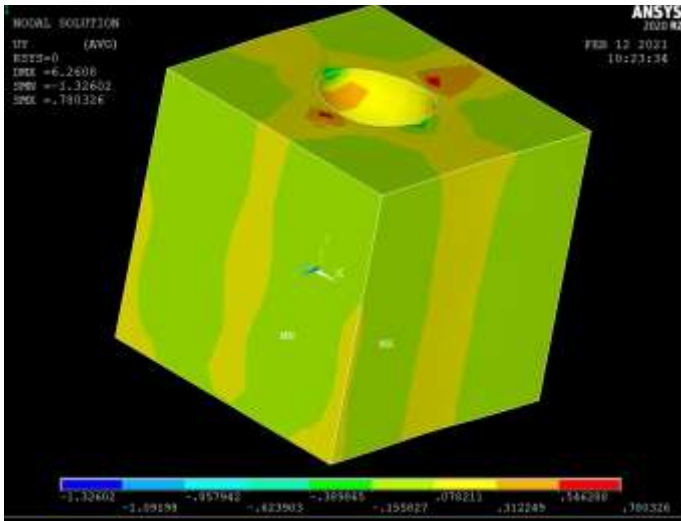


Εικόνα 6.6 : Μετατόπιση κατά τη διεύθυνση του άξονα z.

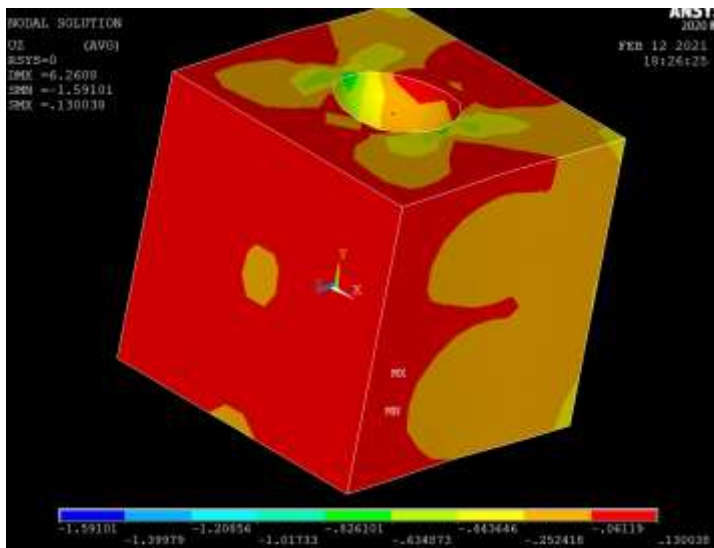
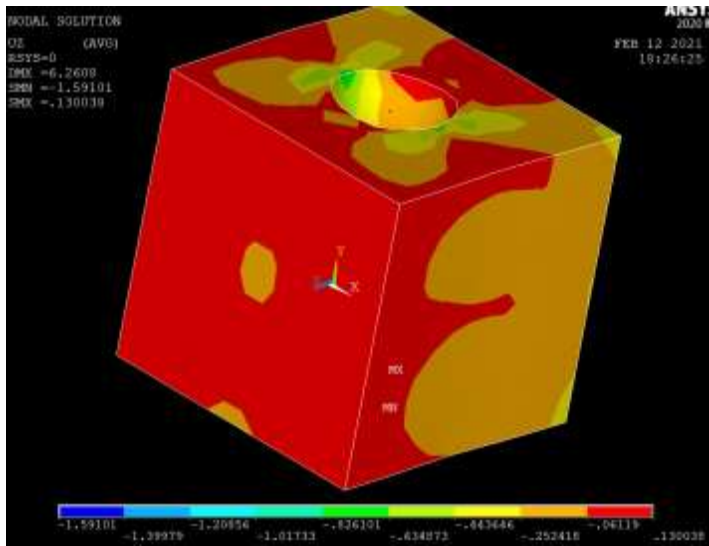




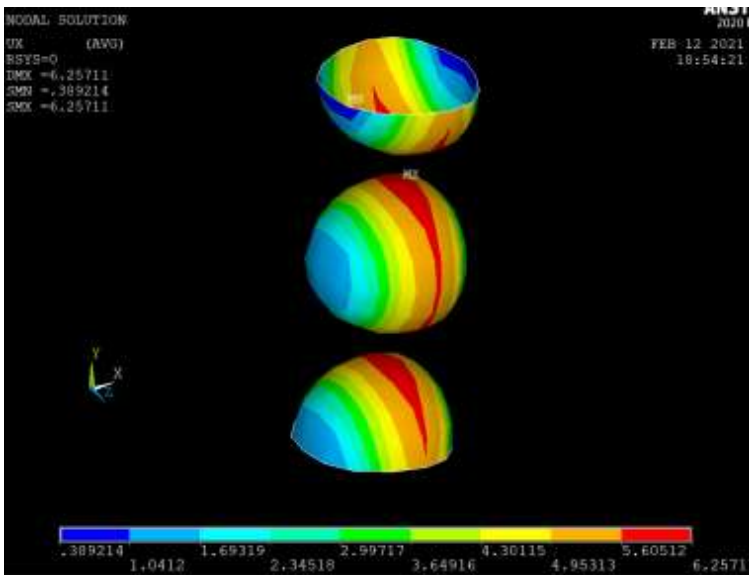
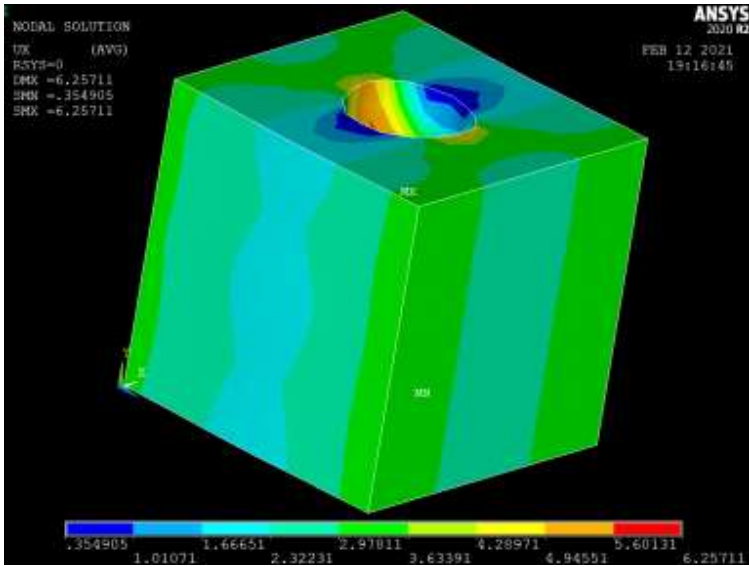
Εικόνες 6.7 και 6.8 : Τάση  $\sigma_1$



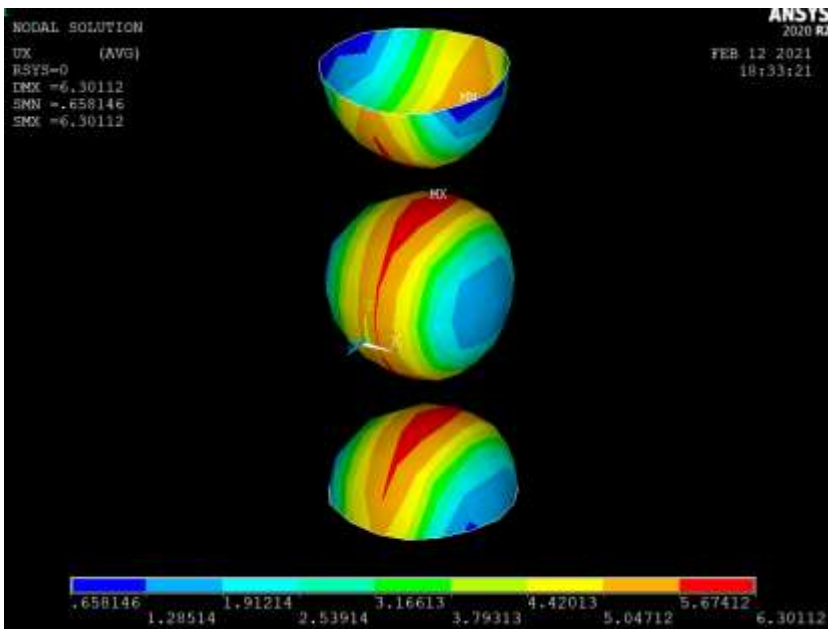
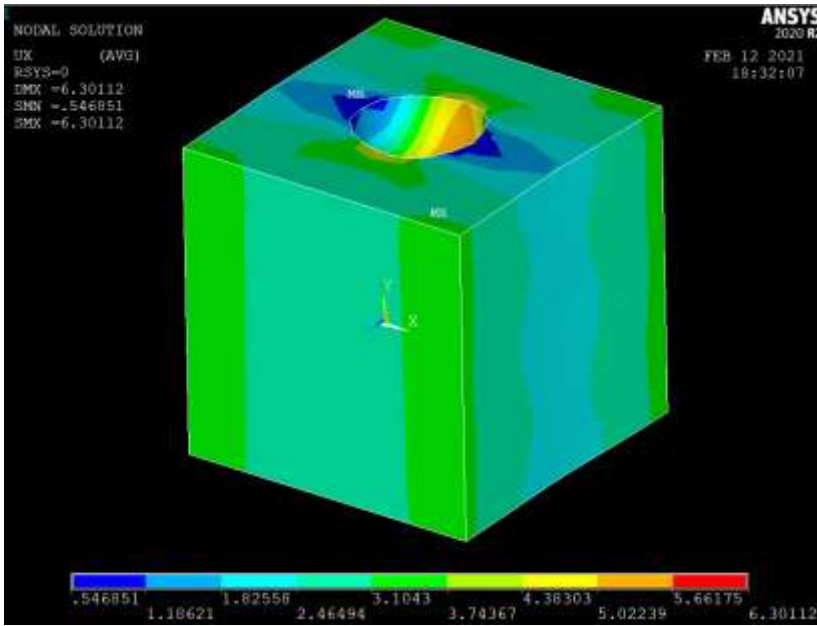
Εικόνες 6.9 και 6.10 : Τάση  $\sigma_2$ .



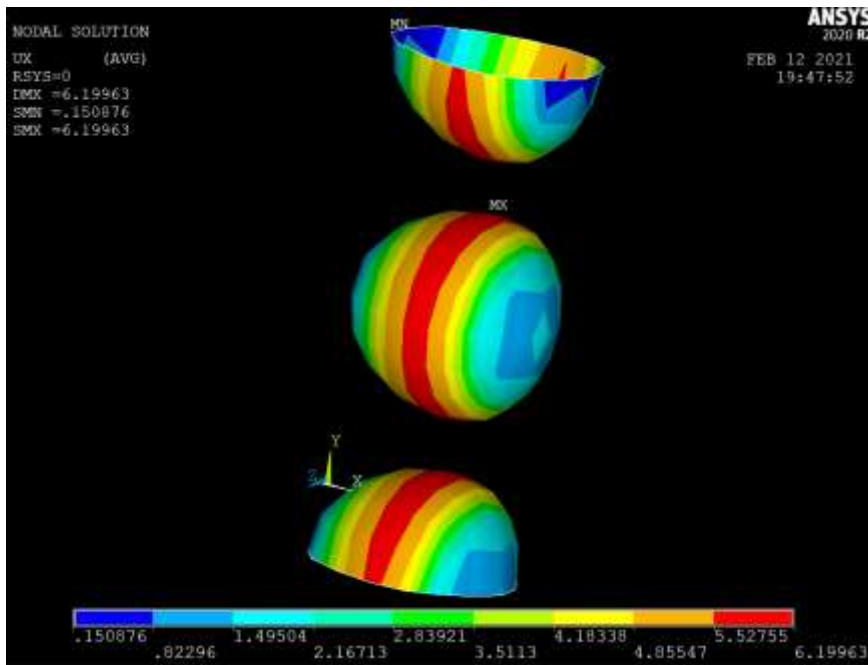
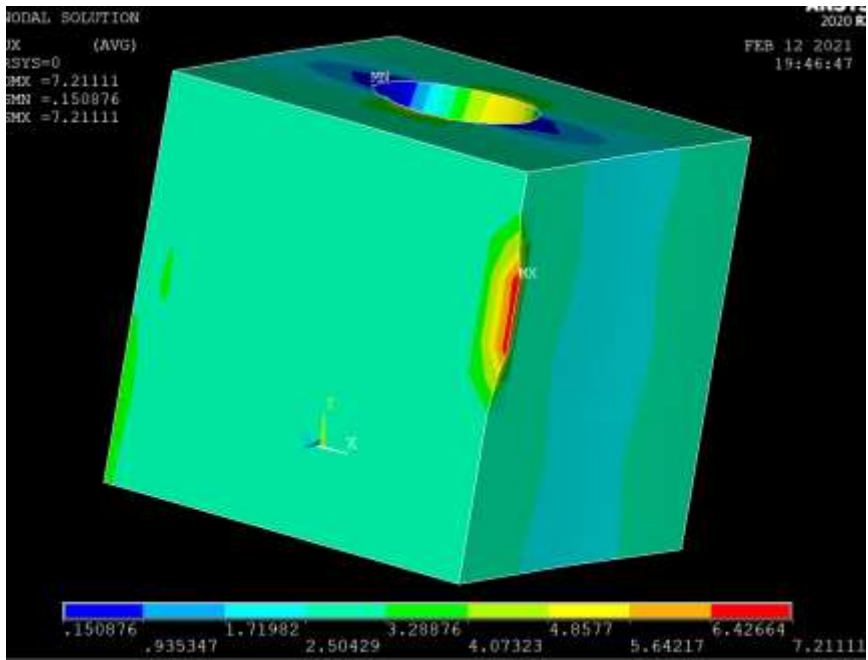
Εικόνες 6.11 και 6.12 : Τάση  $\sigma_3$ .



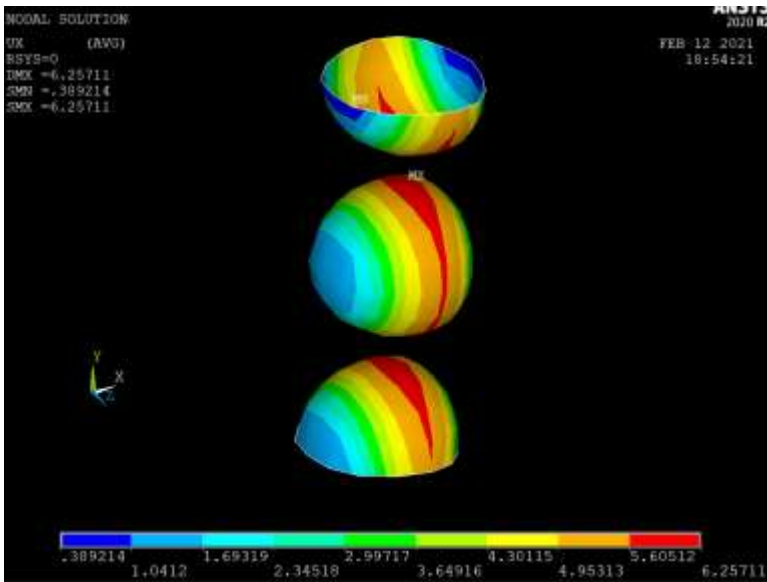
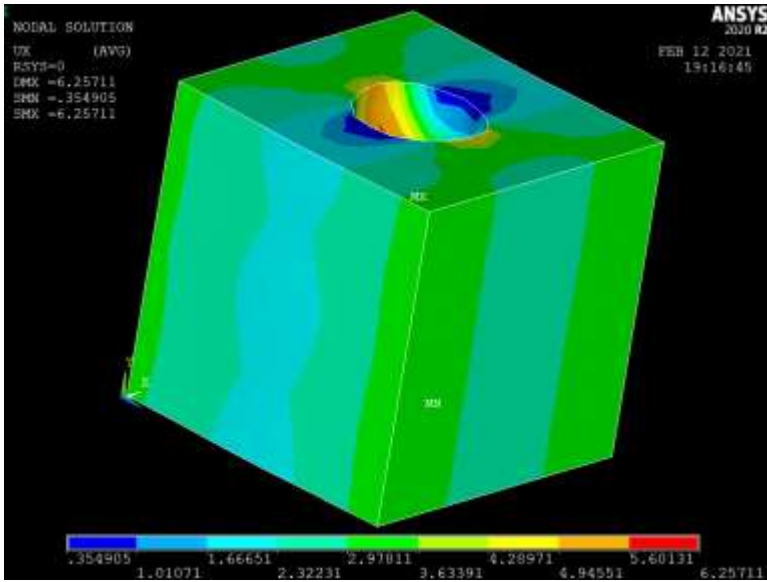
Εικόνες 6.13 και 6.14 : Μέγιστη κύρια εφελκυστική τάση.



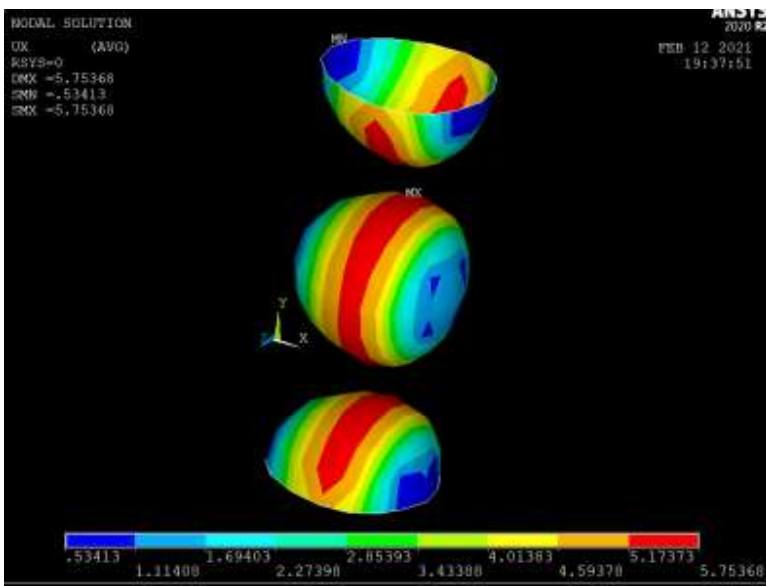
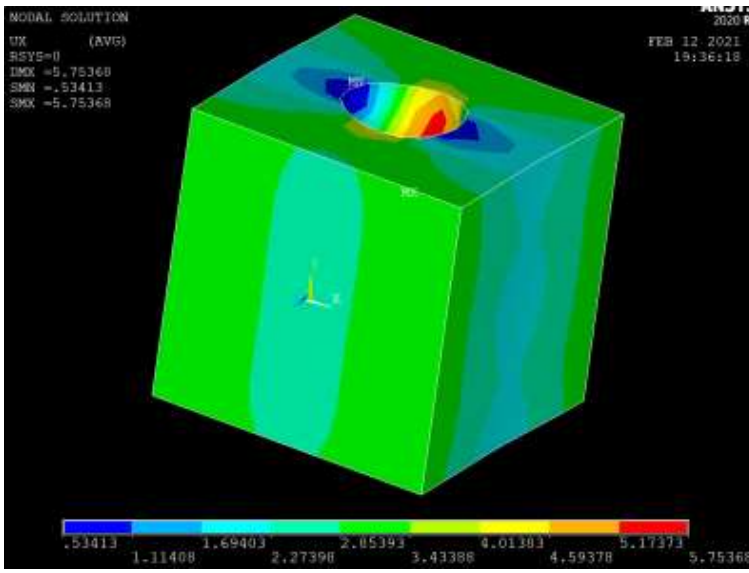
Εικόνες 6.15 και 6.16 : Δυνάμεις von Mises.



Εικόνες 6.17 και 6.18 : Μέγιστη εφελκυστική τάση τετραεδρικών στοιχείων.

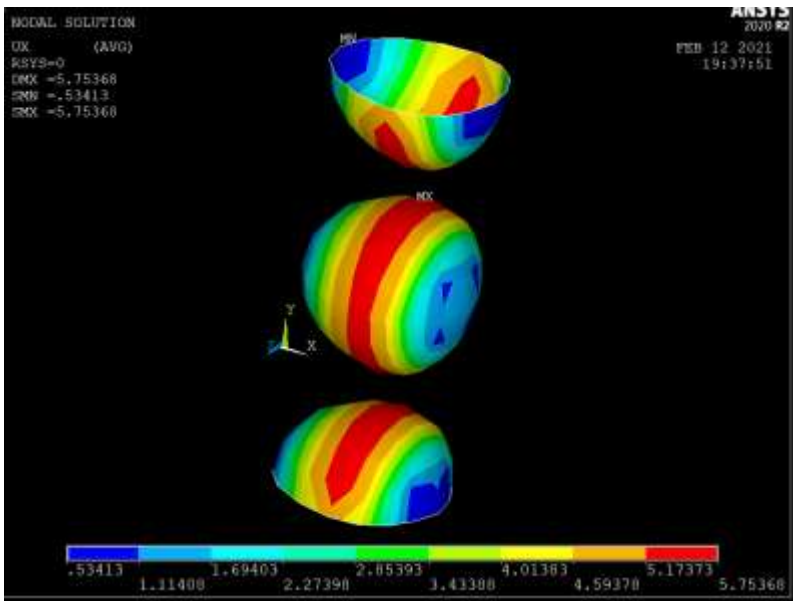
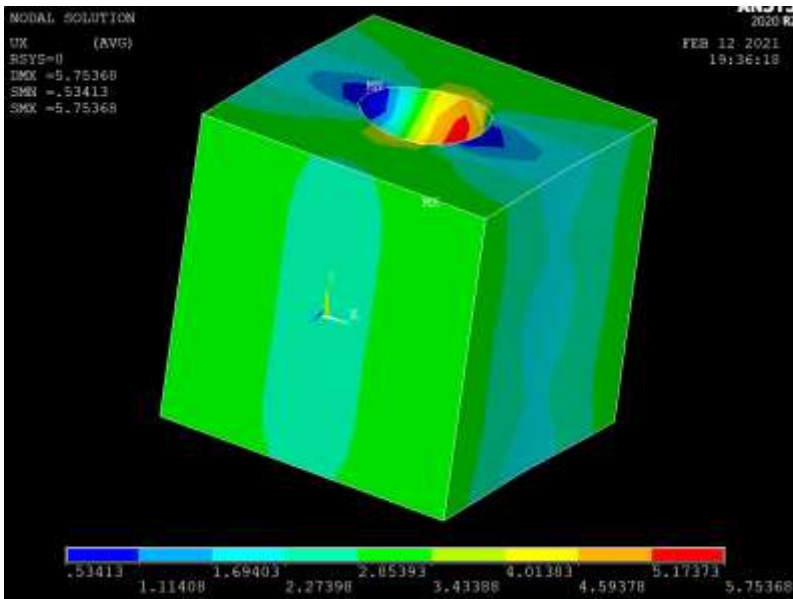


Εικόνες 6.19 και 6.20 : Μέγιστη εφελκυστική τάση γραμμικών στοιχείων.

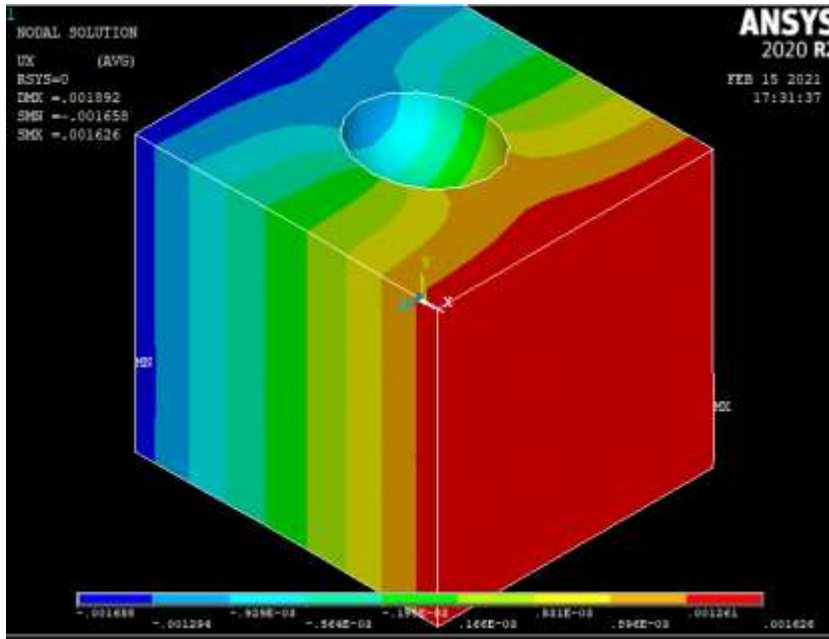


Εικόνες 6.21 και 6.22 : Μέγιστη εφελκυστική τάση γραμμικών στοιχείων.

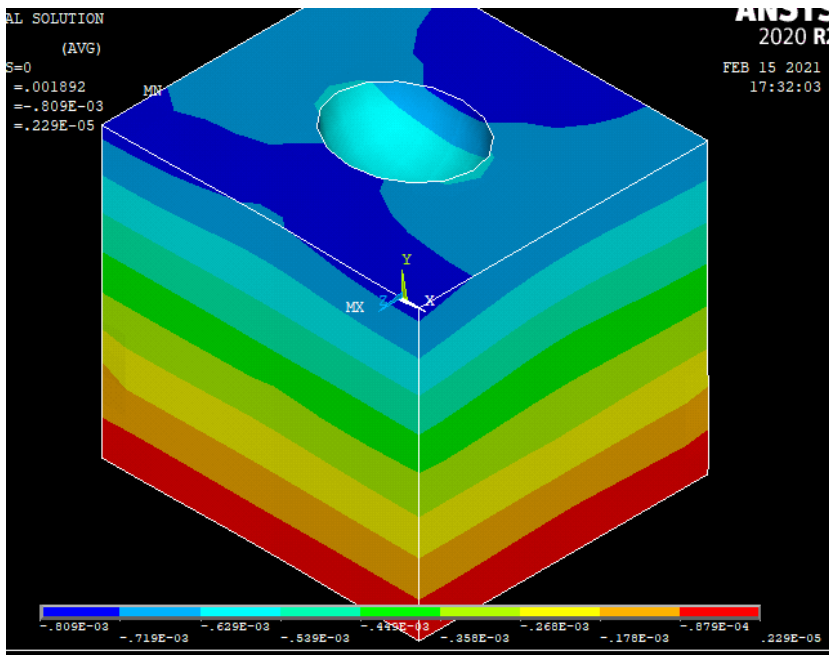




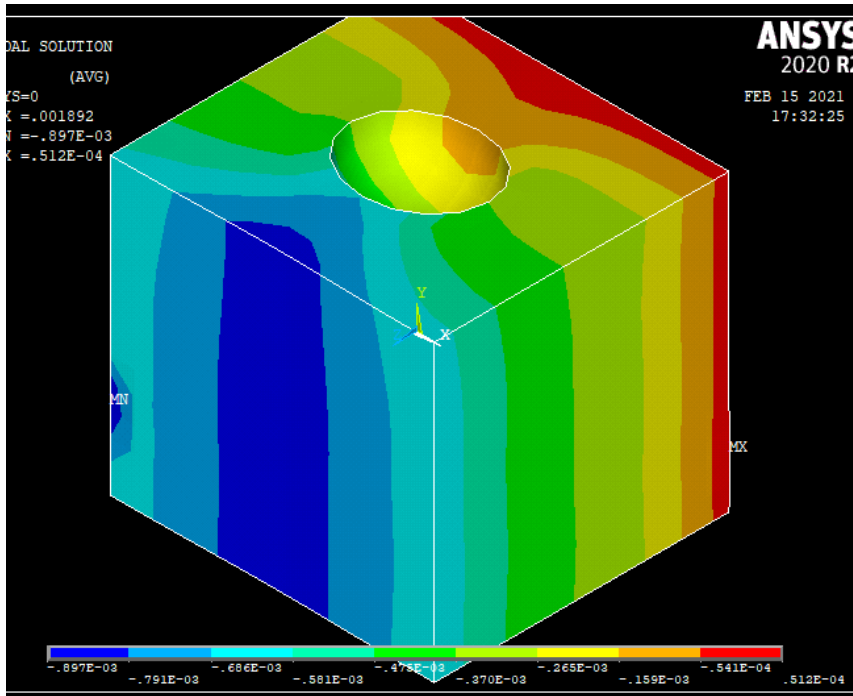
Εικόνες 6.23 και 6.24 : Μέγιστη εφελκυστική τάση συνεχών στοιχείων.



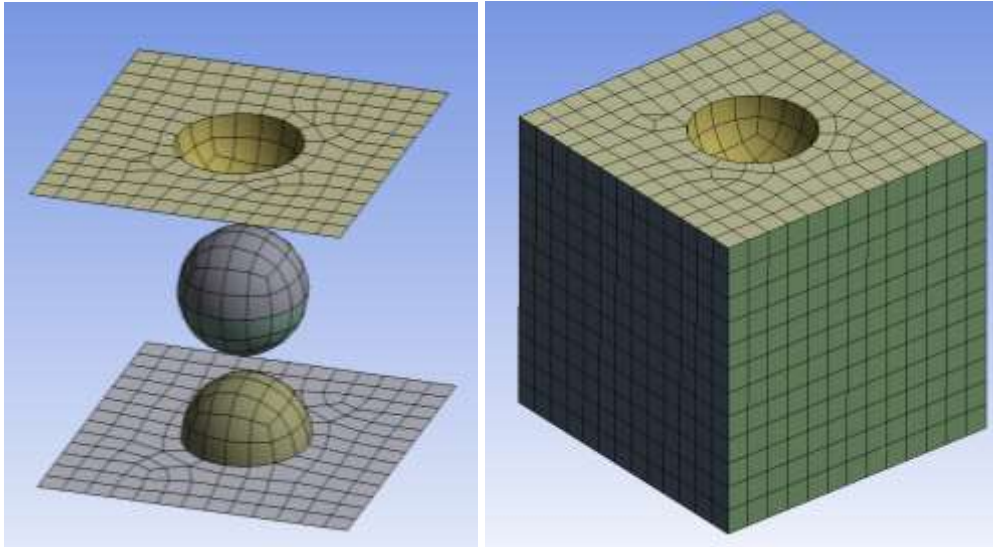
Εικόνα 6.25 : Μετατόπιση κατά τη διεύθυνση του άξονα x τετραεδρικού στοιχείου.



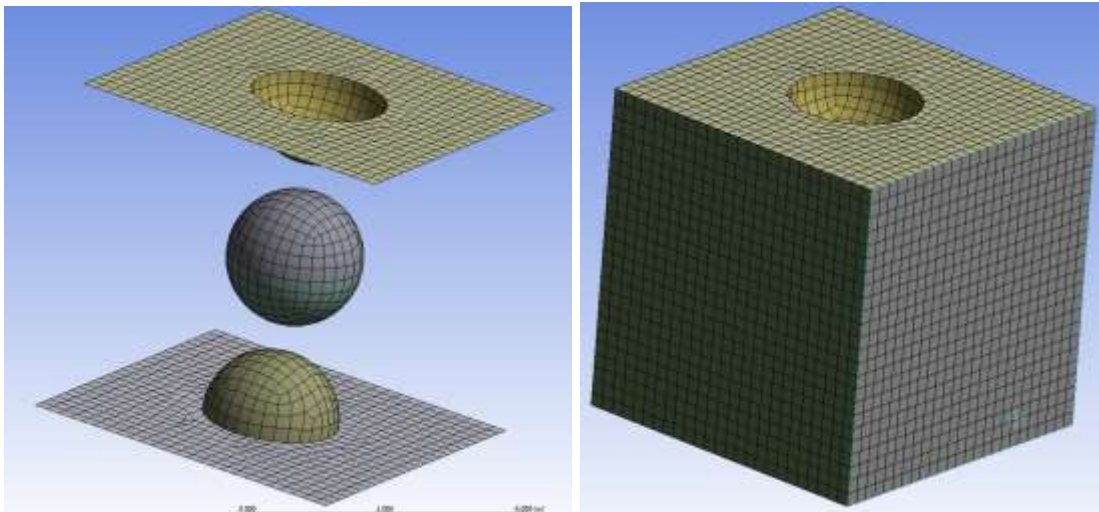
Εικόνα 6.26 : Μετατόπιση κατά τη διεύθυνση του άξονα y τετραεδρικού στοιχείου.



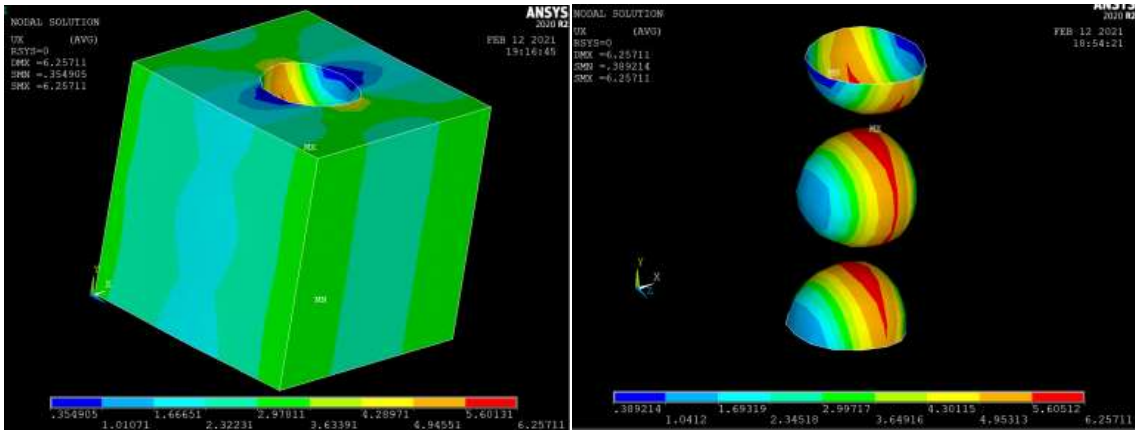
Εικόνα 6.27 : Μετατόπιση κατά τη διεύθυνση του άξονα z τετραεδρικού στοιχείου.



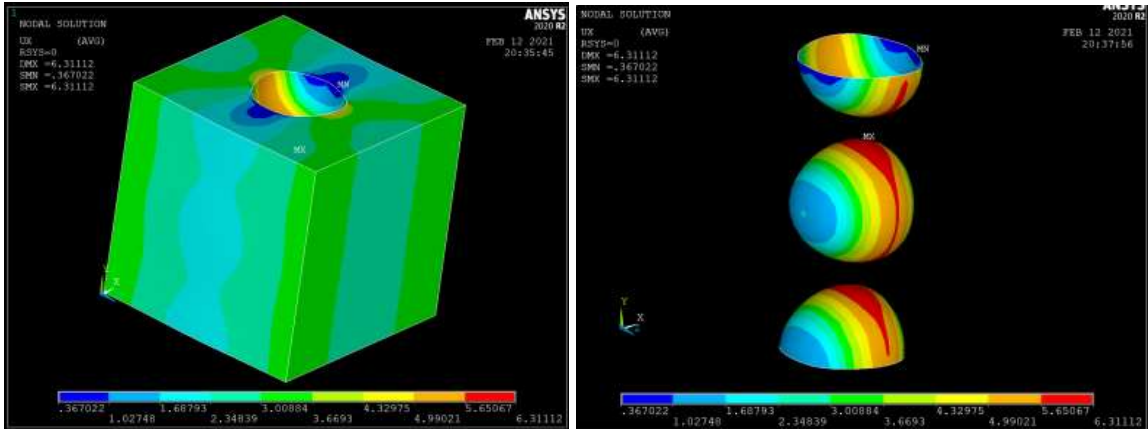
**Εικόνες 6.28 και 6.29 :** Αναπαράσταση διακριτοποίησης μοντέλου με 1107 στοιχεία.



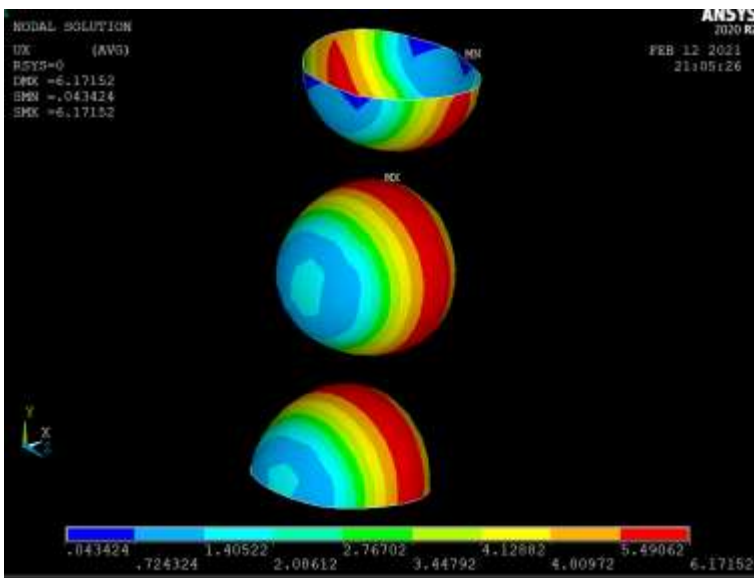
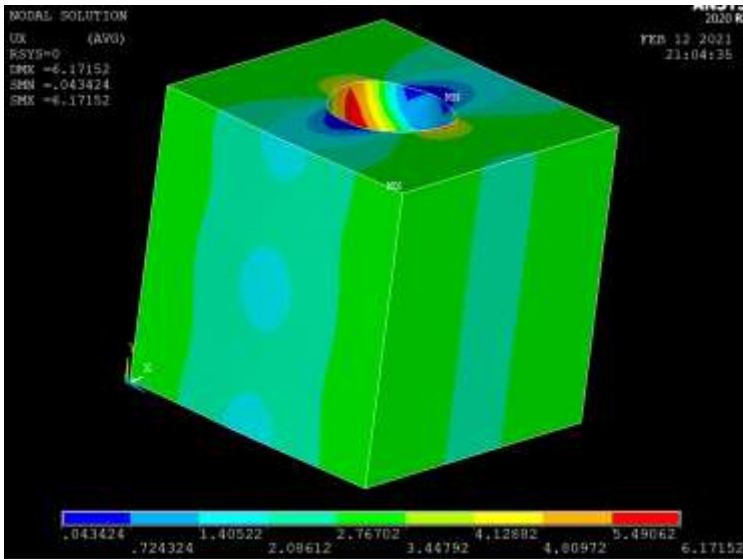
**Εικόνες 6.30 και 6.31 :** Αναπαράσταση διακριτοποίησης μοντέλου με 4292 στοιχεία.



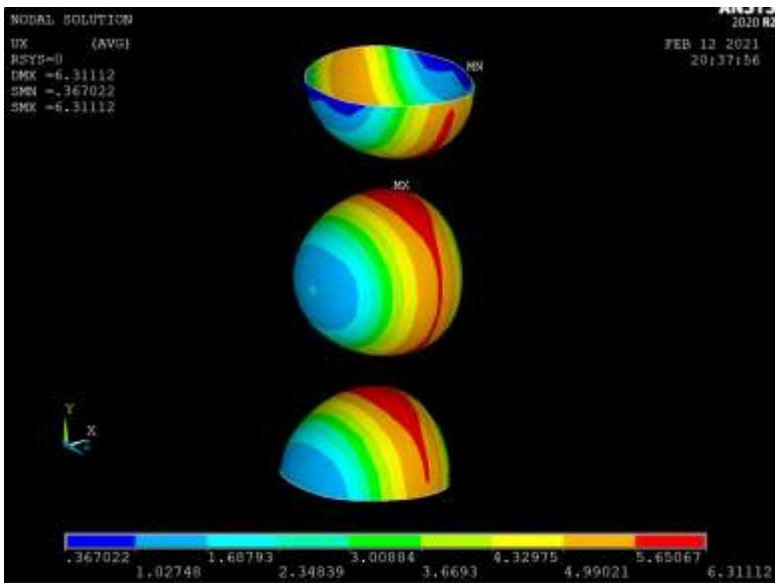
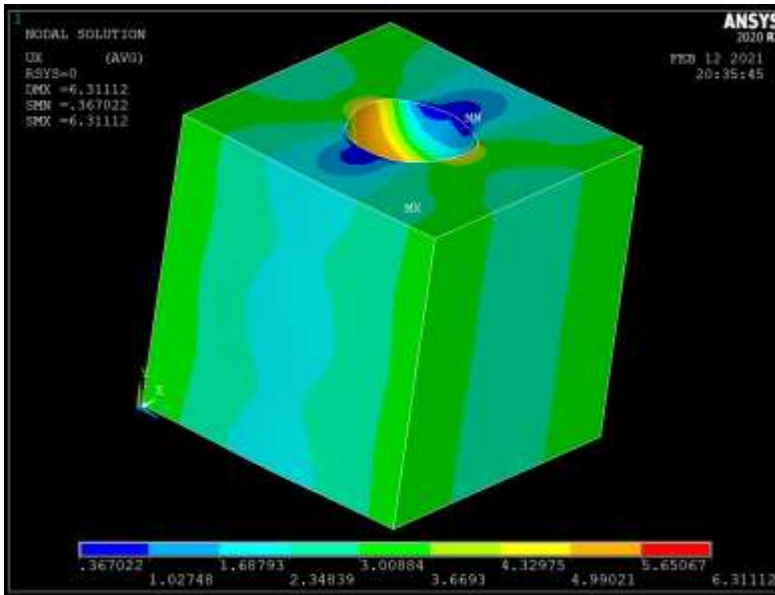
**Εικόνες 6.32 και 6.33 :** Προσέγγιση μέγιστης εφελκυστικής τάσης του μοντέλου με τα 1107 στοιχεία.



**Εικόνες 6.34 και 6.35 :** Προσέγγιση μέγιστης εφελκυστικής τάσης του μοντέλου με τα 4292 στοιχεία.

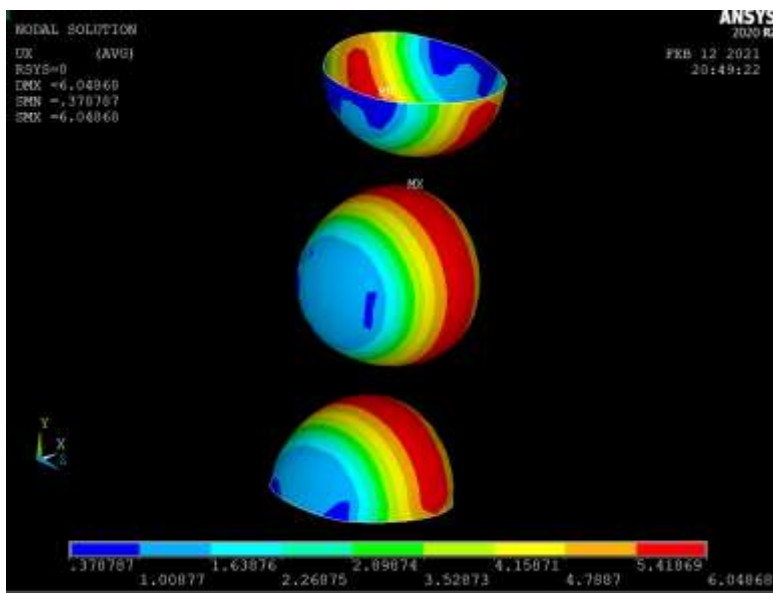
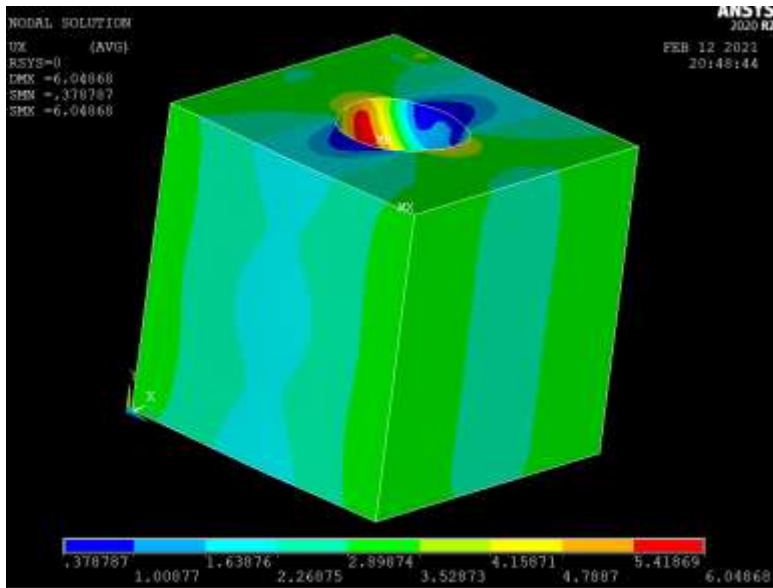


**Εικόνες 6.36 και 6.37 :** Απεικόνιση μέγιστης εφελκυστικής τάσης στο μοντέλο των 4292 στοιχείων χρησιμοποιώντας την τετραεδρική τους μορφή.



**Εικόνες 6.38 και 6.39 :** Απεικόνιση μέγιστης εφελκυστικής τάσης στο μοντέλο των 4292 στοιχείων χρησιμοποιώντας την γραμμική τους μορφή.

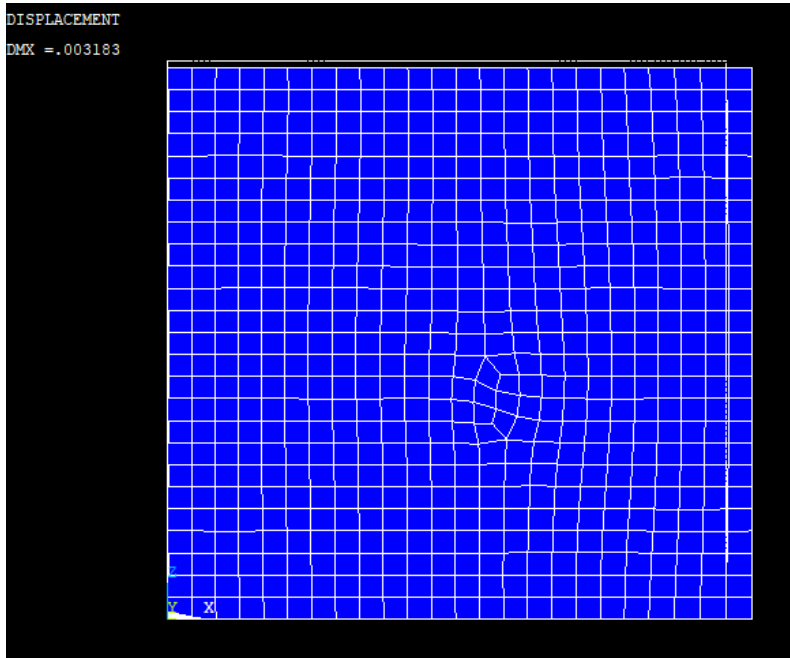




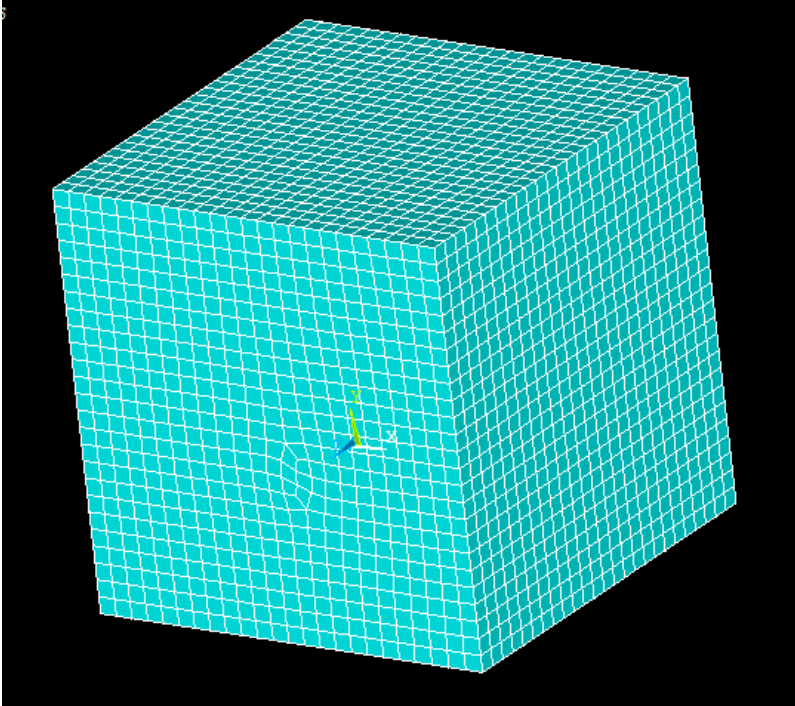
Εικόνες 6.40 και 6.41 : Απεικόνιση μέγιστης εφελκυστικής τάσης στο μοντέλο των 4292 στοιχείων χρησιμοποιώντας την συνεχή τους μορφή.



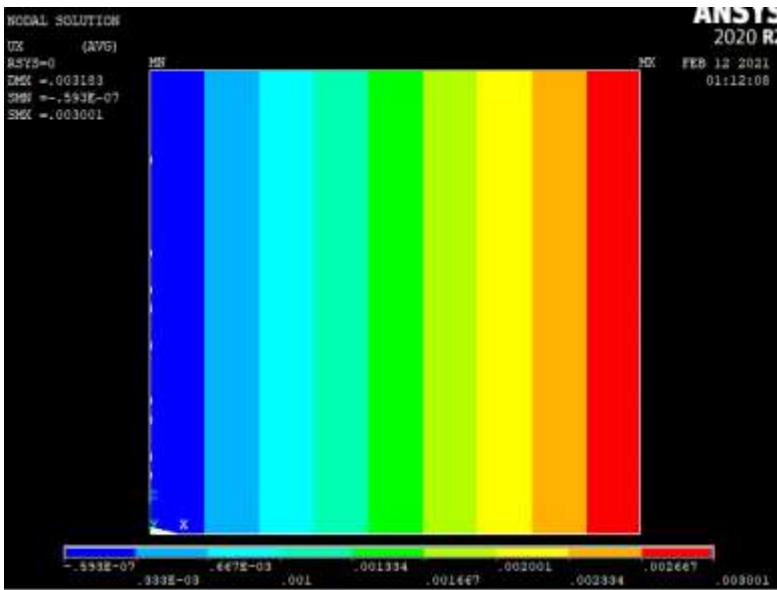
Παρακάτω παραθέτονται απεικονίσεις ενός μοντέλου το οποίο διέπεται από κενά (voids) τα οποία θα μπορούσαν εύστοχα να παρομοιαστούν με σφαίρες αερογέλης.



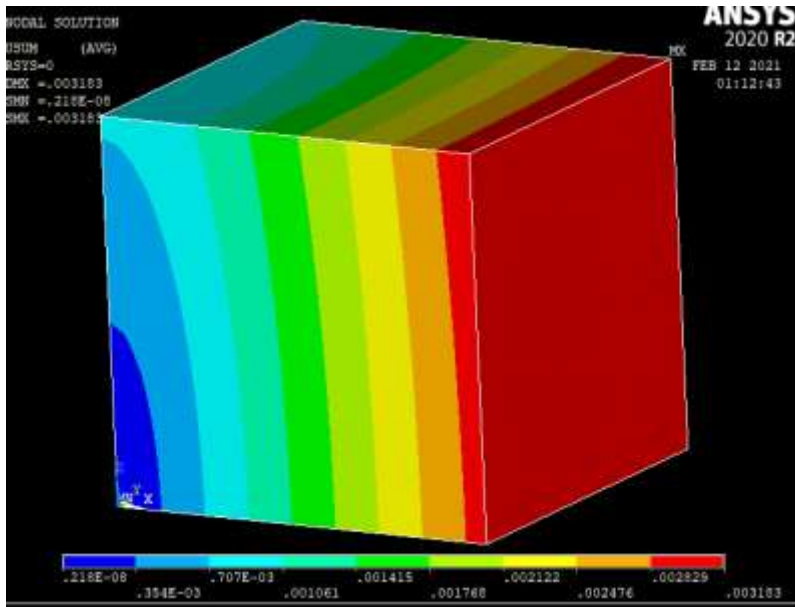
**Εικόνα 6.42 :**



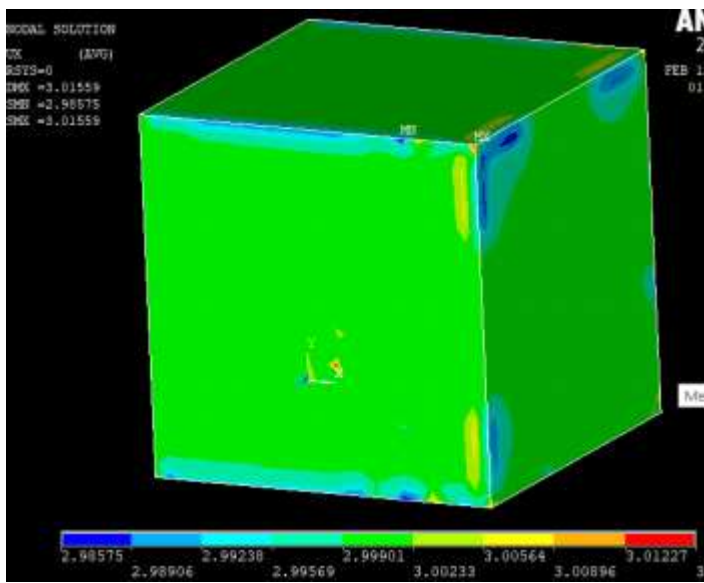
Εικόνα 6.43 :



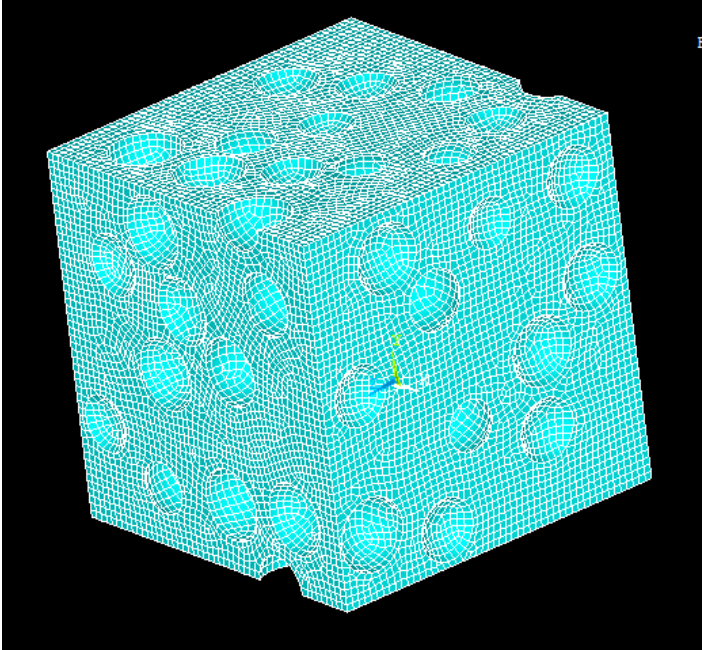
Εικόνα 6.44 :



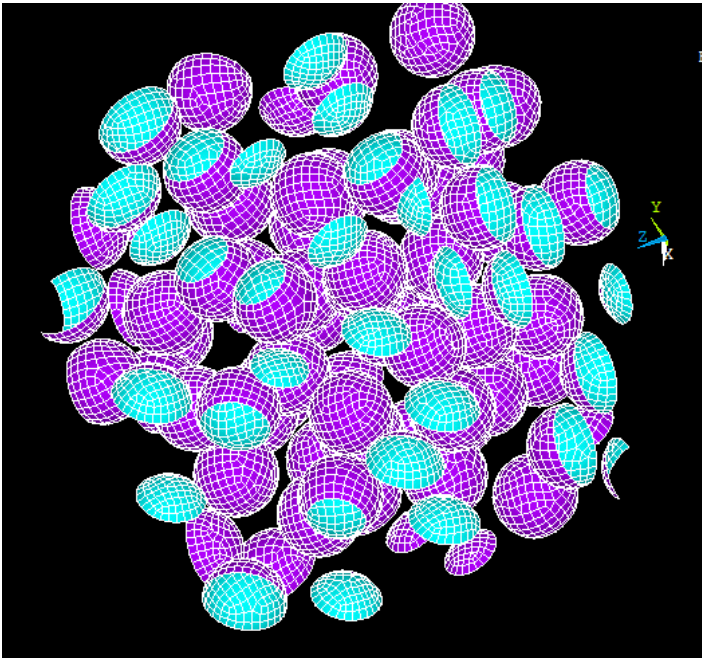
Εικόνα 6.45 :



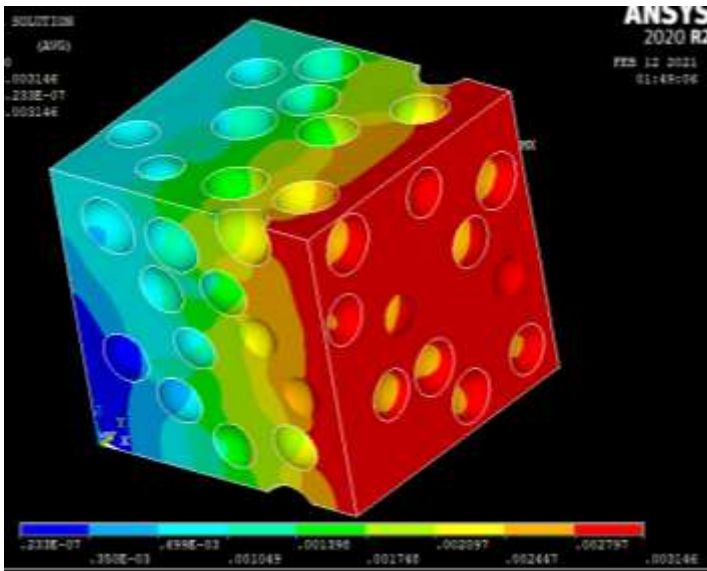
Εικόνα 6.46 :



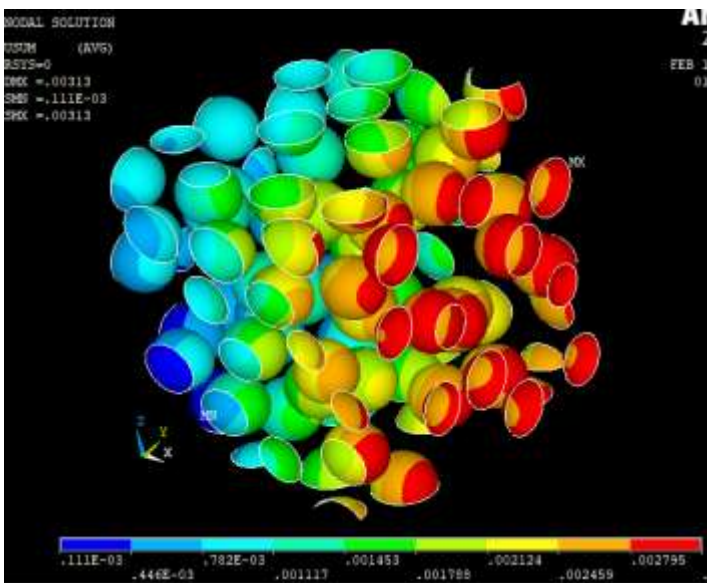
Εικόνα 6.47 :



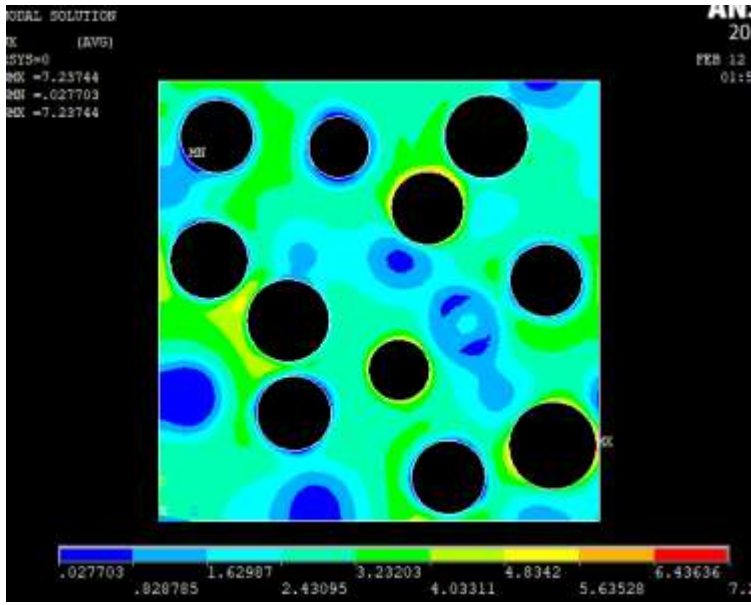
Εικόνα 6.48 :



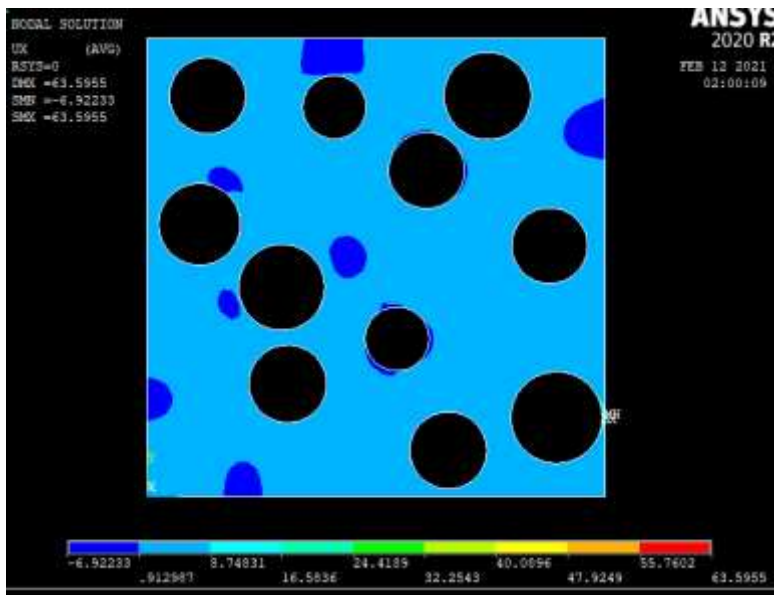
**Εικόνα 6.49 :**



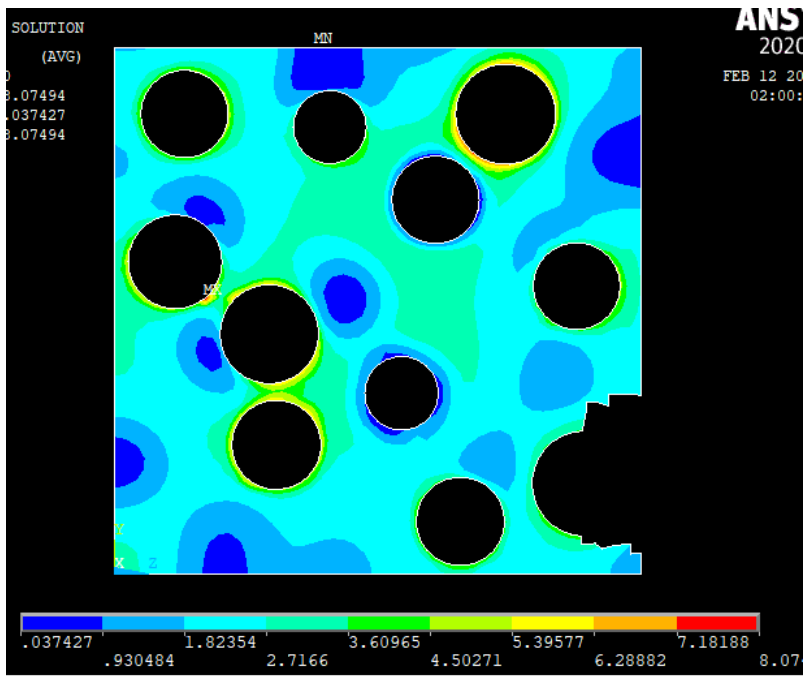
**Εικόνα 6.50 :**



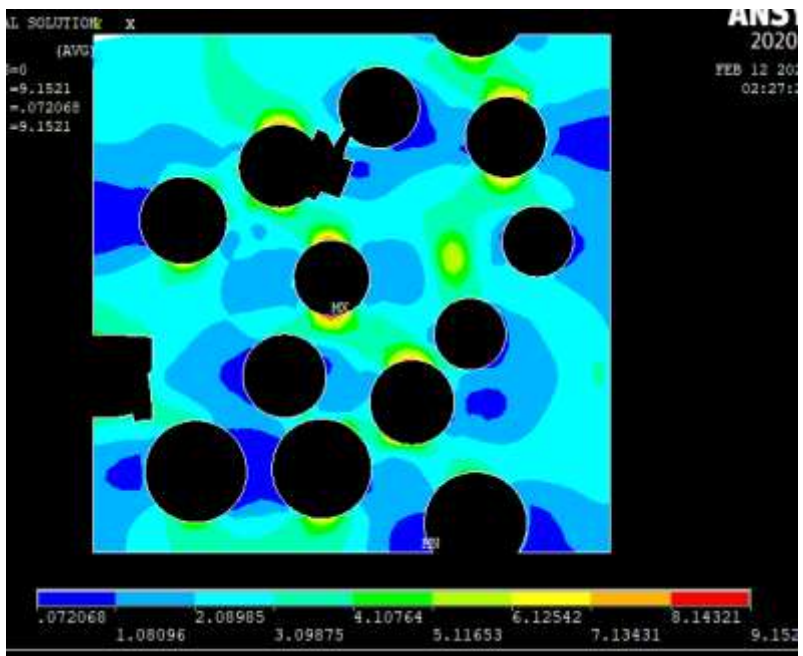
Εικόνα 6.51 :



Εικόνα 6.52 :

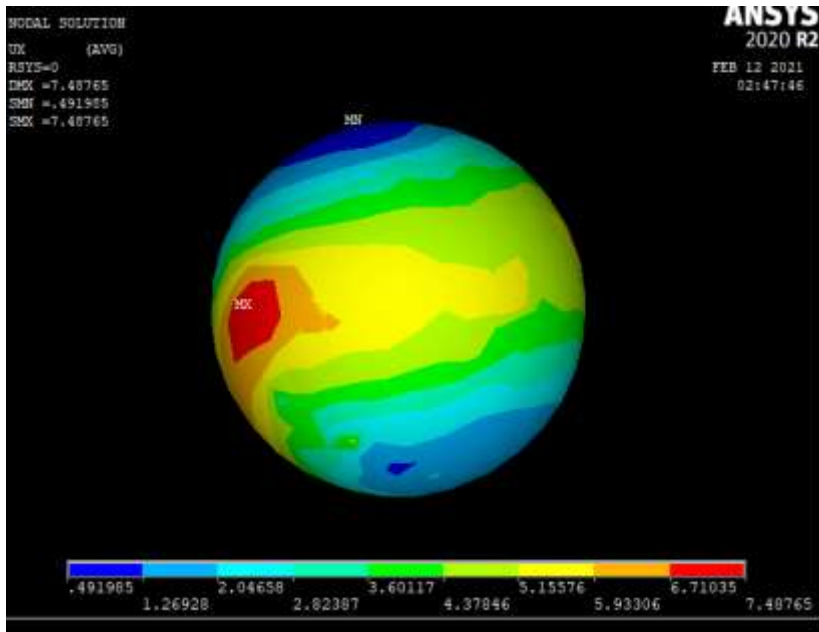


Εικόνα 6.53 :



Εικόνα 6.54





Εικόνα 6.55



## 7. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Aerogel based thermal insulating cementitious composites: A review Suman Kumar Adhikary a, Deepankar Kumar Ashish b,c, Zymantas Rudz̄ionis a.
2. Periodic boundary condition and its numerical implementation algorithm for the evaluation of effective mechanical properties of the composites with complicated micro-structures.

## 8. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Στο παρακάτω κεφάλαιο θα εκτιμηθούν οι μηχανικές ιδιότητες ενός στοιχείου όγκου αναφοράς (RVE) εντός του υπολογιστικού περιβάλλοντος ANSYS, καθώς και χρήση της `fortran` για βέλτιστη κατανόηση και εξαγωγή των αποτελεσμάτων. Το RVE έχει μήκος πλευράς (`len_rve`)= 5 mm, ακτίνα σφαιρών αερογέλης (`rad_void`)=0.5mm και μήκος στοιχείου (`elem_size`) = 0.3. Για την μελέτη αυτή θα δημιουργηθούν εντός του RVE 85 φυσαλίδες αερογέλης με δεδομένες τις συντεταγμένες των κέντρων τους.

Ξεκινώντας, το βασικότερο δεδομένο για την αρχή της μελέτης ήταν οι συντεταγμένες των κέντρων των σφαιρών αερογέλης εντός του RVE στις διευθύνσεις  $x, y, z$ . Οι συντεταγμένες αυτές δόθηκαν μέσω του προγράμματος `Digimat`. Έπειτα ορίστηκαν οι βασικές παράμετροι του προβλήματος και έλαβαν τις αντίστοιχες τιμές.

```
/PREP7
!-----SET the parameters of the problem-----
len_rve =      5.0      ! mm
rad_void = 0.5 ! mm
nvoid =      85
elem_size=0.3

!-----DEFINE the array for the centers of the voids-----
*DIM,xc_void,,nvoid
*DIM,yc_void,,nvoid
*DIM,zc_void,,nvoid
```

### Εικόνα 8.1: Αρχικές συνθήκες προβλήματος

Μετά, εξάχθηκαν μέσω του προγράμματος `Digimat` οι διευθύνσεις των κέντρων στις αντίστοιχες διευθύνσεις  $x, y, z$

xc_void(1)	=3,32385E-005
xc_void(2)	=4,78917E-005
xc_void(3)	=-0,210835E-005
xc_void(4)	=4,7891E-005
xc_void(5)	=-0,210835E-005
xc_void(6)	=2,6346E-005
xc_void(7)	=2,6346E-005
xc_void(8)	=2,6346E-005
xc_void(9)	=1,80596E-005
xc_void(10)	=4,44314E-005

yc_void(1)	= 3,60621E-005
yc_void(2)	=2,57024E-00
yc_void(3)	=2,57024E-005
yc_void(4)	=2,57024E-005
yc_void(5)	=2,57024E-005
yc_void(6)	=4,50957E-005
yc_void(7)	=-0,490434E-005
yc_void(8)	=4,50957E-005
yc_void(9)	=4,41834E-005
yc void(10)	=0,124042E-005

zc_void(1)	=4,06214E-005
zc_void(2)	=0,131724E-005
zc_void(3)	=0,131724E-005
zc_void(4)	=5,13172E-005
zc_void(5)	=5,13172E-005
zc_void(6)	=5,26278E-005
zc_void(7)	=0,262785E-005
zc_void(8)	=0,262785E-005
zc_void(9)	=4,4415E-005
zc_void(10)	=2,48925E-005

**Εικόνες 8.2, 8.3, 8.4:** Ενδεικτικές τιμές των κέντρων των φυσαλίδων αερογέλης εντός του RVE στους εκάστοτε άξονες.

Στη συνέχεια, έχοντας γνωστές τις θέσεις των κέντρων δημιουργήθηκε το RVE μαζί με τις φυσαλίδες αερογέλης ορισμένες στο χώρο, σύμφωνα με τις συντεταγμένες τους.

```
!-----SET the parameters of the problem-----
!nvoid=2
!----- create n_void voids
*DO,ivoid,1, nvoid

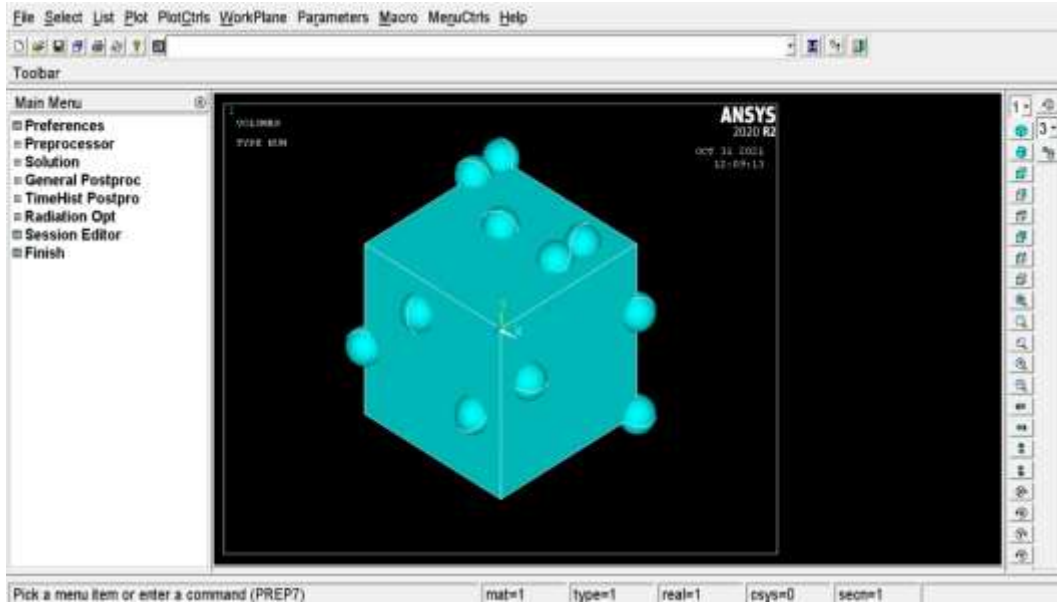
      wpro,25.000000,,
      wpro,,75.000000,
      wpro,,,55.000000
      SPH4,,,rad_void
      !          VGEN, ,4*(ivoid-1)+1,,,xc_void(ivoid),yc_void(ivoid),zc_void(ivoid),,,1
      VGEN, ,ivoid,,,xc_void(ivoid),yc_void(ivoid),zc_void(ivoid),,,1

      !          MPAVE, xc_void(ivoid),yc_void(ivoid),zc_void(ivoid)
      !          VSBW,ALL
      !          wpro,,,90.000000
      !          VSBW,ALL,,DELETE
      !          WPCSYS,-1,0
      !NUMCMP,VOLU
      VSEL,U,,,ALL
*ENDDO ! ivoid

WPCSYS,-1,0
VSEL,ALL
NUMCMP,VOLU

!----- create the RVE
BLOCK,0.0,len_rve,0.0,len_rve,0.0,len_rve
```

**Εικόνα 8.8:** Μπλοκ εντολών για τη δημιουργία των σφαιρών αερογέλης, καθώς και την δημιουργία του κυβικού RVE.



**Εικόνα 8.9:** Αποτύπωση του κυβικού RVE μαζί με τις τυχαία κατανομημένες σφαίρες αερογέλης στην επιφάνεια του.

Αξίζει να σημειωθεί επίσης, πως κατά τη διάρκεια σύνταξης του αλγορίθμου, για διευκόλυνση στη διακριτοποίηση οι σφαίρες χωρίστηκαν σε 2 μέρη σε τυχαίες γωνίες κάθε σφαίρα .Επιπλέον ,οι σφαίρες αερογέλης, καθώς και ο κύβος στην παρούσα μορφή τους έχουν δημιουργηθεί, όντας συμπαγή αντικείμενα κάτι το οποίο προφανώς δεν είναι σωστό.

```

|----- Delete volumes and keep the areas
VDELE,ALL
| renumber the areas
NUMCMP,AREA
ASEL, ALL
*GET,narea,AREA,0,NUM,MAX

*DIM,is_area_of_void,,narea
| initialization
*DO,iarea,1,narea
is_area_of_void(iarea) = 1
*ENDDO ! iarea

ASEL,S,LOC,X,0
*GET,area_id_x_0,AREA,0,NUM,MAX
is_area_of_void(area_id_x_0) = 0
ASEL,S,LOC,X,len_rve
*GET,area_id_x_len_rve,AREA,0,NUM,MAX
is_area_of_void(area_id_x_len_rve) = 0

ASEL,S,LOC,Y,0
*GET,area_id_y_0,AREA,0,NUM,MAX
is_area_of_void(area_id_y_0) = 0

ASEL,S,LOC,Y,len_rve,len_rve
*GET,area_id_y_len_rve,AREA,0,NUM,MAX
is_area_of_void(area_id_y_len_rve) = 0

ASEL,S,LOC,Z,0
*GET,area_id_z_0,AREA,0,NUM,MAX
is_area_of_void(area_id_z_0) = 0

ASEL,S,LOC,Z,len_rve
*GET,area_id_z_len_rve,AREA,0,NUM,MAX
is_area_of_void(area_id_z_len_rve) = 0

ASEL, ALL

*DO,iarea,1,narea
  *IF,is_area_of_void(iarea),EQ,1,THEN
    AREVERSE,iarea,0
  *ENDIF

```

**Εικόνα 8.10:** Μπλοκ εντολών για την αφαίρεση του όγκου των σφαιρών αλλά και εντολές για την ονομασία των πλευρών του κυβικού RVE και των κενών (voids) με στόχο την τοποθέτησή τους σε συγκεκριμένες θέσεις για ευκολότερη εξαγωγή των μετέπειτα αποτελεσμάτων.

Το επόμενο βήμα στην παρούσα μελέτη είναι η διακριτοποίηση του RVE. Συνεπώς, συντάχθηκε ο παρακάτω κώδικας με στόχο την σωστή και εύστοχη διακριτοποίηση ώστε να είναι πιο πλήρης και ευδιάκριτη η απεικόνιση των τελικών αποτελεσμάτων και η εξαγωγή τους.

```

elem size=0.1
! mesh the geometry
ET,1,SHELL281
LESIZE,ALL,elem_size,,,,,,,,,1
! mesh the voids
MSHAPE,0,20
MSHEXY,0
AMESH,ALL

! mesh the bounds
!
ASEL,S,,,area_id_x,0
AMESH,area_id_x,0
IASEL,A,,,area_id_x_len_rve
HMSCOPY,AREA,area_id_x,area_id_x_len_rve,0,len_rve,0,0,0.01,
IASEL,S,,,area_id_x_len_rve
LESIA,S
LEMSYN, , , ,ALL
IAREVERSE,area_id_x_len_rve,0
!
ASEL,S,,,area_id_y,0
AMESH,area_id_y,0
IASEL,A,,,area_id_y_len_rve
HMSCOPY,AREA,area_id_y,area_id_y_len_rve,0,0,len_rve,0,0,0.0001,
IASEL,S,,,area_id_y_len_rve
LESIA,S
LEMSYN, , , ,ALL
IAREVERSE,area_id_y_len_rve,0

!
ASEL,S,,,area_id_z,0
AMESH,area_id_z,0
IASEL,A,,,area_id_z_len_rve
HMSCOPY,AREA,area_id_z,area_id_z_len_rve,0,0,0,len_rve,0,0.0001,
IASEL,S,,,area_id_z_len_rve
LESIA,S
LEMSYN, , , ,ALL
IAREVERSE,area_id_z_len_rve,0
!
!!!!
ALLSEL,ALL

```

**Εικόνα 8.10 :** Μπλοκ εντολών για διακριτοποίηση του RVE αλλά και για την αντιστροφή των πλευρών για σωστότερη αποτύπωση των συνοριακών συνθηκών.

Έπειτα συντάχθηκε κώδικας ο οποίος θα καταγράφει και θα κατατάσσει τα στοιχεία και τους κόμβους του RVE σε λίστες σύμφωνα με την θέση στην οποία βρίσκονται ενώ θα δημιουργούνται αρχεία προς ανάγνωση με σκοπό την μετέπειτα επεξεργασία τους στο πρόγραμμα της fortran.

```

! write the nodes of the model
*GET,nnode,MODE,0,NUM,MAX
*DIM,nnode_id,,nnode
*DIM,nnode_x,,nnode
*DIM,nnode_y,,nnode
*DIM,nnode_z,,nnode

*D0,inode,1,nnode
      nnode_id(inode) = inode
      nnode_x(inode)=NX(inode)
      nnode_y(inode)=NY(inode)
      nnode_z(inode)=NZ(inode)
*ENDDO

*CFOPEN,nodes,TXT|
*VWRITE,nnode
(e14.7)
*VWRITE,nnode_id(1),nnode_x(1),nnode_y(1),nnode_z(1)
(e14.7,2x,e14.7,2x, E14.7,2x,e14.7)
*CFCLOSE
!*DEL,nnode_id
!*DEL,nnode_x
!*DEL,nnode_y
!*DEL,nnode_z

```

**Εικόνα 8.11** : Μπλοκ εντολών για καταγραφή και αρίθμηση των κόμβων του κυβικού RVE καθώς και δημιουργία του εγγράφου που εμπεριέχει όλους τους κόμβους.



```

! write the elems of the model
*GET,nelem,ELEM,0,NUM,MAX

*DIM,nelem_id,,nelem
*DIM,conne_1,,nelem
*DIM,conne_2,,nelem
*DIM,conne_3,,nelem
*DIM,conne_4,,nelem
*DIM,conne_5,,nelem
*DIM,conne_6,,nelem
*DIM,conne_7,,nelem
*DIM,conne_8,,nelem

*DO,ielem,1,nelem
  nelem_id(ielem) = ielem
  conne_1(ielem) = NELEM(ielem,1)
  conne_2(ielem) = NELEM(ielem,2)
  conne_3(ielem) = NELEM(ielem,3)
  conne_4(ielem) = NELEM(ielem,4)
  conne_5(ielem) = NELEM(ielem,5)
  conne_6(ielem) = NELEM(ielem,6)
  conne_7(ielem) = NELEM(ielem,7)
  conne_8(ielem) = NELEM(ielem,8)
*ENDDO

*CFOPEN,elems,TXT
*WRITE,nelem
(e14,7)
*WRITE,nelem_id(1),conne_1(1),conne_2(1),conne_3(1),conne_4(1),conne_5(1),conne_6(1),conne_7(1),conne_8(1)
(9(e14,7,1x))
*CFCLOSE

```

**Εικόνα 8.12 :** Μπλοκ εντολών για καταγραφή και αρίθμηση των στοιχείων του κυβικού RVE καθώς και δημιουργία του εγγράφου που εμπεριέχει όλα τα στοιχεία.

```

! write the elems attached to x=0
ASEL,S,,,area_id_x_0
ESLA,S
*GET,nelem_sel,ELEM,0,COUNT
*DIM,nelem_x_0,,nelem_sel
count = 0
*DO,ielem,1,nelem
    *IF, ESEL(ielem),EQ,1,THEN
        count = count + 1
        nelem_x_0(count) = ielem
    *ENDIF
*ENDDO

*CFOPEN,elems_at_x_0,TXT

*VWRITE,nelem_sel
(e14.7,1x)
*VWRITE,nelem_x_0(1)
(e14.7,1x)
*CFCLOSE

! write the elems attached to x=len
ASEL,S,,,area_id_x_len_rve
ESLA,S
*GET,nelem_sel,ELEM,0,COUNT
*DIM,nelem_x_len_rve,,nelem_sel
count = 0
*DO,ielem,1,nelem
    *IF, ESEL(ielem),EQ,1,THEN
        count = count + 1
        nelem_x_len_rve(count) = ielem
    *ENDIF
*ENDDO

*CFOPEN,elems_at_x_len_rve,TXT
*VWRITE,nelem_sel
(e14.7,1x)
*VWRITE,nelem_x_len_rve(1)
(e14.7,1x)
*CFCLOSE

! write the elems attached to y=0

```

```

! write the elems attached to y=0
ASEL,S,,,area_id_y_0
ESLA,S
*GET,nelem_sel,ELEM,0,COUNT
*DIM,nelem_y_0,,nelem_sel
count = 0
*DO,ielem,1,nelem
    *IF, ESEL(ielem),EQ,1,THEN
        count = count + 1
        nelem_y_0(count) = ielem
    *ENDIF
*ENDDO

*CFOPEN,elems_at_y_0,TXT
*VWRITE,nelem_sel
(e14.7,1x)
*VWRITE,nelem_y_0(1)
(e14.7,1x)
*CFCLOSE

! write the elems attached to y=len
ASEL,S,,,area_id_y_len_rve
ESLA,S
*GET,nelem_sel,ELEM,0,COUNT
*DIM,nelem_y_len_rve,,nelem_sel
count = 0
*DO,ielem,1,nelem
    *IF, ESEL(ielem),EQ,1,THEN
        count = count + 1
        nelem_y_len_rve(count) = ielem
    *ENDIF
*ENDDO

*CFOPEN,elems_at_y_len_rve,TXT
*VWRITE,nelem_sel
(e14.7,1x)
*VWRITE,nelem_y_len_rve(1)
(e14.7,1x)
*CFCLOSE

! write the elems attached to z=0
ASEL,S,,,area_id_z_0
ESLA,S

```

```

! write the elems attached to z=0
ASEL,S,,area_id_z_0
ESLA,S
*GET,nelem_sel,ELEM,0,COUNT
*DIM,nelem_z_0,,nelem_sel
count = 0
*DO,ielem,1,nelem
    *IF, ESEL(ielem),EQ,1,THEN
        count = count + 1
        nelem_z_0(count) = ielem
    *ENDIF
*ENDDO

*CFOPEN,elems_at_z_0,TXT
*VWRITE,nelem_sel
(e14.7,1x)
*VWRITE,nelem_z_0(1)
(e14.7,1x)
*CFCLOSE

! write the elems attached to z=len
ASEL,S,,area_id_z_len_rve
ESLA,S
*GET,nelem_sel,ELEM,0,COUNT
*DIM,nelem_z_len_rve,,nelem_sel
count = 0
*DO,ielem,1,nelem
    *IF, ESEL(ielem),EQ,1,THEN
        count = count + 1
        nelem_z_len_rve(count) = ielem
    *ENDIF
*ENDDO

*CFOPEN,elems_at_z_len_rve,TXT
*VWRITE,nelem_sel
(e14.7,1x)
*VWRITE,nelem_z_len_rve(1)
(e14.7,1x)
*CFCLOSE
!

```

---

**Εικόνες 8.13, 8.14, 8.15** : Μπλοκ εντολών για καταγραφή και αρίθμηση των στοιχείων και των κόμβων του κυβικού RVE ανάλογα με την θέση τους στο RVE καθώς και η δημιουργία αντίστοιχων αρχείων για την ευκολότερη εξαγωγή αποτελεσμάτων.

Τέλος, τα αρχεία αυτά διαβάστηκαν από drivers συνταγμένους στη fortran με στόχο την σωστή κατάταξη των τιμών εντός των δημιουργημένων αρχείων και έπειτα την ανάγνωση των σωστά δομημένων αρχείων από το ANSYS ώστε να πραγματοποιηθεί η σωστή απεικόνιση των αποτελεσμάτων.