ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Σχολή μηχανικών
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Η/Υ

Δαμοράκης Ευτύχιος του Γεωργίου

Α.Μ.: 1201899

Επιβλέπων: Ιωάννης Κούγιας

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Είναι πασίγνωστο ότι τα συστήματα μελέτης των περισσότερων επιστημών περιγράφονται από μαθηματικές σχέσεις. Τα πλεονεκτήματα μιας τέτοιας περιγραφής είναι πολλά: ο μονοσήμαντος, επίσημος και αυστηρός ορισμός σημαντικών ποσοτήτων σε ένα συνεκτικό πλαίσιο, η αναγωγή περίπλοκων καταστάσεων σε ένα σύνολο κομψών εξισώσεων, η δυνατότητα εύρεσης αναλογιών μεταξύ φαινομενικά ασύνδετων συστημάτων μέσω μιας κοινής μαθηματικής περιγραφής και η ικανότητα θεωρητικής πρόβλεψης φαινομένων και καταστάσεων είναι μόνο μερικά από αυτά.

Αρχικά, παρουσιάζεται μια σύντομη ανασκόπηση της ιστορίας της επιστήμης, από την αρχαιότητα μέχρι και την εμφάνιση του ηλεκτρομαγνητισμού, που είναι και ο κλάδος ενδιαφέροντος αυτής της εργασίας. Δίνεται έμφαση στη σύμπνοια της εξέλιξης των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών, καθώς και στην εμφάνιση και εξέλιξη της ιδέας της μαθηματικής μοντελοποίησης φυσικών συστημάτων και προβλημάτων.

Στη συνέχεια δίνονται κάποια βασικά στοιχεία των μαθηματικών εργαλείων που υπεισέρχονται στην περιγραφή των ηλεκτρικών κυκλωμάτων. Αυτά είναι η παράγωγος, το ολοκλήρωμα και οι διαφορικές εξισώσεις, ενώ παρουσιάζεται και ένας χρήσιμος μετασχηματισμός, ο μετασχηματισμός Laplace, που πολλές φορές επιστρατεύεται.

Ακολουθεί η ανάλυση της λειτουργίας των τριών βασικών διατάξεων που εμφανίζονται σε γραμμικά κυκλώματα -του αντιστάτη, του πυκνωτή και του πηνίου- και η μαθηματική μοντελοποίηση αυτής της λειτουργίας.

Τέλος, παρουσιάζονται κάποιες εφαρμογές όπου χρησιμοποιούνται όλα τα παραπάνω για να μοντελοποιηθούν συγκεκριμένα κυκλώματα, να περιγραφεί η λειτουργία τους και να εξαχθούν χρήσιμες φυσικές ποσότητες που τα αφορούν.

ABSTRACT

It is a well-known fact that most sciences employ mathematics in order to describe several systems. Such a description has a whole lot of advantages: some of them are the univocal, formal and concrete definition of important quantities in a coherent context, the reduction of complicated situations to a set of elegant equations, the appearance of analogies between seemingly unrelated systems via their common mathematical description and the theoretical prediction of phenomena or situations.

First, a brief review of the history of science is presented, covering a broad era, from the ancient years until the discovery of electromagnetism, which the relevant branch of science, here. Emphasis is given on the common evolution of mathematics and natural sciences and, also, on the appearance and the subsequent development of mathematical modelling of physical systems and problems.

Afterward, some basic traits of mathematical tools pertaining the description of electrical circuits are given, namely derivatives, integrals and differential equations. Furthermore, a useful and common transform, namely the Laplace transform, relevant to the subject is presented.

Then, follows the study of the three most important elements pertaining to linear circuits -the resistor, the capacitor and the inductor- and the mathematical models of their function.

Finally, some specific applications are presented, where all the above are employed in order to model electrical circuits, to describe the way they work and to distill important physical quantities regarding them.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μια από τις κομβικότερες -αν όχι η κομβικότερη- αναζητήσεις κατά τη μελέτη ενός οποιουδήποτε συστήματος είναι η πρόβλεψη της συμπεριφοράς του. Δεν αποκλείονται, φυσικά, και οι περιπτώσεις όπου κάποιος ενδιαφέρεται για την εξαγωγή πληροφοριών περί του παρελθόντος ενός συστήματος (για παράδειγμα, σε μια μελέτη γεωλογίας που αναζητείται κάποιο μοτίβο στη δρατηριότητα ενός ηφαιστείου). Το υπό εξέταση σύστημα μπορεί να είναι οτιδήποτε: φυσικό, κοινωνικό, οικονομικό, υπολογιστικό. Επίσης, δεν μπορεί κανείς να αποκλείσει και το ενδεχόμενο να είναι στατικό, δηλαδή να μην υπάρχει καμία αλλαγή στην κατάστασή του. Ωστοσο, ακόμη και μια τέτοια κατάσταση, συνήθως κρύβει ενδιαφέρουσες πληροφορίες και μπορεί να αποκλαύψει πληροφορίες σχετικά με τους μηχανισμούς που οδήγησαν ή επιβάλλουν αυτή τη στατικότητα.

Ομαδοποιώντας όλες αυτές τις περιπτώσεις, και κρατώντας τη συζήτηση σε εντελώς γενικό επίπεδο, καταλαβαίνουμε ότι κοινός παρονομαστής όλων αυτών είναι η εύρεση της εξέλιξης του συστήματος στο χρόνο.

Αυτό δεν είναι πάντα απλή υπόθεση, θεωρητικά. Αλλά ακόμη κι αν υπάρχει ένας συμπαγής νόμος που αποδίδει με ευκρίνεια τη χρονική εξέλιξη, δεν είναι απαραίτητο ότι αυτός ο νόμος θα μπορεί και να τύχει επεξεργασίας ώστε να δώσει σαφή αποτελέσματα. Ένα τέτοιο, πολύ συνηθισμένο παράδειγμα κατανοητού νόμου, ο οποίος όμως στην πράξη δεν μπορεί πάντα να επιλυθεί, έρχεται από την κβαντομηχανική. Εκεί, η εξέλιξη ενός κλειστού συστήματος μπορεί να δοθεί μέσω της λεγόμενης εξίσωσης Schrodinger. Η εξίσωση αυτή είναι συμπαγής και κατανοητή –όλες οι ποσότητες που εμπλέκονται σε αυτή έχουν ξεκάθαρη σημασία. Ωστόσο, στην πράξη, η επίλυσή της είναι πάρα πολύ δύσκολη αναλυτικά. Για την ακρίβεια, τα συστήματα για τα οποία μπορεί να γίνει αυτό είναι μετρημένα, και μάλιστα τα περισσότερα απ' αυτά δεν είναι και πολύ ρεαλιστικά.

Όπως και να 'χει, αυτό που έχει σημασία εδώ είναι ότι αναφερόμαστε σε μια εξίσωση, δηλαδή ένα μαθηματικό αντικείμενο. Άρα, στην κβαντομηχανική επιστρατεύονται ιδέες από τα μαθηματικά για την περιγραφή των συστημάτων και την εξέλιξή τους. Αυτό το χαρακτηριστικό δεν περιορίζεται στην κβαντομηχανική –για την ακρίβεια, δεν περιορίζεται καν στη φυσική: διατρέχει σχεδόν όλες τις περιγραφές όπου αποζητείται ακρίβεια και μονοσήμαντος ορισμός, απ' όπου κι αν προέρχονται.

Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με φυσικά συστήματα, και συγκεκριμένα με τα ηλεκτρικά, τα οποία εμπίπτουν στο πεδίο ενδιαφέροντος και πολλών τεχνικών κλάδων, πέραν της φυσικής. Έτσι, από εδώ και μπρος οι θεωρήσεις μας περί μαθηματικών θα προέρχονται από αυτό το πλαίσιο.

Τα μαθηματικά χρησιμοποιούνται για να μελετήσουν τη φύση, να την αναλύσουν, να εντοπίσουν τα μυστικά της και να καταγράψουν αδιόρατες αρχές που διέπουν τη λειτουργία της. Γεωμετρικές ιδέες όπως τα σχήματα, οι δομές και οι συμμετρίες επιστρατεύονται για να εντοπίσουν μοτίβα και κρυμμένες αρχές, από το μακροσκοπικό επίπεδο μέχρι ακόμη και το υποατομικό. Επίσης, αυτές οι έννοιες πολλές φορές επεκτείνονται και εξετάζονται σε εντελώς νέα πλαίσια. Για παράδειγμα, το Θεώρημα της Noetherδιακυρήσσει ότι κάθε συμμετρία ενός συστήματος ισοδυναμεί με κάποιο διατηρήσιμο μέγεθος. Η ιδέα αυτή, από τότε που τοποθετήθηκε μαθηματικώς μέσω αυτού του θεωρήματος, έχει επεκτείνει την ίδια την έννοια της συμμετρίας έξω από τη χωρική της υπόσταση. Για παράδειγμα, η συμμετρία βαθμίδας, η οποία είναι και υπεύθυνη για τη διατήρηση του φορτίου, δύσκολα μπορεί να εικονοποιηθεί με έναν απλό τρόπο, όπως για παράδειγμα μπορούν να εικονοποιηθούν οι στροφές ή οι μετατοπίσεις: σε αυτό το πλαίσιο, μια έννοια της γεωμετρίας ξέφυγε εντελώς από τη συμβατική της υπόσταση.

Τα μαθηματικά εδώ και αιώνες έχουν διεισδύσει στις φυσικές περιγραφές σε τέτοιο βαθμό, ώστε πλέον να είναι αδιανόητη ακόμη και η πιο απλή φυσική τοποθέτηση χωρίς τη χρήση τους. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό δεν είναι καθόλου σίγουρο ότι μπορεί να απαντηθεί αυστηρά. Μια συχνή φιλοσοφική ερώτηση όταν συζητώνται αυτά τα θέματα είναι αν πράγματι τα μαθηματικά είναι η καλύτερη δύνατη «γλώσσα» περιγραφής της φύσης. Μπορεί να αποκλειστεί η εύρεση ή η επινόηση μιας άλλης περιγραφής στο μέλλον; Η απάντηση είναι όχι. Αλλά, με βάση τη σημερινή κατάσταση, τα μαθηματικά φαίνονται να έχουν καταλάβει σε τέτοιο βαθμό τις φυσικές επιστήμες, ώστε πολλές φορές να εξελίσσονται ταυτόχρονα, ή ακόμα και να επινοούνται μαθηματικές περιγραφές για να περιγράψουν φυσικά συστήματα ή θεωρίες! Αυτό ακριβώς συμβαίνει, για παράδειγμα, σε μια από τις πιο σύγχρονες, ενδιαφέρουσες, ταχέως αναπτυσσόμενες και ελπιδοφόρες θεωρίες φυσικής σήμερα, τη θεωρία χορδών. Η θεωρία αυτή στοχεύει στην εγκαθίδρυση ενός μαθηματικού μοντέλου που θα μπορεί να περιγράψει με ενιαίο τρόπο και τις τέσσερις αλληλεπιδράσεις της φύσης (υπάρχει ήδη το Καθιερωμένο Πρότυπο που περιγράφει τις τρεις· του «αντιστέκεται» η βαρύτητα). Ωστόσο, απαιτεί ιδιαίτερες μαθηματικές τεχνικές και αντικείμενα, οπότε οι ανάγκες που εμφανίζονται στο πλαίσιο της μελέτης αυτής της θεωρίας, κατά κάποιο τροπό, καθοδηγούν την ανάπτυξη των μαθηματικών προς συγκεκριμένες κατευθύνσεις.

Γενικότερα, όχι μόνο σήμερα αλλά εδώ και αιώνες, υπάρχουν τα λεγόμενα καθαρά μαθηματικά και τα λεγόμενα εφαρμοσμένα. Τα πρώτα δεν έχουν -ακόμη!- εφαρμογή σε άλλους κλάδους ενώ τα δεύτερα έχουν. Μέσα στα δεύτερα υπάρχουν κάποιοι κλάδοι που βρίσκουν θέση μόνο σε συγκεκριμένες περιοχές μελέτης. Ωστόσο, πολλές φορές στην ιστορία της ανθρωπότητας, έννοιες και τεχνικές χρήσιμες σε έναν κλάδο, βρέθηκε ότι μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν και σε άλλους. Παρομοίως, ζητήματα που θεωρούνταν ανεφάρμοστα σε φυσικές επιστήμες, ωρίμασαν οι συνθήκες για να εφαρμοστούν ή βρέθηκαν συστήματα που απαίτησαν τη χρήση τους. Για παράδειγμα, η θεωρία ομάδων, που αναπτύχθηκε αρχικά από τους Cauchyκαι Galoisστα μέσα του 19^{ου} αιώνα, έμοιαζε για πάρα πολλά χρόνια να παρουσιάζει ενδιαφέρον μόνο για τους μαθηματικούς. Ωστόσο, λίγο μετά τα μέσα του 20^{ου} αιώνα, όταν άρχισε να αναπτύσσεται αυτό που σήμερα είναι γνωστό ως Καθιερωμένο Πρότυπο, φάνηκε πολύ χρήσιμη στη μελέτη των στοιχειωδών σωματιδίων. Παρόμοια ιστορία έχει και η θεωρία αριθμών, που επί αιώνες ήταν ένας αμιγώς μαθηματικός κλάδος· παρ’ όλα αυτά σήμερα είναι κομβικής σημασίας για την κρυπτογραφία.

Εξετάζοντας δομικά τους δύο κλάδους, τα μαθηματικά και τις εφαρμοσμένες επιστήμες, στην πραγματικότητα ίσως να μην είναι και τόσο παράξενο που είναι στενά συνδεδεμένοι: και οι δύο μοιράζονται μία κοινή βάση στον τρόπο λειτουργίας τους και αυτή είναι η εξαγωγή συμπερασμάτων από υποθέσεις με βάση τη λογική. Η διαίσθηση είναι νευραλγικής σημασίας και για τα δύο, όπως και ο πειραματισμός. Φυσικά, υπάρχει μια σημαντική διαφορά: οι φυσικές επιστήμες απαιτείται να έρχονται με εμπειρικές αποδείξεις, ενώ τα μαθηματικά όχι. Από την άλλη, δεν είναι λίγοι οι μαθηματικοί που αναγνωρίζουν την άρρηκτη σύνδεση των μαθηματικών με την επιστήμη, και το ρόλο που έπαιξαν οι ανάγκες συγκεκριμένων πεδίων στην ανάπτυξη κάποιου μαθηματικού κλάδου. Σε αυτό το πλαίσιο προκύπτει και η φιλοσοφική διαφωνία αν τα μαθηματικά ανακαλύπτονται, άρα είναι επιστήμη, ή δημιουργούνται, άρα είναι τέχνη.

Ένας άλλος λόγος που τα μαθηματικά υπεισέρχονται τόσο έντονα σε εφαρμογές, είναι ο ευέλικτος φορμαλισμός τους. Σε αρχάριους μελετητές της επιστήμης -για παράδειγμα σε μαθητές- ο φορμαλισμός των μαθηματικών με τα τόσα σύμβολα, τις μεταβλητές και τις σχέσεις μοιάζει να είναι χαοτικός και δύσχρηστος. Στην πραγματικότητα όμως, ο συμβολισμός είναι απελευθέρωση. Για την ακρίβεια, επί αιώνες τα μαθηματικά γράφονταν με λόγια. Μόλις το 15ο αιώνα περίπου άρχισαν κάποια σύμβολα να μπαίνουν στην περιγραφή, με κύριο υπεύθυνο για αυτό το μαθηματικό LeonardEuler. Η μαθηματική γλώσσα, παρότι στην αρχή μπορεί να μοιάζει στριφνή, αποδίδει σε καθημερινές εκφράσεις αυστηρότητα και ακρίβεια. Το ότι μια ποσότητα ισούται με κάποια άλλη είναι σίγουρα σαφές ακόμη κι αν εκφραστεί με λόγια. Όμως δεν είναι πάντα βολικό: το να λυθεί μια εξίσωση δεύτερου βαθμού χωρίς τη χρήση συμβολισμού μοιάζει χαοτικό. Δεν είναι τυχαίο ότι η Νευτώνεια μηχανική, με το σημερινό συμβολισμό, μπορεί να χωρέσει σε μερικές σελίδες. Αντιθέτως, ο Νεύτωνας που έζησε σε εποχή που ο συμβολισμός αυτός δεν είχε αναπτυχθεί στο σημερινό βαθμό, χρειάστηκε πάνω από πεντακόσιες σελίδες για να γράψει ακριβώς τις ίδιες ιδέες. Ο συμβολισμός, μόλις γίνει κατανοητός, απελευθερώνει, αποσαφηνίζει και συντομεύει.

Υπάρχουν πλέον πάρα πολλά μαθηματικά αντικείμενα και σύμβολα. Κάποια έχουν νόημα τόσο στον καθημερινό λόγο όσο και στα μαθηματικά (πχ αν, ή, συνεπάγεται, ισοδυναμεί, σύνολο), κάποια έχουν νόημα πάλι και στα δύο πλαίσια, απλώς διαφορετικό (πχ συμπαγές, ομάδα, πεδίο) και κάποια είναι αμιγώς μαθηματικές ορολογίες (πχ ομοιομορφισμός, άλγεβρα Lie, παραγωγίσιμη).

Όπως και να ‘χει, στο πλαίσιο της συγκεκριμένης εργασίας θα αντιμετωπίσουμε τα μαθηματικά όχι από τη φιλοσοφική τους σκοπιά, αλλά από την πρακτική τους. Δε θα επικεντρωθούμε ιδιαίτερα στην επινόηση ή ανακάλυψή τους, αλλά πολύ περισσότερο θα τα χρησιμοποιήσουμε σαν μια γλώσσα, με την οποία θα περιγράψουμε κάποιες διατάξεις και συστήματα που παρουσιάζουν πάρα πολύ ενδιαφέρον σε σωρεία πρακτικών εφαρμογών.

Αφού δόθηκε μια πρώτη πολύ γενικά συζήτηση πάνω στα μαθηματικά και στη σχέση τους με διάφορες εφαρμογές, στο Δεύτερο Κεφάλαιο θα επιχειρήσουμε να δώσουμε μια σύντομη αλλά όσο το δυνατόν πιο περιεκτική ιστορική αναδρομή της συσχέτισης των μαθηματικών με τις θετικές επιστήμες και την τεχνολογία. Στο Τρίτο Κεφάλαιο θα αρχίσουμε να επικεντρωνόμαστε στο αντικείμενο μελέτης αυτής της εργασίας, που είναι τα ηλεκτρικά συστήματα. Εκεί θα αναφερθούμε σε κάποια πολύ σημαντικά εργαλεία από το οπλοστάσιο των μαθηματικών, τα οποία βρίσκονται σε άμεση σύνδεση με τη μελέτη τέτοιων συστημάτων, προσπαθώντας κάθε φορά να δίνουμε και το λόγο ύπαρξης αυτών των εργαλείων στο πλαίσιο της μελέτης μας. Στο Τέταρτο Κεφάλαιο θα γίνουμε αρκετά πιο συγκεκριμένοι: θα δείξουμε τον τρόπο που μοντελοποιούνται κάποιες πολύ σημαντικές διατάξεις οι οποίες αποτελούν τη βάση ανάπτυξης εφαρμογών και εμφανίζονται συνεχώς σε εντελώς πρακτικές εφαρμογές συστημάτων και σε μια ευρεία γκάμα κλάδων. Τέλος, το Πέμπτο Κεφάλαιο θα περιέχει συγκεκριμένες εφαρμογές όλων των ιδεών που παρουσιάστηκαν στο Τρίτο και στο Τέταρτο: θα παρουσιάσουμε ρεαλιστικά συστήματα και κυκλώματα και θα εξηγήσουμε με έναν ολοκληρωμένο και συμπαγή τρόπο το πώς μπορούν να εξαχθούν συμπεράσματα για αυτά από τη μοντελοποίησή τους μέσω των μαθηματικών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

1. Αρχαιότητα

Ακόμη και οι ιστορικοί της επιστήμης και των μαθηματικών πολύ συχνά διαφωνούν σχετικά με το τι ακριβώς σηματοδοτεί το ξεκίνηματης συσχέτισης των δύο κλάδων.

Οι περισσότεροι, πάντως, συμφωνούν για την προέλευση των μαθηματικών: όλα ξεκινάνε από την εμπέδωση της ιδέας του αριθμού. Αυτή η εμπέδωση είναι απολύτως προφανής διαισθητικά ακόμη και από πολύ μικρές ηλικίες –για την ακρίβεια δεν εξαντλείται μόνο στους ανθρώπους. Ακόμη και ένα ζώο μπορεί να διακρίνει τη διαφορά ανάμεσα σε δύο και σε έξι οντότητες. Φυσικά, η νοημοσύνη του απέχει πάρα πολύ από το να τοποθετήσει αυτή τη διαφορά σε ένα συγκεκριμένο σύστημα και να το διαχειριστεί για να λύσει προβλήματα, όμως η ιδέα του αριθμού είναι εκεί.

Παρομοιώς, οι πρωτόγονοι πολιτισμοί καταλάβαιναν τους αριθμούς και σιγά σιγά άρχισαν με το πέρασμα των χρόνων να δημιουργούνται και τα πρώτα συστήματα. Η εφαρμογή τους σε πρακτικά προβλήματα, όπως φερ’ ειπείν στο μοίρασμα τροφής, είναι αμφιλεγόμενο αν μπορεί να θεωρηθεί «επιστήμη».

Οι περισσότεροι μελετητές, πάντως, συμφωνούν ότι οι πρώτες ενδείξεις επιστημονικής σκέψης εμφανίστηκαν στην Αίγυπτο μεταξύ 3000πΧ και 1200πΧ. Περίπου το 3000πΧ οι αρχαίοι Αιγύπτιοι είχαν ήδη αναπτύξει αριθμητικό σύστημα και, επιπλέον, είχαν γνώσεις γεωμετρίας. Όμως το σημαντικότερο είναι ότι αυτές τις γνώσεις τις είχαν προσανατολίσει στην επίλυση προβλημάτων τοπογραφίας και αρχιτεκτονικής. Όπως πάντα, αυτό ξεκίνησε από μια απολύτως πρακτική ανάγκη: ήταν συχνό φαινόμενο ο Νείλος να υπερχειλίζει και να πλημμυρίζει τα χωράφια. Όταν τα ύδατα επανέρχονταν στην κοίτη του ποταμού, κάπως έπρεπε να βρεθεί ποια γη ανήκε αρχικά στον καθένα. Εκεί ήταν που άρχισε να επιστρατεύεται η γεωμετρία, για τον υπολογισμό της έκτασης που ανήκε σε κάποιον και για τη μέτρηση εκτάσεων μετά την πλημμύρα. Επίσης, είχαν ημερολόγιο: βέβαια, είχε δώδεκα τριανταήμερους μήνες και πέντε μέρες στο τέλος κάθε έτους, αλλά πάντως ήταν ημερολόγιο, και φυσικά, εφόσον είχαν ταυτίσει τη διάρκειά του έτους τους με περίπου τη διάρκεια μιας περιφοράς της γης γύρω από τον ήλιο, ήξεραν και αστρονομία.

Φυσικά, παρά τα επιτεύγματά τους, απείχαν πολύ από την επιστημονική σκέψη: οι αρρώστιες τους θεωρούσαν ότι ήταν το αποτέλεσμα της εισβολής κακών πνευμάτων στο σώμα και μέθοδος θεραπείας δεν ήταν μόνο τα «φάρμακα», αλλά και οι εξορκισμοί, τα τελετουργικά και τα ξόρκια.Ωστόσο, είχαν ξεκινήσει.

Μια παρόμοια σύγχυση μεταξύ επιστήμης και μαγγανείας υπήρχε και σε άλλους αρχαίους πολιτισμούς. Στη Μεσοποταμία ήξεραν μεταλλουργία και αρκετή χημεία για να κατασκευάσουν γυαλί και μελετούσαν εκτενώς τη φυσιολογία των ζώων –πλην όμως γιατί την εφάρμοζαν για να προφητεύουν. Την ίδια στιγμή, είχαν καταφέρει να φτάσουν στις Πυθαγόρειες τριάδες, δηλαδή σε τριάδες αριθμών που μπορούν να αποτελούν μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου, και η αστρονομία τους επηρεάζει ακόμη και τα σημερινά ημερολόγια –είχαν ηλιακό έτος και σεληνιακό μήνα.

Οι Ινδοί, μεταξύ 4000πΧ και 3000πΧ κατασκεύαζαν τούβλα με λόγους πλευρών 4:2:1, είχαν επινοήσει μέτρο μήκους και είχαν χάρακες χωρισμένους σε ίσα μέρη. Αργότερα, το 499πΧ ο Aryabhata επινόησε το ημίτονο, ενώ το 628μΧ ο Brahmagupta πρώτος διείδε τη σημασία του αριθμού 0 ως κάποιο σημείο αρχής και ως δεκαδικό ψηφίο και ταυτόχρονα πρότεινε ότι η βαρύτητα είναι μια ελκτική δύναμη –πάνω από 1000 χρόνια πριν γεννηθεί ο Νεύτωνας.

Στην Κίνα, τον 1^{ο} αιώνα πΧ είχαν ήδη αρνητικούς αριθμούς, κλάσματα, έλυναν γραμμικές εξισώσεις και έβρισκαν ρίζες πολυωνύμων ανώτερης τάξης. Η αστρονομία τους ήταν πολύ προχωρημένη και το ίδιο και οι εφευρέσεις τους: το 2^{ο} αιώνα μΧ εφηύραν σεισμογράφο –παρότι ο εφευρέτης του θεωρούσε ότι ο σεισμός προκύπτει από την απότομη συμπίεση παγιδευμένου αέρα. Είχαν πρωτοφανή κατανόηση πάνω σε όργανα πλοήγησης -πιθανότατα είναι οι πρώτοι που βρήκαν τη μαγνητική βελόνα και τον αληθινό βορρά-, και αξίζει να αναφέρουμε ότι είχαν μια μορφή τυπογραφίας ήδη από τον 11^{ο} αιώνα μΧ, ενώ την ίδια εποχή ανέπτυσσαν θεωρίες περί κλιματικών αλλαγών, γεωμορφολογίας και αστρικών κινήσεων.

Επομένως, βλέπουμε σειρά πολιτισμών να εξασκούν πρώιμες εκδοχές αυτού που σήμερα ονομάζεται επιστήμη, και την ίδια στιγμή ανέπτυσσαν μαθηματικά, πιο θεμελιώδη και «καθημερινά» μεν από τα σημερινά, αλλά πάντως μαθηματικά.

Στην φυσική φιλοσοφία που αναπτύχθηκε την εποχή της κλασικής αρχαιότητας στην Ελλάδα, οι γνώσεις των αρχαίων Αιγυπτίων και των Μεσοποτάμιων άρχισαν σταδιακά να τοποθετούνται σε ένα συγκεκριμένο λογικό πλαίσιο. Οι αρχαίοι Έλληνες έθεταν ερωτήσεις και ακολούθησαν, σε επίσημο επίπεδο, λογικές που ακολουθούμε μέχρι και σήμερα: προσπαθούσαν να εξηγήσουν γεγονότα και φαινόμενα μέσω νόμων της φύσης και, μάλιστα, έβαζαν τις γνώσεις τους σε πρακτικά πλαίσια, όπως στη διαμόρφωση ενός αξιόπιστου ημερολόγιου.

Μέσα σε αυτά τα πλαίσια, και στην προσπάθεια λογικής θεμελίωσης του κόσμου, άρχισαν να εμφανίζονται σκέψεις πολύ προχωρημένες για την εποχή: ο Θαλής ο Μιλήσιος υπέθεσε πως οι σεισμοί προκαλούνται από ανακίνηση του νερού και όχι από την οργή κάποιου εκδικητικού Θεού –μια εξήγηση λανθασμένη μεν, φυσική δε, και όχι μεταφυσική. Ο Πυθαγόρας θεωρούσε τη Γη σφαιρική και ο Λεύκιππος τον 5^{ο} αιώνα πΧ εισήγαγε την ατομική θεωρία – έπρεπε να περάσουν πάνω από δύο χιλιετίες για να αποδειχθεί η αλήθεια αυτής της ιδέας.

Ο Πλάτωνας και ο Αριστοτέλης, αργότερα, τοποθέτησαν αυστηρά όλες αυτές τις συζητήσεις σε ένα συστηματικό πλαίσιο. Αυτό το συστηματικό πλαίσιο ήταν η αναγωγική λογική, η οποία δεν έχει εγκαταλείψει ποτέ την επιστήμη μέχρι σήμερα. Το μότο του Πλάτωνα, που αναγραφόταν και στην είσοδο της Ακαδημίας του, ήταν «Αγεωμέτρητος μηδείς εισίτω», όποιος δεν ξέρει γεωμετρία να μην εισέλθει. Αυτό δηλώνει μια βαθιά συναίσθηση της σημασίας που έχουν τα μαθηματικά για τη φιλοσοφία, που ήταν ό,τι κοντινότερο σε επιστήμη εκείνη την εποχή.

Η κληρονομία αυτών των δύο, σε ό,τι αφορά τη λογική της επιστήμης, ήταν πολλαπλή: η κατανόηση ότι οι μεταβολές θα πρέπει να οφείλονται σε κάποια αιτία μπορεί να μοιάζει σήμερα προφανής, όμως δεν ήταν έτσι πάντα. Πολλά προβλήματα επιστημονικής φύσεως καταγράφηκαν και κατανοήθηκαν και η μεθοδική εφαρμογή μαθηματικών γνώσεων σε αυτά αποσαφηνίστηκε και άνοιξε ο δρόμος για αυτό που πλέον λέγεται «μαθηματικό μοντέλο», το οποίο, σε συνδυασμό με την εμπειρική επαλήθευση, είναι που καθοδηγεί όλες τις φυσικές επιστήμες μέχρι και σήμερα.

Ακολούθησε μια περίοδος όπου εμπειρικές τεχνικές και γνώσεις έπρεπε να ενσωματωθούν σε αυτή τη νέα αναγωγική λογική και να γίνουν συστηματικές. Ήταν μια διαδικασία χρονοβόρα και επίπονη, αλλά αναμφίβολα συγκλονιστικής σημασίας για την πρόοδο της ανθρωπότητας. Οι άνθρωποι ζύγιζαν πράγματα με διάφορους τρόπους για χρόνια. Ωστόσο, ο Αρχιμήδης ήταν που έδωσε νόμους ισορροπίας, δηλαδή έβαλε μια γνώση αυθόρμητη σε ένα συνοχικό και λογικό πλαίσιο. Αυτό είναι η αρχή της σύγχρονης επιστήμης. Μιας επιστήμης εκπεφρασμένης σε μια «γλώσσα» πολύ διαφορετική από τη δική μας, αλλά με ακριβώς την ίδια λογική.

Φυσικά έγιναν λάθη και, πιθανότατα, γίνονται ακόμα. Ο νους αποζητά μοτίβα και κανονικότητες και αυτή η τάση ενδεχομένως να γίνεται πολλές φορές τόσο ισχυρή ώστε να θολώνει την κρίση –ακόμη και ομαδικώς. Επίσης, ψάχνει αιτότητα και οι αιτιακές σχέσεις δεν είναι πάντα απλό να ανακαλυφθούν –και, ακόμη κι όταν ανακαλυφθούν, δεν είναι πάντα σαφή τα όριά τους.

2. Μεσαίωνας

Κατά το Μεσαίωνα, οι κύριοι πυλώνες ανάπτυξης της επιστήμης ήταν η Βυζαντινή Αυτοκρατορία, ο Ισλαμικός κόσμος και η Δυτική Ευρώπη.

Στο Βυζάντιο, οι βασικές εργασίες -μελέτη άστρων και ιατρικής, μαθηματικά- συνεχίστηκαν, και μάλιστα σε ακαδημίες, σε αντίθεση με τη Δύση όπου επί αιώνες η γνώση ήταν συγκεντρωμένη σε μοναστήρια. Μια από τις σημαντικότερες συνεισφορές του πολιτισμού αυτού ήταν η εισαγωγή της θεωρίας της ώθησης από τον Ιωάννη το Φιλόπονο. Ήταν πολύ σημαντική διότι αμφισβήτησε τον Αριστοτέλη, την απόλυτη αυθεντία της εποχής, και ταυτόχρονα θεωρείται ότι ενέπνευσε το Γαλιλαίο χίλια χρόνια αργότερα να διατυπώσει τους νόμους της κίνησης.

Επίσης, είναι αξιοπρόσεκτη η καταγραφή ότι το 900 προσπάθησαν να διαχωρίσουν σιαμαίους διδύμους –η επόμενη καταγεγραμμένη προσπάθεια είναι το 17^{ο} αιώνα!

Για τον Ισλαμικό κόσμο, ο Μεσαίωνας ήταν μια χρυσή εποχή: νέες ιδέες εμφανίστηκαν και τεχνολογίες αναπτύχθηκαν. Συγκλονιστική ήταν η ανάπτυξη των μαθηματικών: τότε ήταν που εμφανίστηκε το Αραβικό αριθμητικό σύστημα, που χρησιμοποιούμε ακόμη και σήμερα, ενώ έγιναν σημαντικότατες τομές που απλοποίησαν τους υπολογισμούς, όπως η υποδιαστολή. Αναπτύχθηκε η τριγωνομετρία, εμφανίστηκε η ιδέα της άλγεβρας αλλά και του αλγόριθμου· μα, πάνω απ’ όλα, όσον αφορά τη χρήση μαθηματικών μοντέλων για την περιγραφή της φύσης, εμφανίστηκε η γεωμετρική οπτική, δηλαδή μια θεωρία της όρασης εκπεφρασμένη με γεωμετρικά εργαλεία.

Στη Δυτική Ευρώπη οι πολυάριθμες πολεμικές συρράξεις είχαν σαν αποτέλεσμα την καταστροφή πάρα πολλών αρχείων γνώσης –η οποία ευτυχώς διατηρήθηκε σε πιο απομακρυσμένες περιοχές και στο Βυζάντιο. Την ίδια στιγμή, ο σκοταδισμός επικράτησε, ενώ ο κύριος όγκος των μελετών αφορούσε θεολογικά ζητήματα και όχι τόσο φυσικά, με εξαίρεση σχόλια και επεκτάσεις πάνω στο έργο του Αριστοτέλη. Μόνο στο τέλος αυτής της περιόδου ξεκίνησαν να εμφανίζονται σημαντικές εξελίξεις: ο Γουλιέλμος του Όκαμ, στις αρχές του 14^{ου}αιώνα, εισήγαγε την αρχή της οικονομίας: οι «φυσικοί» πρέπει να είναι φειδωλοί στις οντότητες που χρησιμοποιούν –η «κίνηση» δεν είναι οντότητα από μόνη της, το μόνο που υπάρχει είναι το κινούμενο αντικείμενο. Και πάλι αυτό μπορεί να μοιάζει προφανές στη σημερινή εποχή αλλά τότε δεν ήταν. Επίσης, άρχισαν να εμφανίζονται ψήγματα της έννοιας της αδράνειας, ενώ ξεκίνησε και η μαθηματική ανάλυση της κίνησης –χωρίς πάντως να αιτιολογείται ο μηχανισμός που την προκαλεί.

Ακολούθησε, στα μέσα του ίδιου αιώνα, η επιδημία της πανούκλας. Αυτό πάγωσε την προσπάθεια που είχε ξεκινήσει· όμως, λίγα χρόνια αργότερα, εμφανίστηκε η τυπογραφία, κάτι που επέτρεψε στην προσπάθεια να συνεχιστεί.

3. Αναγέννηση και Διαφωτισμός

Την περίοδο της Αναγέννησης ξεκινάει μια φάση αμφισβήτησης καθιερωμένων και ακλόνητων ως τότε αληθειών, γεγονός που επέφερε μια ραγδαία πρόοδο στην επιστήμη. Η νέα αυτή μορφή επιστήμης είναι πιο μηχανιστική και ενσωματώνει πολύ πιο έντονα το μαθηματικό υπόβαθρο που συναντάμε σήμερα στις σύγχρονες θεωρήσεις.

Οι ιστορικοί συνήθως θεωρούν ότι η νέα περίοδος της κλασικής φυσικής ξεκινάει το 1543, με την έκδοση του De Revolutioni bus από τον Κοπέρνικο, όπου ο ίδιος εισηγείται την ηλιοκεντρική θεωρία. Η κορύφωση της περιόδου έρχεται, βέβαια, με την έκδοση της Principia Mathematicaαπό το Νεύτωνα, το 1687.

Πολλές σημαντικές ανακαλύψεις έγιναν εκείνη την εποχή, από ονόματα που γράφτηκαν με χρυσά γράμματα στην ιστορία της επιστήμης. Το πείραμα εδραιώθηκε ως αναπόσπαστο κομμάτι της επιστημονικής μεθόδου και ως το απόλυτο κριτήριο ελέγχου περί της αλήθειας μιας πρότασης (παροιμιώδη είναι τα πειράματα του Γαλιλαίου στον πύργο της Πίζας, όπου μελέτησε την ελεύθερη πτώση).

Ένα σημείο που αφορά αυτή την εργασία και αξίζει να αναφερθεί, είναι το εξής: ο Huygensβρήκε, μέσω μιας μαθηματικής μελέτης, την κεντρομόλο και τη φυγόκεντρο δύναμη. Αυτό είναι πάρα πολύ σημαντικό, διότι για πρώτη φορά ένα φυσικό φαινόμενο που δεν είχε παρατηρηθεί ανέκυψε από μια μαθηματική περιγραφή –κάτι που, βέβαια, επαναλήφθηκε ουκ ολίγες φορές στο μέλλον. Αυτό αναδεικνύει την τεράστια σημασία που έχει η μαθηματική μοντελοποίηση ενός συστήματος: μοιάζει εντελώς αδύνατον να προβλεφθεί ένα φαινόμενο από αμιγή εμπειρική παρατήρηση άλλων.

Την ίδια εποχή η χημεία βρίσκει τον τρόπο να διαχωριστεί από την αλχημεία. Καταλυτική ήταν η συνεισφορά του Lavoisier, «πατέρα της χημείας», στον να εξοστρακιστεί μια πολύ διάσημη θεωρία της εποχής, η θεωρία του φλογιστού, μιας υποτιθέμενης ουσίας υπεύθυνης για την έκλυση φλόγας κατά την ανάφλεξη. Επίσης, ταυτοποιήθηκε ο ρόλος της καρδιάς, των αρτηριών και των φλεβών για την κυκλοφορία του αίματος στο σώμα. Τέλος, έγιναν τα πρώτα πειράματα ηλεκτρομαγνητισμού.

4. Σύγχρονη εποχή

Για να φτάσουμε στο αντικείμενο ενδιαφέροντός μας, λοιπόν, έπρεπε να προηγηθεί όλη αυτή η μακραίωνη ανάπτυξη. Τελικά, το 19^{o} αιώνα ξεκινάει η πραγματικά σοβαρή και συνοχική μελέτη του ηλεκτρισμού και του μαγνητισμού –αρχικά θεωρούνταν δύο εντελώς διαφορετικά φαινόμενα. Πρωτοπόροι του τομέα, όπως ο Aldini, οVolta, οFaraday, οOhm, οAmpere,μελέτησαν τα φαινόμενα και διαπίστωσαν πολύ σημαντικούς νόμους που διέπουν τη λειτουργία των αντίστοιχων συστημάτων. Επαναστατικά πειράματα και ανακαλύψεις οδήγησαν τελικά στην ενοποίηση των δύο φαινομένων και σε μια συνοχική και συμπαγή τοποθέτηση των νόμων που τα διέπουν, η οποία έγινε από τον Maxwell.

Η ιστορία, φυσικά, δε σταματάει εδώ. Για την ακρίβεια, τα θαύματα της σύγχρονης εποχής ξεκινούν από εκεί και έπειτα. Η φυσική, η χημεία, η βιολογία, η ιατρική, η μηχανική, η ηλεκτρολογία συνέχισαν να αναπτύσσονται ραγδαία και, ταυτόχρονα, νέοι κλάδοι νευραλγικής σημασίαςσήμερα, όπως η οικονομία και η πληροφορική, έκαναν τα επόμενα χρόνια την εμφάνισή τους. Εφόσον σε αυτή την εργασία θέλουμε να ασχοληθούμε με τα ηλεκτρικά συστήματα, θα σταματήσουμε την ανάλυση εδώ.

Το επιμύθιο όλης αυτής της ιστορίας, στο δικό μας πλαίσιο, είναι ο δρόμος που οδήγησε στην ανάπτυξη του ηλεκτρομαγνητισμού. Αυτός ο δρόμος ήταν άρρηκτα συνδεδεμένος με την εισαγωγή, σε διαφορετικό βαθμό κάθε στιγμή, των μαθηματικών στην περιγραφή των φυσικών φαινομένων. Αυτό σημαίνει ότι, βαθμιαία, τα φυσικά συστήματα άρχισαν να εκφράζονται μέσα από μαθηματικές θεωρήσεις, και αργότερα σχέσεις, και αυτό δεν είναι τίποτα άλλο παρά μια μαθηματική μοντελοποίηση, ακριβώς ίδιας δομής με αυτήν που θα μας απασχολήσει σε αυτή την εργασία.

Πριν κλείσουμε αυτή την ιστορική διαδρομή, θα δώσουμε μια σύντομη ανασκόπηση πιο συγκεκριμένα για τον ηλεκτρισμό, μιας και θα είναι το αντικείμενο που θα μας απασχολήσει κατά κύριο λόγο σε αυτή την εργασία.

5. Ιστορία του ηλεκτρισμού

Η απαρχή του ηλεκτρισμού, όπως τον σκεφτόμαστε σήμερα, θεωρείται ότι έγινε από τον BenjaminFranklinτο 1752, όταν πραγματοποίησε το διάσημο πείραμά του με το χαρταετό. Φυσικά, ο ηλεκτρισμός δεν παρατηρήθηκε πρώτη φορά τότε. Ήταν επί αιώνες γνωστό -για την ακρίβεια αποτελεί παρατήρηση του Θαλή του Μιλήσιου που έζησε γύρω στο 600πΧ- ότι κάποιο παράξενο φαινόμενο συμβαίνει όταν ένα κομμάτι κεχριμπάρι (ήλεκτρο) τριφτεί σε ξερό ύφασμα, διότι αμέσως μετά το κεχριμπάρι έλκει κομμάτια άχυρο. Αλλά ακόμη νωρίτερα κι απ' αυτό, το 2750πΧ, είχαν καταγραφεί οι «κεραυνοί του Νείλου», που ήταν ηλεκτροφόρα ψάρια. Εκείνο που έκανε ο Franklin,κρεμόντας ένα κλειδί στο σπάγγο του χαρταετού του μια βροχερή μέρα, ήταν να αποδείξει ότι το φαινόμενο του στατικού ηλεκτρισμού έχει την ίδια αιτία με τους κεραυνούς.

Ήταν απόλυτα κατανοητό από τότε ότι ο κεραυνός είναι πάρα πολύ ισχυρός. Ακόμη κι αν η ιδέα της ενέργειας δεν είχε τη σαφήνεια που έχει σήμερα, οι άνθρωποι ήταν πρόθυμοι μετά την ανακάλυψη αυτή να μελετήσουν τον ηλεκτρισμό, προκειμένου να τον αξιοποιήσουν σε βασικές, αρχικά, ανάγκες τους, όπως σαν πηγή φωτός. Έτσι, βαθμιαία από μαγικό τρικ για τα σαλόνια, άρχισε να αποκτά επιστημονικό υπόβαθρο, ακριβώς όπως και ο μαγνητισμός.

Ο Gauss, ένας από τους σημαντικότερους μαθηματικούς στην ιστορία της ανθρωπότητας, κάποια χρόνια αργότερα έδωσε το νόμο της Ηλεκτροστατικής, που αφορά τη συμπεριφορά ακίνητων ηλεκτρικών φορτίων. Ο νόμος αυτός είναι μαθηματικώς εκπεφρασμένος ως μια κομψή εξίσωση: ο ηλεκτρισμός είχε μοντελοποιηθεί.

Ακολούθησε, σε άσχετο τότε πλαίσιο, ο νόμος του Ampereτο 1819, καθώς και η διαπίστωση ότι δεν υπάρχουν μαγνητικά μονόπολα. Το 1831, ο Faradayδιαπίστωσε πειραματικά ότι ένας μαγνήτης που κινείται σε σχέση με ένα καλώδιο χαλκού, μπορεί να παράξει ρεύμα. Η μαθηματική έκφραση στην οποία οδήγησε αυτή η διαπίστωση συνέδεσε άρρηκτα τα δύο φαινόμενα, και σε αυτή βασίζεται το μεγαλύτερο μέρος παραγωγής ηλεκτρισμού σήμερα (για παράδειγμα σε εργοστάσια παραγωγής ενέργειας, σε ηλεκτρικούς κινητήρες και σε γεννήτριες).

Γύρω στο 1860 ο Maxwellσυγκέντρωσε αυτές τις γνώσεις στις περιβόητες εξισώσεις του, διόρθωσε μία απ’ αυτές και τις χρησιμοποίησε με έναν κομψό και ευφυή τρόπο, ο οποίος τον οδήγησε στη συγκλονιστική διαπίστωση ότι το φως είναι ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα.

Το 1879 ο Edisonκατόρθωσε να εφεύρει τον πρώτο ηλεκτρικό λαμπτήρα, ο οποίος ακόμη και σήμερα χρησιμοποιείται συχνά (είναι αυτός με το ζεστό, κίτρινο φως). Έτσι, έφτασε το τέλος της εποχής του φωταερίου· μια νέα βιομηχανία δημιουργήθηκε και ο ηλεκτρισμός άρχισε να μπαίνει στα σπίτια.

Σημειώνεται ότι ο ηλεκτρισμός μπορεί να παραχθεί και να μεταδοθεί αλλά, ακόμη και σήμερα, παραμένει δύσκολο και ενεργοβόρο να αποθηκευτεί, οπότε πρέπει να καταναλώνεται αμέσως.

Αρχικά, η παραγωγή του ηλεκτρισμού γινόταν με κάρβουνο και πετρέλαιο, όμως αυτού του είδους η διαχείριση επέφερε πολλούς ρύπους και αέρια θερμοκηπίου και ήταν και κοστοβόρα. Έτσι, η βιομηχανία άρχισε να στρέφεται σε άλλες μορφές παραγωγής, όπως τα υδροηλεκτρικά εργοστάσια. Οι εξελίξεις συνέχισαν να είναι ραγδαίες: σήμερα πλέον έχουμε φτάσει στο να έχουμε ηλεκτρικά αυτοκίνητα και διατάξεις που φορτίζουν με τον ήλιο.

Σε αυτή την εργασία, επίκεντρο θα είναι τα ηλεκτρικά κυκλώματα. Σταθμός για αυτά ήταν η εφεύρεση της μπαταρίας από τον AlessandroVoltaτο 1800. Η «βολταϊκή στήλη», όπως ονομαζόταν τότε, είχε την συγκλονιστική ιδιότητα να μπορεί να παράξει συνεχή ροή ρεύματος, κάνοντας έτσι εφικτά τα πρώτα κυκλώματα. Η πρώτης τους εφαρμογή ευρείας κλίμακας ήταν στο φωτισμό. Ο Edisonείχε εφεύρει το λαμπτήρα πυρακτώσεως και έψαχνε τρόπους πρακτικής εφαρμογής του, κάτι που πέτυχε αναπτύσσοντας ένα ολόκληρο δίκτυο παραγωγής και διανομής.

Τα πρώτα κυκλώματα που λειτουργούσαν με μπαταρία παρήγαγαν ένα ρεύμα σταθερό, προς μία κατεύθυνση –το λεγόμενο συνεχές. Αυτό ήταν και το πρώτο ρεύμα που χρησιμοποιήθηκε για φωταγώγηση την εποχή των πρώτων συστημάτων ηλεκτρικής ενέργειας, ωστόσο έχει το πολύ σοβαρό μειονέκτημα ότι δεν μπορεί να εξυπηρετήσει παρά μόνο μια μικρή γεωγραφική περιοχή, λόγω απωλειών στα καλώδια.

Το πρόβλημα έλυσε ο Tesla, με τη χρήση ενός ρεύματος που αλλάζει συνεχώς, τόσο μέτρο όσο και κατεύθυνση –το λεγόμενο εναλλασσόμενο. Ο λόγος που αυτό το είδος ρεύματος επιτρέπει τη μακρινή μετάδοση είναι ότι, όταν έχουμε τέτοιο ρεύμα, μπορούν να χρησιμοποιηθούν μετασχηματιστές για να αλλάξουν την τάση σε ένα κύκλωμα. Έτσι, όταν ένα ρεύμα πρέπει να ταξιδέψει σε μακρινή απόσταση, με ένα μετασχηματιστή μπορεί να αυξηθεί η τάση του, προκειμένου, παρά τις απώλειες κατά τη μετάδοση, να φτάσει αρκετό ρεύμα στον προορισμό. Περισσότερες λεπτομέρειες για τις απώλειες και το ρόλο της τάσης σε αυτές, καθώς και για το συνεχές και το εναλλασσόμενο ρεύμα, θα δοθούν στη συνέχεια της εργασίας.

Πριν κλείσουμε, αναφέρουμε ότι η ιστορία των κυκλωμάτων δεν τελειώνει εκεί. Για την ακρίβεια, στη σημερινή εποχή τα κυκλώματα που χρησιμοποιούμε περισσότερο είναι τα λεγόμενα ολοκληρωμένα κυκλώματα, τα οποία συχνά αποκαλούνται chips. Ο ρόλος τους στους υπολογιστές, στα κινητά τηλέφωνα και γενικά σε οποιαδήποτε εφαρμογή ηλεκτρονικής είναι κομβικός.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΡΓΑΛΕΙΑ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναλύσουμε κάποιες πολύ χρήσιμες μαθηματικές έννοιες, οι οποίες απαντώνται στα μαθηματικά μοντέλα των ηλεκτρικών συστημάτων και κυκλωμάτων.

1. Η παράγωγος

Η παράγωγος είναι ένα μαθηματικό αντικείμενο που εμφανίζεται στη συντριπτική πλειοψηφία των μαθηματικών περιγραφών που επιστρατεύουν οι διάφορες επιστήμες. Ο λόγος είναι ότι, όπως θα εξηγήσουμε αναλυτικά παρακάτω, η παράγωγος είναι η μαθηματική έκφραση που περιγράφει την έννοια της μεταβολής και, βέβαια, η μελέτη μεταβολών είναι κομβικής σημασίας για οποιαδήποτε επιστήμη ή τεχνικό κλάδο. Πράγματι, ποσοτικοποιώντας τη μεταβολή και ορίζοντάς την σε ένα αυστηρό πλαίσιο, ανοίγει ο δρόμος για τη μελέτη σωρείας ενδιαφέροντων πραγμάτων, όπως οι κατανομές οντοτήτων σε κάποιο χώρο ή στο χρόνο, η εξέλιξη ποσοτήτων, η αυξομοίωση μεγεθών και πολλά άλλα.

Η παράγωγος εντάσσεται στο μαθηματικό κλάδο που ονομάζεται απειροστικός λογισμός ή ανάλυση. Η ανάλυση μελετάει πολλές έννοιες κομβικές για την εξέλιξη των επιστημών και εντάσσει σε αυστηρό πλαίσιο ιδέες που διαισθητικά είναι μάλλον απλές, αλλά χωρίς την αυστηρή τοποθέτησή τους δεν μπορούν να αξιοποιηθούν. Τέτοιες ιδέες είναι, εκτός από την παράγωγο, το όριο, η συνάρτηση, το ολοκλήρωμα και οι σειρές. Ο απειροστικός λογισμός ανακαλύφθηκε στα μέσα του 17ου αιώναaπό τον Νεύτωνα και τονLeibniz, οι οποίοι δούλευαν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον. Έτσι, με την αυστηρή τοποθέτηση που έγινε τότε, άνοιξε ο δρόμος για πολλές ενδιαφέρουσες μελέτες όπως εκείνη της τροχιάς και για την επίλυση προβλημάτων άλυτων ως τότε, όπως ο υπολογισμός συγκεκριμένων εμβαδών. Σημειώνεται ότι, παρόλο που έπρεπε να φτάσει ο 17ος αιώνας για να φορμαριστεί όλο το ιδεολογικό υπόβαθρο της ανάλυσης σε ένα αυστηρό πλαίσιο, δείγματα της λογικής της συναντώνται ήδη από την αρχιαότητα. Ο Εύδοξος (4ος αιώνας πΧ), αργότερα ο Αρχιμήδης (3ος αιώνας πΧ) και άλλοι αρχαίοι Έλληνες, για να υπολογίσουν εμβαδά, χρησιμοποίησαν τη λεγόμενη μέθοδο της εξάντλησης η λογική της οποίας αποτελεί τον πυρήνα του απειροστικού λογισμού.

Σε αυτή την εργασία ενδιαφερόμαστε για τη μελέτη ποσοτήτων εξετάζοντας τον τρόπο που κυμαίνονται στο χρόνο. Έτσι, η λογική θα είναι ότι για κάθε τέτοια ποσότητα θα ορίζουμε μία συνάρτηση που θα την αντιπροσωπεύει, και αυτή θα εξετάζεται ως συνάρτηση μίας μεταβλητής και συγκεκριμένα του χρόνου. Για αυτό το λόγο, όλα όσα θα πούμε σε αυτό το Κεφάλαιο θα αφορούν αμιγώς συναρτήσεις μίας μεταβλητής.

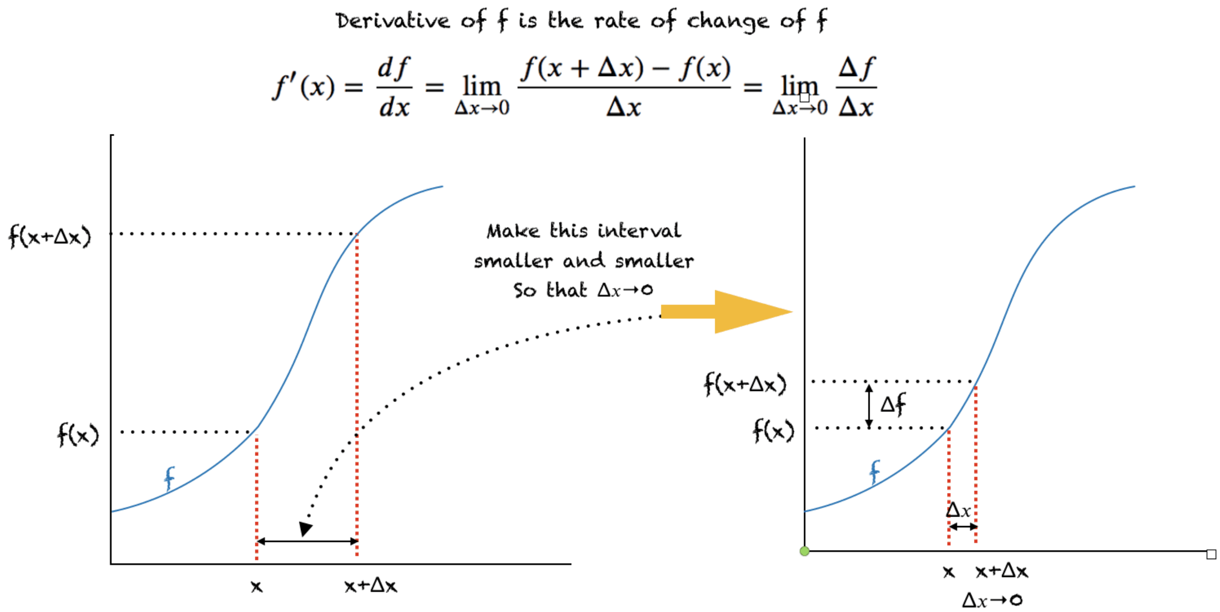
Για να ορίσουμε την παράγωγο θα πρέπει να είναι γνωστός ο ορισμός του ορίου. Ο ακριβής μαθηματικός ορισμός είναι αρκετά περίπλοκος εκ πρώτης όψεως, παρόλο που περιγράφει μια πάρα πολύ απλή ιδέα, οπότε δε θα τον δώσουμε εδώ. Επειδή σε αυτή την εργασία θα ασχοληθούμε σχεδόν αποκλειστικά με συνεχείς συναρτήσεις, θα αρκεστούμε σε μια διαισθητική προσέγγιση της έννοιας του ορίου, η οποία για τις συνεχείς συναρτήσεις συνήθως είναι αρκετά ικανοποιητική. Διαισθητικά, μπορούμε να καταλάβουμε το όριο ως τη διαδικασία όπου πλησιάζουμε κάτι όσο πιο κοντά γίνεται, αλλά χωρίς να πέφτουμε πάνω του. Έτσι, όταν γράφουμε $\lim_{x \to a} f(x)$, εννοούμε την τιμή της συνάρτησης fόταν το όρισμά της πλησιάζει όσο πιο κοντά γίνεται στο σημείο a, αλλά χωρίς να γίνει ακριβώς a.

Κατόπιν αυτού, ο αυστηρός μαθηματικός ορισμός της παραγώγου έχει ως εξής: η παράγωγος μια συνάρτησης f(x) στο σημείο xδίνεται από τον τύπο

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Για να μπορεί να οριστεί αυτό, θα πρέπει η συνάρτηση να είναι παραγωγίσιμη, ή αλλιώς διαφορίσιμη, στο σημείο xκαι αυτό συμβαίνει αν το σημείο αυτό ανήκει στο πεδίο ορισμού της, αν αυτό το πεδίο ορισμού περιέχει ένα ανοιχτό διάστημα γύρω από το σημείο και, φυσικά, αν το παραπάνω όριο υπάρχει.Η παράγωγος ήθισται να συμβολίζεται με έναν τόνο στη συνάρτηση, ή, εναλλακτικά, η παραπάνω ποσότητα μπορεί και να γράφεται ως $\frac{df}{dx}$(το σύμβολο d χρησιμοποιείται για να υποδείξει απειροστές αλλαγές).

Η ποσότητα μέσα στο όριο μοιάζει με κλίση. Όμως ξέρουμε ότι η κλίση ορίζεται με αυτό τον τρόπο μόνο για ευθείες, και βέβαια ποτέ δεν είπαμε ότι η fείναι ευθεία –και αν μπορούσαμε να παραγωγίσουμε μόνο συναρτήσεις που έχουν ως γραφική παράσταση ευθεία, η χρηστικότητα της παραγώγου θα ήταν εξαιρετικά περιορισμένη. Οπότε, αυτή η ποσότητα μέσα στο όριο τι ακριβώς είναι τελικά; Για να κατανοήσουμε καλύτερα τι συμβαίνει, βολεύει να σκεφτούμε εικονικά. Το παρακάτω σχήμα είναι πολύ κατατοπιστικό σχετικά με το γεωμετρικό νόημα της παραγώγου.



Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου (πηγή https://machinelearningmastery.com/a-gentle-introduction-to-function-derivatives/).

Όπως βλέπουμε, ξεκινάμε με μια τυχαία συνάρτηση οποιουδήποτε σχήματος και δύο σημεία που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της x, x+Δx. Η διαδικασία του να πάρουμε το όριο Δx→0 σημαίνει να πλησιάσουμε όσο γίνεται τα δύο αυτά σημεία ή αλλιώς, να επιλέξουμε το δεύτερο σημείο όσο πιο κοντά γίνεται στο πρώτο. Τώρα, όταν η απόσταση των δύο σημείων γίνει υπερβολικά μικρή, προφανώς το ακριβές σχήμα της καμπύλης χάνει την υπόστασή του –αν κάνουμε ζουμ πάνω σε οποιαδήποτε καμπύλη, καθώς πλησιάζουμε, θα φτάσουμε σε ένα σημείο όπου αυτή η καμπύλη θα αρχίζει να φαίνεται σαν ευθεία. Επομένως, είναι προφανές από τον ορισμό της ότι η παράγωγος μας δίνει ακριβώς την κλίση αυτής της ευθείας που εμφανίζεται στο ζουμ. Όμως είναι εύκολο να δούμε ότι αυτή η ευθεία θα ταυτίζεται με την εφαπτομένη της καμπύλης σε εκείνο το σημείο. Επομένως, μπορούμε να πούμε ότι η παράγωγος μιας συνάρτησης σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της δίνει την κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης σε εκείνο το σημείο.

Αλλιώς, μπορούμε να σκεφτούμε ότι αλλάζουμε τη μεταβλητή xώστε να γίνει x+Δx, Δx→0, δηλαδή η xαλλάζει κατά dx. Επειδή η fείναι συνάρτηση του x, με αυτή την αλλαγή θα αλλάξει και η f(x) και θα γίνει f(x+dx), επομένως η διαφορά τελικής μείον αρχικής τιμής f(x+dx)-f(x)=df είναι ακριβώς ο αριθμητής στον ορισμό της παραγώγου. Δηλαδή, η παράγωγος είναι ο συντελεστής αναλογίας των μεταβολών της εξαρτημένης και της ανεξάρτητης μεταβλητής.

Τώρα θα πρέπει να είναι προφανής η σχέση της μεταβολής με την παράγωγο: ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια ποσότητα, για παράδειγμα μια διαφορά δυναμικού, που εξαρτάται από το χρόνο. Προφανώς, σε πάρα πολλές εφαρμογές καλούμαστε να μελετήσουμε το ρυθμό μεταβολής αυτής της διαφοράς. Χωρίς την κατανόηση και χρήση της ιδέας της παραγώγου, αυτό δεν είναι πάντα εύκολο να γίνει, ακόμη και για σχετικά απλές και συνηθισμένες χρονικές εξαρτήσεις. Αντίθετα, έχοντας ανά χείρας την παράγωγο, μπορούμε να την αξιοποιήσουμε αμέσως: για να βρούμε το ρυθμό μεταβολής, πολύ απλά θα πρέπει να παραγωγίσουμε τη διαφορά δυναμικού ως προς το χρόνο. Αντίστοιχα, σε εφαρμογές πολλές φορές υπάρχει ένα ρεύμα που αλλάζει με τη θέση – όπως αναφέραμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο, το συνεχές ρεύμα διαδίδεται μέχρις ενός σημείου. Είναι ευνόητο το πόσο σημαντικό είναι να μπορούμε να ποσοτικοποιήσουμε το πόσο ρεύμα χάνεται με την αύξηση της απόστασης. Αυτό, χωρίς την έννοια της παραγώγου, θα κατέληγε πιθανότατα σε μια μακροσκελή καταγραφή δεδομένων μέτρησης, που ακόμη και η εξαγωγή τους θα ήταν κοπιαστική, δαπανηρή και χρονοβόρα, ενώ δε θα ήταν καθόλου τετριμμένη και η γενίκευση των συμπερασμάτων σε άλλα αρχικά ρεύματα. Με την παράγωγο τα πράγματα είναι πολύ πιο απλά: ο ρυθμός απόσβεσης έχει πλέον ένα μαθηματικό αντικείμενο με το οποίο μπορεί να περιγραφεί αυστηρά.

Σημειώνουμε και τα εξής: η παραγωγισιμότητα μιας συνάρτησης σε ένα σημείο συνεπάγεται απαραίτητα και τη συνέχεια σε εκείνο το σημείο. Επίσης, προφανώς μετά την παραγώγιση προκύπτει και πάλι μία συνάρτηση, η οποία ενδεχομένως να μπορεί να παραγωγιστεί εκ νέου και ούτω καθ' εξής. Αυτές οι ανώτερης τάξης παράγωγοι απαντώνται με διάφορους συμβολισμούς, όπως $f^{(n)}(x)$ ή $\frac{d^n f}{dx^n}$ή με ντελείες πάνω από την f αν παραγωγίζουμε ως προς το χρόνο, και όλες σημαίνουν την n-οστή παράγωγο της f.

Για τις πρακτικές εφαρμογές της παραγώγισης, μπορούν να μελετηθούν κάποιες σημαντικές συναρτήσεις οι οποίες απαντώνται συχνά σε εφαρμογές. Παρουσιάζουμε παρακάτω τις παραγώγους των πιο βασικών συναρτήσεων. Οι σχέσεις που ακολουθούν μπορούν να αποδειχθούν, άλλες με περισσότερο και άλλες με λιγότερο κόπο. Θα παρουσιάσουμε ενδεικτικά μόνο την απόδειξη μίας εκ των παρακάτω, ώστε να διαφωτίσουμε το πώς λειτουργεί ο ορισμός της παραγώγου. Σε όλα τα παρακάτω α είναι ένας σταθερός, πραγματικός αριθμός.

$\frac{d}{dx}\alpha=0,$

$\frac{d}{dx}x^{\alpha}=\alpha x^{\alpha-1},$

$\frac{d}{dx}e^{x}=e^{x},$

$\frac{d}{dx}\alpha^{x}=\alpha^{x}\ln\alpha,\ \alpha>0,$

$\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x},\ x>0,$

$\frac{d}{dx}\log_{\alpha}x=\frac{1}{x\ln\alpha},\ x,\alpha>0,$

$\frac{d}{dx}\sin x=\cos x,$

$\frac{d}{dx}\cos x=-\sin x,$

$\frac{d}{dx}\tan x=\frac{1}{\cos^{2}x},$

$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}},\ -1<x<1,$

$\frac{d}{dx}\cos^{-1}x=\frac{-1}{\sqrt{1-x^{2}}},\ -1<x<1,$

$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x=\frac{1}{1+x^{2}}.$

Παρουσιάζουμε ενδεικτικά την απόδειξη για την παράγωγο της $f(x)=x^2$ η οποία, σύμφωνα με την πρώτη από τις παραπάνω σχέσεις θα πρέπει να ισούται με 2x.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Επίσης, είναι πάρα πολύ χρήσιμοι κάποιοι κανόνες που αφορούν την παραγώγιση συνδυαστικών συναρτήσεων και τους παραθέτουμε και αυτούς:

$(\alpha f+\beta g)'=\alpha f'+\beta g'$, α,β σταθεροί αριθμοί,

$(fg)'=f'g+fg'$, με ειδική περίπτωση της την $(\alpha f)'=\alpha f'$, α σταθερά,

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$, για όλα τα σημεία όπου $g\neq 0$,

$(f(g(x)))'=f'(g(x))g'(x)$.

Συνδυάζοντας τις παραγώγους των βασικών συναρτήσεων με αυτούς τους κανόνες μπορούμε, θεωρητικά, να υπολογίσουμε μια ευρύτατη γκάμα παραγώγων συναρτήσεων. Για παράδειγμα η $\sin x^2+e^{3x}$ δεν είναι στις βασικές συναρτήσεις· ωστόσο, αξιοποιώντας τα παραπάνω, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι $(\sin x^2+e^{3x})'= 2x\cos x^2+3e^{3x}$.

2. Το ολοκλήρωμα

Στην άλλη όψη του νομίσματος της παραγώγου, υπάρχει το ολοκλήρωμα, από την άποψη ότι η ολοκλήρωση είναι ακριβώς η αντίστροφη διαδικασία από την παραγώγιση.

Με άλλα λόγια, όταν ζητάμε το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης, στην ουσία ψάχνουμε τη συνάρτηση εκείνη που όταν παραγωγιστεί θα δώσει την ολοκληρωτέα. Το ολοκλήρωμα μπορεί να είναι αόριστο, όπου το αποτέλεσμα θα είναι μια ολόκληρη οικογένεια συναρτήσεων –διότι όταν παραγωγιστεί μια συνάρτηση δίνει μία άλλη, αλλά ακριβώς την ίδια παράγωγο δίνει και η παραγώγιση της συνάρτησης που είναι το άθροισμα της αρχικής και οποιασδήποτε σταθεράς, λόγω του ότι η παράγωγος της σταθεράς είναι μηδενική· οπότε, η αντιστροφή της διαδικασίας παραγώγισης θα πρέπει να λάβει υπ’ όψιν αυτή την «αοριστία». Αυτή η αοριστία μπορεί να αρθεί αν υπάρχει κάποια συνθήκη για την ολοκληρωμένη –πχ η τιμή της σε ένα σημείο. Επίσης, το ολοκλήρωμα μπορεί να είναι ορισμένο, οπότε το αποτέλεσμα δεν είναι συνάρτηση αλλά αριθμός. Θα εξηγήσουμε παρακάτω τι σημαίνουν όλα αυτά.

Η πιο απλή διαισθητικά κατανόηση του ολοκληρώματος είναι να το σκεφτόμαστε ως ένα άθροισμα ποσοτήτων κατανεμημένων συνεχώς. Η άθροιση είναι μια απολύτως προφανής διαδικασία: αν ξέρουμε ότι έχουμε κάποιες οντότητες τοποθετημένες στις θέσεις 1, 2, 3, ... επάνω σε κάποιον άξονα, είναι πάρα πολύ εύκολο να βρούμε το σύνολο των οντοτήτων σε όλο το χώρο: το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να τις αθροίσουμε. Όμως, δεν είναι όλες οι κατανομές τοποθετημένες σε διακριτές θέσεις. Υπάρχουν πάρα πολλές περιπτώσεις όπου μια ποσότητα κατανέμεται συνεχώς στο χώρο ύπαρξής της και όχι μόνο σε συγκεκριμένες θέσεις του (πχ η θερμοκρασία σε ένα δωμάτιο υπάρχει παντού, όχι σε μεμονωμένα σημεία του δωματίου). Το ολοκλήρωμα είναι η επέκταση της συνηθισμένης διαδικασίας άθροισης, σε περιπτώσεις που οι ποσότητες που αθροίζονται κατανέμονται συνεχώς και, εφόσον εμείς δουλέυουμε με συναρτήσεις μίας μεταβλητής, μας αφορά η συνεχής κατανομή επί ενός άξονα, η οποία προφανώς θα μπορεί να περιγραφεί από μια συνάρτηση f.

Υπάρχει ένα συγκλονιστικής σημασίας Θεώρημα στον απειροστικό λογισμό το οποίο αφορά ολοκληρώματα. Αυτό είναι το λεγόμενο Θεμελιώδες Θεώρημα της ανάλυσης, και δίνει ότι

$$\int_a^b dx\,\frac{df}{dx}=f(b)-f(a).$$

Το σύμβολο στο αριστερό μέλος είναι το σύμβολο του ολοκληρώματος. Όταν έχει τιμές στην ουρά και στην κορυφή του, είναι το λεγόμενο ορισμένο ολοκλήρωμα. Αν δεν έχει τιμές είναι το λεγόμενο αόριστο, και η αντίστοιχη σχέση θα ήταν

$$\int dx\,\frac{df}{dx}=f(x)+c,$$ c κάποια αυθαίρετη σταθερά.

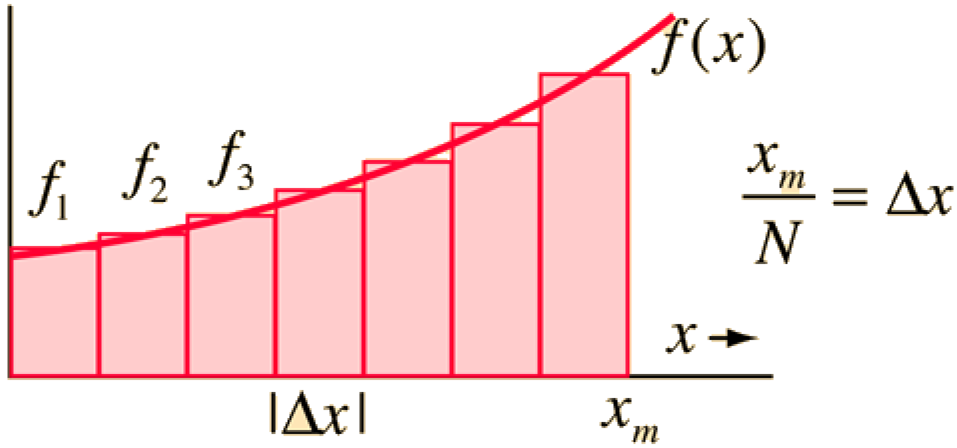
Όπως είπαμε, αυτό δεν είναι ο ορισμός του ολοκληρώματος αλλά ένα Θεώρημα. Στο πλαίσιο αυτής της εργασίας, όμως, όπου δεν ενδιαφερόμαστε για τις μαθηματικές λεπτομέρειες της υπόθεσης, βολεύει να σκεφτόμαστε αυτό το Θεώρημα ακόμη και ως τον ορισμό του ολοκληρώματος. Πράγματι, εκείνο που κυρίως μας ενδιαφέρει στα παρακάτω όπου εμφανίζεται ολοκλήρωμα, είναι να ξέρουμε ότι είναι το αντίστροφο της παραγώγου –χωρίς φυσικά να παραγράφουμε την «αθροιστική» του φύση. Δηλαδή, να ξέρουμε ότι αν έχουμε να ολοκληρώσουμε μια συνάρτηση f, στην ουσία καλούμαστε να βρούμε μια άλλη συνάρτηση F, για την οποία να ισχύει F’(x)=f(x).

Περί της γεωμετρικής ερμηνείας του ολοκληρώματος, βολεύει να σκεφτόμαστε το $\frac{df}{dx}$ως κλάσμα, παρόλο που δεν είναι –όπως για παράδειγμα γίνεται σαφές στο συμβολισμό των παραγώγων ανώτερης τάξης. Παρ’ όλα αυτά, για πρώτες παραγώγους και για την ανάλυση που θέλουμε να κάνουμε εδώ, η παραδοχή αυτή λειτουργεί. Έτσι, είναι προφανής η σχέση

$$df=\frac{df}{dx}dx.$$

Αυτή μας δίνει τη μεταβολή της συνάρτησης fαν η μεταβλητή αλλάξει κατά dx και συγκεκριμένα μας λέει ότι η μεταβολή αυτή θα ισούται με την παράγωγο επί την απειροστή μεταβολή dx.

Επομένως, το Θεμελιώδες Θεώρημα της ανάλυσης στην ουσία μας δίνει το ολοκλήρωμα των απειροστών μεταβολών της fμέσα στο διάστημα [a,b] (για ευκολία γράφουμε εδώ το διάστημα ως κλειστό, αλλά τα ίδια συμπεράσματα μπορούν να βγουν και αν κάποιο ή και τα δύο άκρα του είναι στο άπειρο, απλώς θα πρέπει τότε τα διαστήματα να είναι ανοιχτά). Με τι θα ισούται αυτό; Μπορούμε να το υπολογίσουμε σκεπτόμενοι αναγωγικά: έτσι, ας σκεφτούμε ότι τεμαχίζουμε το διάστημα που μας ενδιαφέρει σε υποδιαστήματα πάχους dxτο καθένα. Είναι προφανές ότι η μεταβολή της συνάρτησης fστο πρώτο υποδιάστημα, από aως a+dxθα είναι ίση με f(a+dx) –f(a), η μεταβολή της fστο αμέσως επόμενο υποδιάστημα από a+dxως a+2dxθα είναι f(a+2dx)-f(a+dx). Αυτό μπορεί να συνεχιστεί αναγωγικά ώσπου να φτάσουμε στο σημείο b.



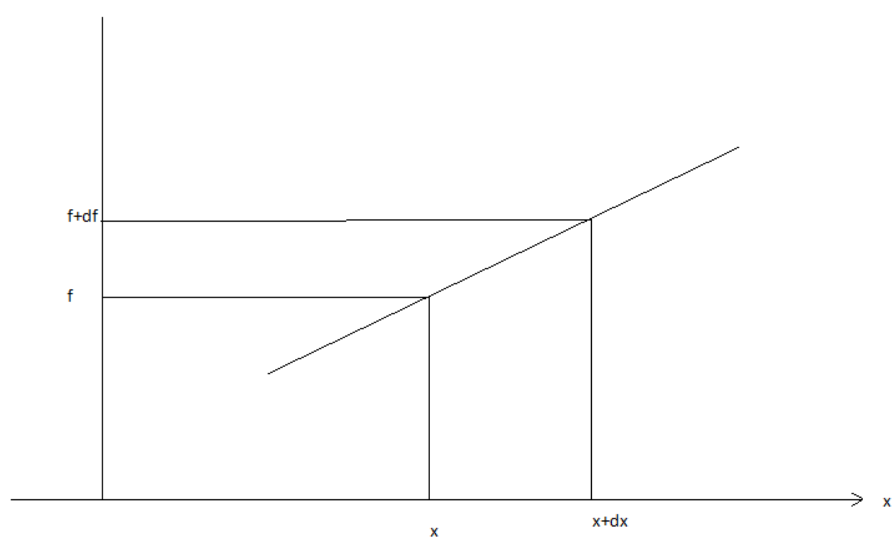
Η διαδικασία του τεμαχισμού του διαστήματος εικονικά. Εν προκειμένω έχει επιλεχθεί το διάστημα [0, x_m] και έχουν επιλεχθεί N+1 υποδιαστήματα πάχους $Δx=x_m/N$το καθένα, το οποίο μπορούμε να πάρουμε να τείνει στο 0 (πηγή http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/integ.html).

Τώρα, ενθυμούμενοι ότι το ολοκλήρωμα είναι άθροισμα, μπορούμε να διαφωτίσουμε τη σημασία του «ολοκληρώματος των απειροστών μεταβολών» μέσα στο διάστημα ενδιαφέροντος: αφού το ολοκλήρωμα είναι άθροισμα, προφανώς το πρώτο μέλος του Θεμελιώδους Θεωρήματος είναι απλώς το άθροισμα των απειροστών μεταβολών στα επιμέρους υποδιαστήματα που προέκυψαν από τον τεμαχισμό του [a,b]. Με την αναγωγική λογική που παρουσιάσαμε παραπάνω, αν έχουμε θεωρήσει n+1 επιμέρους υποδιαστήματα πάχους dx, αυτό το άθροισμα είναι εύκολο να φανεί ότι θα είναι (f(b) –f(a+ndx))+(f(a+ndx) –f(a+(n-1)dx))+…(f(a+2dx) –f(a+dx))+(f(a+dx) –f(a)), όπου είναι προφανές ότι όλοι οι όροι θα εμφανίζονται δύο φορές, μια με θετικό πρόσημο και μία με αρνητικό οπότε θα αλληλοαναιρούνται, εκτός από τον πρώτο και τον τελευταίο. Έτσι, αυτό το άθροισμα είναι απλώς f(b) –f(a), τουτέστιν ό,τι ακριβώς δίνει και το Θεμελιώδες Θεώρημα.

Υπό το φως αυτής της μελέτης, το αποτέλεσμα του Θεωρήματος τώρα δε θα πρέπει να προκαλεί απολύτως καμία έκπληξη: τα δύο μέλη είναι δύο διαφορετικοί τρόποι γραφής της μεταβολής της fστο διάστημα [a,b], οπότε προφανώς θα πρέπει να είναι ίσα. Στο πρώτο μέλος έχουμε τη συνολική μεταβολή ως άθροισμα επιμέρους μεταβολών, ενώ στο δεύτερο την έχουμε με τον απλό τρόπο: τιμή στην τελική θέση μείον τιμή στην αρχική.

Επίσης, με αυτή τη γεωμετρική προσέγγιση, είναι πάρα πολύ εύκολο να διαισθανθούμε την «αθροιστική» φύση του ολοκληρώματος. Ας υποθέσουμε ότι ενδιαφερόμαστε να βρούμε το εμβαδό που περικλείει μια τυχούσα καμπύλη με τον άξονα των x, από ένα σημείο σε κάποιο άλλο. Προφανώς, αυτό δε θα είναι πάντα εύκολο να υπολογιστεί από τις γνώσεις της Ευκλείδειας γεωμετρίας –δεν είναι όλα τα σχήματα ορθογώνια, τρίγωνα ή κύκλοι. Ακόμη και το εμβαδό απλούστατων, πολυεφαρμοσμένων και χρήσιμων καμπύλων δεν είναι πάντα εύκολο να υπολογιστεί –πχ το εμβαδό που περικλείει η f(x)=sinxδεν είναι καθόλου εύκολο να βρεθεί γεωμετρικά.

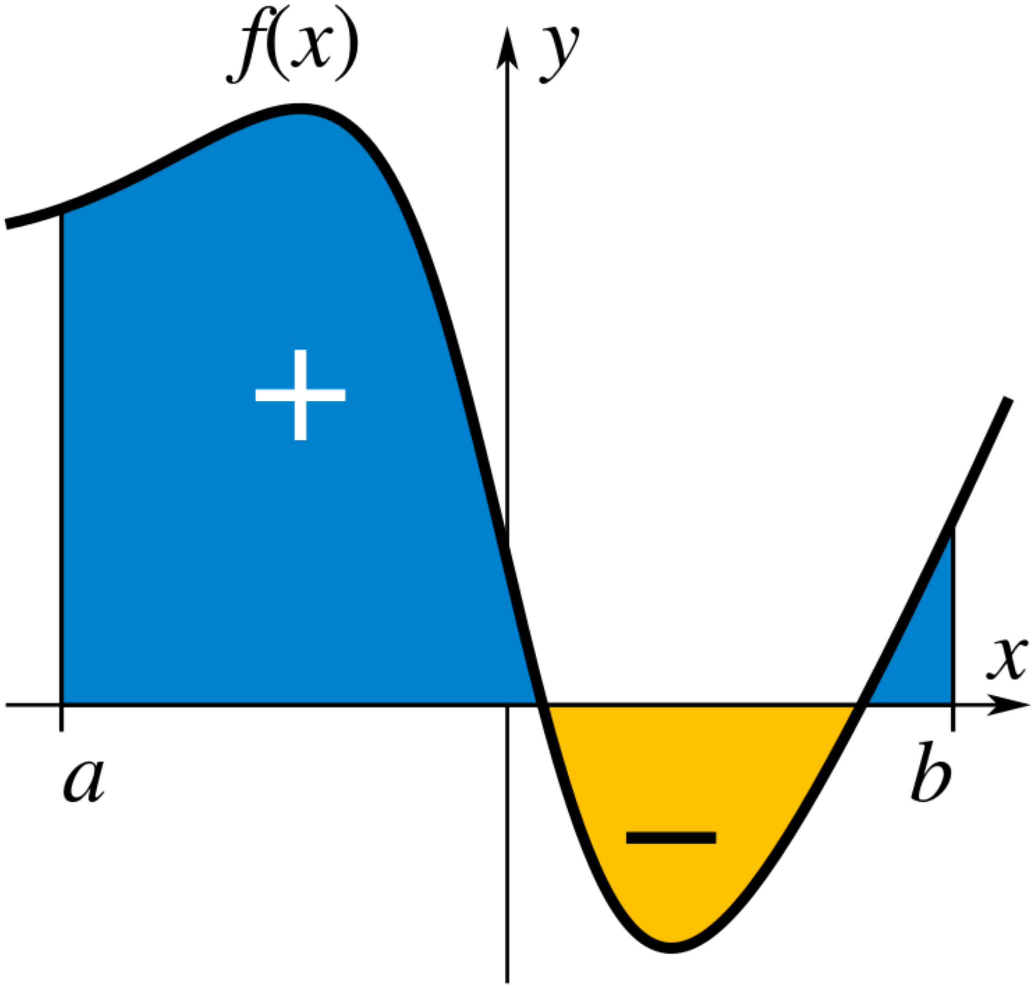
Ένας τρόπος να βρούμε την απάντηση είναι σκεφτούμε πάλι «διαιρετικά»: τεμαχίζουμε το διάστημα ενδιαφέροντος, και το τεμαχίζουμε σε αρκούντως πολλά κομμάτια ώστε στο καθένα από αυτά η καμπύλη μας να φαίνεται ευθεία –όπως είπαμε όταν εξετάζαμε την παράγωγο, κάθε καμπύλη φαίνεται ευθεία αν κάνουμε αρκετά έντονο ζουμ. Τώρα, ο υπολογισμός του εμβαδού που περικλείεται εντός οποιουδήποτε διαστήματος είναι εύκολη υπόθεση, διότι το σχήμα ανάχθηκε σε γνωστό σχήμα, συγκεκριμένα σε ένα τραπέζιο:



Με αρκετά έντονο ζουμ, η καμπύλη έχει μετατραπεί σε ευθεία.

Έτσι, το εμβαδό του σχήματος είναι (f+df+f)dx/2=(2f+df)dx/2, και επειδή το dfείναι απειροστά μικρό, θα είναι f>>df, δηλαδή 2f+df≈2f, άρα το εμβαδό αυτό είναι fdx. Προφανώς, το συνολικό εμβαδό θα προκύψει αθροίζοντας τα επιμέρους εμβαδά, οπότε κατανοούμε ότι πράγματι το ολοκλήρωμα, που είναι ακριβώς αυτό το άθροισμα όταν τεμαχίσουμε το διάστημα σε υποδιαστήματα απειροστού πάχους, θα περιγράφει εμβαδά. Επομένως, πέραν του ότι είναι η αντιστροφή της παραγώγισης, το ολοκλήρωμα έχει και αυτή την επιπλέον χρηστική αξία.

Διευκρινίζεται ότι, η ερμηνεία του ολοκληρώματος ως εμβαδό δε σημαίνει ότι όλα τα ολοκληρώματα έχουν θετική τιμή. Γενικά, ένα ολοκλήρωμα μπορεί να έχει θετικές, αρνητικές ή και μηδενική τιμή. Η μόνη περίπτωση που ένα ολοκλήρωμα έχει σίγουρα θετική τιμή είναι όταν η ολοκληρωτέα είναι θετική (ή είναι θετική εκτός από πεπερασμένο αριθμό σημείων όπου μηδενίζεται) σε όλο το διάστημα ολοκλήρωσης, Ώστοσο, είναι αλήθεια ότι το ολοκλήρωμα από αως bδίνει την επιφάνεια που περικλείεται από τον άξονα των x, από την καμπύλη και από τις οριζόντιες ευθείες x=a, x=b, πλην όμως θεωρώντας αρνητικό πρόσημο για επιφάνειες που βρίσκονται κάτω από τον άξονα των x.



Το $\int_a^b \mathrm{dx}\, f$ είναι το «προσημασμένο» εμβαδό που περικλείεται από τις x=a, x=b, την καμπύλη και τον άξονα x. Τα μπλε τμήματα της επιφάνειας είναι στο άνω -θετικό- ημιεπίπεδο οπότε το εμβαδό τους λογίζεται ως θετικό, το κίτρινο είναι στο κάτω -αρνητικό- οπότε το εμβαδό του λογίζεται ως αρνητικό. Αν θέλουμε να βρούμε το καθαρό συνολικό εμβαδό, προφανώς πρέπει να υπολογίσουμε τα επιμέρους εμβαδά-ολοκληρώματα· το ολοκλήρωμα από το a ως το πρώτο σημείο τομής της f με τον άξονα των x και το ολοκλήρωμα από το δεύτερο σημείο τομής της f με τον άξονα των x ως το b θα βγουν θετικά, ενώ εκείνο από το πρώτο ως το δεύτερο σημείο τομής της f με τον άξονα των x θα βγει αρνητικό. Για το συνολικό καθαρό εμβαδό θα πρέπει να προσθέτουμε τις επιμέρους απόλυτες τιμές (πηγή Wikipedia).

Σημειώνεται ότι κάθε ολοκλήρωμα θα πρέπει να περιέχει τουλάχιστον μια απειροστή ποσότητα dx, η οποία καλείται «διαφορικό» και υποδεικνύει τη μεταβλητή ως προς την οποία ολοκληρώνουμε. Αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία σε συναρτήσεις περισσότερων μεταβλητών, όπου έχουμε περισσότερες επιλογές ως προς τη μεταβλητή ολοκλήρωσης. Στη δική μας περίπτωση όπου οι συναρτήσεις είναι μόνο μίας μεταβλητής, έχουμε μόνο μία επιλογή, οπότε κάθε ολοκλήρωμα πρέπει να περιέχει ακριβώς μία μεταβλητή ολοκλήρωσης.

Πριν περάσουμε στις ιδιότητες του ολοκληρώματος, αναφέρουμε και ότι ιστορικά και σε διάφορα πλαίσια και μαθηματικούς ή άλλους επιστημονικούς κλάδους έχουν εμφανιστεί διάφορα είδη ολοκληρωμάτων. Λόγω της πολυπλοκότητας των ιδεών πίσω από αυτά, δε θα αναλωθούμε εδώ στην παρουσίασή τους. Αρκούμαστε να αναφέρουμε ότι το ολοκλήρωμα για το οποίο συζητήσαμε και μας αφορά είναι το λεγόμενο ολοκλήρωμα Riemann.

Όσον αφορά τις ιδιότητες, έχουν βρεθεί αρκετές, καθώς και αρκετά θεωρήματα. Ορισμένα εξ αυτών είναι πολύπλοκα και μάλλον αδιάφορα για το πλαίσιό μας, οπότε θα αρκεστούμε μόνο στο να αναφέρουμε κάποιες βασικές ιδιότητες που διευκολύνουν τους υπολογισμούς.

Η πρώτη είναι η γραμμικότητα της ολοκλήρωσης. Για c, dσταθερές και f, gσυναρτήσεις του x:

$$\int_a^b dx\,(cf(x) + dg(x)) = c\int_a^b dx\,f(x) + d\int_a^b dx\,g(x).$$

Η επόμενη έχει να κάνει με τα όρια της ολοκλήρωσης. Ως τώρα, σε όλα τα παραπάνω, θεωρήσαμε ολοκληρώματα $\int_a^b dx\,f$, όπου a<b, δηλαδή το κάτω όριο ολοκλήρωσης μικρότερο από το άνω. Όμως αυτό δεν είναι απαραίτητο. Μπορούν να οριστούν και ολοκληρώματα όπου το κάτω όριο είναι μεγαλύτερο, δηλαδή ολοκληρώματα για τα οποία a<b, και για αυτά ισχύει:

$$\int_b^a dx\,f(x) = -\int_a^b dx\,f(x).$$

Από αυτήν, εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε ότι $\int_a^a dx\,f(x)=0$.

Επίσης, μπορούμε να συνενώνουμε διαστήματα ολοκλήρωσης ως εξής:

$$\int_b^a dx\,f(x) + \int_c^b dx\,f(x) = \int_c^a dx\,f(x).$$

Τέλος ισχύει ότι αν F(x)=$\int_a^x dt\, f(t)$, τότε F'(x)=f(x).

Πλέον, συνδυάζοντας αυτές τις ιδιότητες μαζί με τις γνώσεις που έχουμε για τη φύση της ολοκλήρωσης ως αντιστροφή της παραγώγισης καθώς και τις παραγώγους των βασικών συναρτήσεων, μπορούμε να υπολογίσουμε μια ευρύτατη γκάμα ολοκληρωμάτων. Πχ, πολύ εύκολα μπορούμε να δούμε ότι, εφόσον (sinx)'=cosx, $\int$ dxcosx=sinx+c, cσταθερά.

Πριν κλείσουμε την ενότητα, καταγράφουμε και δύο κανόνες, οι οποίοι μπορεί να αποδειχθούν πολύ χρήσιμοι σε πρακτικές εφαρμογές ολοκληρωμάτων.

Ο πρώτος είναι η ολοκλήρωση κατά παράγοντες και βασίζεται στην ιδιότητα των παραγώγων (fg)'=f 'g+fg' ή οποία γράφεται ισοδύναμα f 'g=(fg)'-gfg'. Ο κανόνας είναι:

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx=[f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx,\ [f(x)g(x)]_a^b \equiv f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Ο δεύτερος είναι η αντικατάσταση. Αν έχουμε να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx$, μπορούμε να θέσουμε g(x)=u. Τότε du=g'(x)dx, οπότε:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

3. Διαφορικές εξισώσεις

Όλα τα παραπάνω αναφέρθηκαν μόνο και μόνο για να φτάσουμε σε αυτή την ενότητα, που το περιεχόμενό της βρίσκεται στην καρδιά των μαθηματικών μοντέλων που θα εξετάσουμε σε αυτή την εργασία.

Μια διαφορική εξίσωση είναι μία εξίσωση η οποία περιέχει στους όρους της μία ή περισσότερες άγνωστες συναρτήσεις και παραγώγους της ή τους. Οι εξισώσεις τέτοιου τύπου είναι συγκλονιστικής σημασίας, τόσο για τα ίδια τα μαθηματικά όσο και για οποιαδήποτε επιστήμη. Ο λόγος είναι ότι, στις επιστημονικές εφαρμογές, οι συναρτήσεις αντιπροσωπεύουν κάποιες ποσότητες (πχ φυσικές ή οικονομικές). Τώρα, όπως είπαμε η παράγωγος αντιπροσωπεύει το ρυθμό μεταβολής. Έτσι, μια διαφορική εξίσωση συσχετίζει ποσότητες με το ρυθμό μεταβολής τους. Ως εκ τούτου, αυτές οι εξισώσεις πολύ σημαντικό ρόλο σε κλάδους όπως η μηχανική, η ηλεκτρολογία, η φυσική, τα οικονομικά και άλλους.

Η μελέτη των διαφορικών εξισώσεων αφορά την εύρεση των λύσεών τους, δηλαδή τις συναρτήσεις εκείνες που ικανοποιούν μια διαφορική εξίσωση -κατά τον ίδιο τρόπο που σε μια αλγεβρική εξίσωση αναζητούνται οι αριθμητικές λύσεις που την ικανοποιούν- και τη μελέτη των ιδιοτήτων τους. Θα πρέπει να είναι και διαισθητικά προφανές, όμως, ότι η επίλυση μιας διαφορικής εξίσωσης δεν μπορεί να είναι τόσο εύκολη υπόθεση όσο η επίλυση μιας αλγεβρικής εξίσωσης. Και πράγματι, δεν έχει βρεθεί ως τώρα κάποια στάνταρ διαδικασία που θα αποδώσει τη λύση μιας οποιασδήποτε διαφορικής εξίσωσης. Για την ακρίβεια, αναλυτικά και ακριβώς, μπορούν να λυθούν λιγοστές διαφορικές εξισώσεις –ευτυχώς κάποιες εξ αυτών ιδιαίτερα σημαντικές. Εδώ «αναλυτικά» σημαίνει χωρίς να καταφύγουμε σε αριθμητική επίλυση μέσω υπολογιστή –που ακόμη και έτσι, δεν είναι όλες οι εξισώσεις επιλύσιμες. Ο υπολογιστής, ωστόσο, επιστρατεύοντας αλγορίθμους προσεγγίζει λύσεις αριθμητικά, έστω κι αν αυτές δεν μπορούν να γραφούν σε κλειστή μορφή.

Η κατανόηση της ύπαρξης διαφορικών εξισώσεων, προφανώς ακολουθεί άμεσα τη θεμελίωση της ιδέας της παραγώγου. Και, όντως, μαζί με την επινόηση και θεμελίωση του διαφορικού λογισμού, εμφανίστηκαν και οι πρώτες διαφορικές εξισώσεις. Αναφέρουμε ενδεικτικά τη λεγόμενη εξίσωση Bernoulli, η οποία είναι μια διαφορική εξίσωση συγκεκριμένου τύπου:

$$f'+P(x)f=Q(x)f^n.$$

Εδώ fείναι η άγνωστη συνάρτηση (η διαφορική εξίσωση περιέχει την ίδια και την πρώτη της παράγωγο) και P(x), Q(x) γνωστές συναρτήσεις. Αυτή διατυπώθηκε το 1695 από τον Bernoulliκαι αργότερα ο Leibnizβρήκε κάποιες λύσεις της.

Θα πρέπει να είναι κατανοητό το πόσο ευρύ είναι το φάσμα των διαφορικών εξισώσεων –και ειδικά αν θεωρήσουμε συναρτήσεις περισσότερων μεταβλητών. Για τις ανάγκες αυτής της εργασίας, όπου ασχολούμαστε με συναρτήσεις μίας μεταβλητής, χρειαζόμαστε μόνο ένα συγκεκριμένο είδος διαφορικών εξισώσεων, τις λεγόμενες συνήθεις. Αυτές είναι μάλλον οι απλούστερες, αλλά ακόμη και για αυτές δεν είναι καθόλου εύκολο να ανακτηθούν λύσεις στη γενική περίπτωση.

Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις καλούνται εκείνες που περιέχουν μία άγνωστη συνάρτηση μίας μεταβλητής x, παραγώγους αυτής της συνάρτησης και διάφορες άλλες γνωστές συναρτήσεις του x. Προφανώς η εξίσωση Bernoulliείναι ακριβώς τέτοιας μορφής. Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις είναι εκείνες που είναι γραμμικές ως προς τις άγνωστες συναρτήσεις και τις παραγώγους τους –δηλαδή εκείνες που είναι ένα γραμμικό πολύωνυμο των άγνωστων συναρτήσεων και των παραγώγων τους. Η θεωρία τους είναι αρκετά ανεπτυγμένη και αυτό οφείλεται στη σχετική απλούστευση που παρέχουν σε σχέση με άλλες, καθώς και στο ότι πολλές διαφορικές εξισώσεις που χρησιμοποιούνται στις επιστήμες είναι τέτοιου τύπου.

Σημειώνουμε και την ορολογία «διαφορική εξίσωση n-οστής τάξης», που σημαίνει ότι η υψηλότερης τάξης παράγωγος που εμφανίζεται στη διαφορική εξίσωση είναι τάξης n.

Για να γίνει σαφής η ευρύτητα της ιδέας της διαφορικής εξίσωσης αλλά και η δυσκολία επίλυσής των περισσότερων, παρακάτω αναφέρουμε ενδεικτικά κάποια παραδείγματα, τα οποία εντάσσονται στο φάσμα των συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Σε όλα όσα ακολουθούν, η fείναι μια άγνωστη συνάρτηση του xκαι c, ω είναι γνωστές σταθερές.

Η πρώτη είναι η ετερογενής, πρώτης τάξης, γραμμική συνήθης διαφορική εξίσωση σταθερών συντελεστών:

$$\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dx}} = \mathrm{cf} + \mathrm{x}^2.$$

Ακολουθεί μία δεύτερης τάξης γραμμική:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{f}}{\mathrm{dx}^2} - \mathrm{x}\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dx}} + \mathrm{f} = 0.$$

Μια πολύ σημαντική για τη φυσική είναι η ομογενής, δεύτερης τάξης, γραμμική και με σταθερούς συντελεστές:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{f}}{\mathrm{dx}^2} + \omega^2\mathrm{f} = 0.$$

Το ενδιαφέρον αυτής έγκειται στο ότι περιγράφει τον απλό αρμονικό ταλαντωτή, σύστημα αρχετυπικό για τη φυσική. Η επόμενη είναι και αυτή μια εξίσωση πολύ σημαντική, διότι περιγράφει την κίνηση εκκρεμούς μήκους νήματος L. Είναι και αυτή δεύτερης τάξης και συνήθης αλλά μη γραμμική λόγω του ημιτόνου (gείναι η επιτάχυνση της βαρύτητας):

$$L\frac{d^2f}{dx^2} + g\sin f = 0.$$

Σημειώνουμε και το νόημα της ορολογίας «ομογενής» που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω: ομογενής διαφορική εξίσωση σημαίνει ότι έχει για λύση της την $f=0$.

Η αλήθεια είναι ότι έχουν βρεθεί λύσεις διαφορικών εξισώσεων που μπορούν να γραφούν ακριβώς και σε κλειστή μορφή. Ωστόσο, λόγω της ποικιλομορφίας των εξισώσεων που απαντώνται γενικά, ο τρόπος σκέψης και η διαδικασία επίλυσης ενδέχεται να διαφέρει κατά πολύ από περίπτωση σε περίπτωση, ενώ είναι και περιπτώσεις που μια μικρή αλλαγή στη μορφή μπορεί να απαιτεί ρηξικέλευθες αλλαγές στη στρατηγική επίλυσης. Για να μη «βαρύνει» το κείμενο με τεχνικά σημεία και λεπτομέρειες που δεν αφορούν τα όσα θα εξετάσουμε στη συγκεκριμένη εργασία, θα παρουσιάσουμε εδώ την επίλυση μόνο δύο, και μάλιστα πολύ συγκεκριμένης μορφής εξισώσεων. Αυτές, παρά την πολύ συγκεκριμένη μορφολογία τους, θα αναδείξουν κάποιες βασικές τεχνικές και σκεπτικά που ακολουθούνται γενικά, ενώ ταυτόχρονα είναι και θεμελιώδους σημασίας για εφαρμογές.

Πριν το κάνουμε όμως αυτό, θα δώσουμε κάποιες σημαντικές και ενδιαφέρουσες διαπιστώσεις που έχουν γίνει και που αφορούν τα παραδείγματα που θα παρουσιάσουμε – επικεντρωνόμαστε, φυσικά και πάλι, σε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.

Αν έχουμε μια ομογενή, γραμμική διαφορική εξίσωση και έχουμε καταφέρει να βρούμε δύο λύσεις της f_1, f_2, τότε θα είναι λύση της ίδιας εξίσωσης και ο γραμμικός συνδυασμός τουςaf_1+bf_2, a, bσταθερές. Αυτό το Θεώρημα αρκεί για να μας δείξει το «χάος» που έχουμε να αντιμετωπίσουμε όταν λύνουμε διαφορικές εξισώσεις: οι ομογενείς και γραμμικές, δηλαδή μια σχετικά απλή κατηγορία σε σχέση με άλλες, όχι απλώς δεν έχουν απαραίτητα μοναδική λύση, αντιθέτως, σύμφωνα με αυτό το θεώρημα, έχουν μια τεράστια οικογένεια λύσεων –για την ακρίβεια μια τυχούσα διαφορική εξίσωση θα έχει άπειρες λύσεις!

Σημειώνουμε πως αυτό δε σημαίνει απαραίτητα ότι κάθε λύση μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός δύο γνωστών λύσεων, σε κάθε περίπτωση. Ωστόσο, αυτό είναι σε κάποια συγκεκριμένη περίπτωση αλήθεια, και συγκεκριμένα αν και μόνο αν η γραμμική, ομογενής διαφορική εξίσωση είναι δεύτερης τάξης και οι f_1, f_2είναι γραμμικώς ανεξάρτητες (γραμμικώς ανεξάρτητες σημαίνει ότι η εξίσωση $af_1(x)+bf_2(x)=0$ ισχύει ταυτοτικά μόνο για $a=b=0$).

Αυτό είναι απόρροια ενός γενικότερου Θεωρήματος, το οποίο είναι πάρα πολύ σημαντικό και σε κάποιες περιπτώσεις μπορεί να συμβάλλει σημαντικά στην επίλυση. Αυτό το Θεώρημα λέει ότι αν έχουμε μία ομογενή, γραμμική διαφορική εξίσωση τάξης πτότε υπάρχουν πγραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις f_1, f_2,…, f_nκαι η γενική λύση της εξίσωσης γράφεται ως $f=c_1f_1+c_2f_2+\ldots c_nf_n$, $c_1,\ldots,c_n$σταθερές. Αυτό είναι πάρα πολύ σημαντικό, διότι παρέχει μια στρατηγική επίλυσης –περιορισμένη, ωστόσο, σε γραμμικές, ομογενείς εξισώσεις: αν η εξίσωση είναι n-οστής τάξης, το μόνο που έχουμε κάνουμε είναι να βρούμε πγραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις –όχι ότι αυτό είναι πάντα εύκολο, αλλά είναι μια αρχή! Αν το καταφέρουμε αυτό, το πρόβλημα έχει λυθεί· πλέον μπορούμε να γράψουμε τη γενική λύση.

Συνήθως, στα εφαρμοσμένα μαθηματικά, αυτή η απροσδιοριστία στη λύση, η οποία είναι έμφυτη σε κάθε είδους διαφορική εξίσωση, αίρεται μέσω κάποιων αρχικών, συνοριακών ή άλλων συνθηκών –θα εξηγήσουμε στα παραδείγματά μας τι σημαίνει αυτό.

Με αυτά ανά χείρας, μπορούμε να περάσουμε στο πρώτο παράδειγμα που θα μελετήσουμε. Πρόκειται για τη διαφορική εξίσωση (ορίζουμε για ευκολία και $f>0$):

$$\frac{df}{dx} = -\lambda f.$$

Είναι μια εξίσωση πάρα πολύ απλή, τόσο στη μορφή όσο και στην ερμηνεία της: στην ουσία μας λέει απλά ότι ψάχνουμε μια συνάρτηση που η παράγωγός της -δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της- είναι ανάλογος της ίδιας της συνάρτησης (εδώ λ είναι μία σταθερά). Αυτή η κατάσταση, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής μιας ποσότητας να είναι ανάλογη της ίδιας της ποσότητας, απαντάται σε σωρεία φυσικών, μηχανικών και ηλεκτρικών συστημάτων –για παράδειγμα, είναι γνωστό ότι σε ένα ραδιενεργό δείγμα ο ρυθμός διάσπασης των πυρήνων είναι ανάλογος του αριθμού των πυρήνων του δείγματος.

Προχωρούμε στην επίλυση της εξίσωσης. Το πρώτο πράγμα που διαπιστώνουμε είναι ότι είναι γραμμικό πολυώνυμο της πρώτης παραγώγου και της συνάρτησης, οπότε είναι γραμμική. Επίσης, είναι προφανές ότι η λύση $f=0$ είναι λύση της, οπότε είναι και ομογενής, ενώ, είναι εμφανές ότι είναι και πρώτης τάξης. Επομένως, το προαναφερθέν θεώρημα μας λέει ότι η γενική λύση της θα προέλθει από μια γραμμικώς ανεξάρτητη λύση –παρόλο που η ορολογία «γραμμικώς ανεξάρτητη» για μία μόνο λύση είναι πλεονασμός, στην περίπτωσή μας μεταφράζεται ως μη μηδενική λύση.

Τώρα, για την επίλυση, αν θυμηθούμε τις παραγώγους των βασικών συναρτήσεων, ξέρουμε ότι η παράγωγος της e^xείναι η ίδια η συνάρτηση e^x, κάτι κοντινό στην αναλογία που ψάχνουμε, οπότε με μια καλύτερη μαντεψιά μπορούμε να βρούμε τη λύση. Σημειώνεται ότι, παρόλο που στα μαθηματικά δε συνηθίζεται κάποιος να «μαντεύει», στις γραμμικές, ομογενείς συνήθεις διαφορικές εξισώσεις ίσως να μην είναι τόσο κακή στρατηγική: θέλουμε να βρούμε απλώς ηγραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις· το πώς θα τις βρούμε είναι μάλλον άσχετο!

Εν προκειμένω δε χρειάζονται μαντεψιές γιατί τα πράγματα είναι απλά: έχουμε την πρώτη παράγωγο μια συνάρτησης μίας μεταβλητής, οπότε μπορούμε να αντιμετωπίσουμε το αριστερό μέλος της εξίσωσης ως πηλίκο. Έτσι, η εξίσωση μπορεί γραφεί ως:

$$\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{f}} = -\lambda \mathrm{dx}.$$

Ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη λαμβάνουμε $\int \frac{\mathrm{df}}{\mathrm{f}} = \int(-\lambda)\mathrm{dx}$.Αυτή τώρα είναι πολύ εύκολο να λυθεί αν θυμηθούμε ότι $\frac{1}{x}$=(lnx)’, 1=(x)’. Έτσι, η παραπάνω δίνει

$\ln f + c_1 = -\lambda x + c_2 \Rightarrow \ln f = -\lambda x + c$, $c = c_2 - c_1$.

Λύνοντας ως προς f, $f = e^c e^{-\lambda x} = Ce^{-\lambda x}$, $C = e^c$.

Επομένως, προέκυψε ακριβώς εκείνη η απροσδιοριστία που αναφέραμε πριν: εμφανίστηκε μια ολόκληρη οικογένεια λύσεων, αφού η $f=Ce^{-\lambda x}$είναι λύση για κάθε σταθερά C. Είναι πολύ εύκολο να αρθεί αν δινόταν και μια συνθήκη για την f, πχ ότι f(0)=1. Τότε, C=1, και άρα, $f=e^{-\lambda x}$, οπότε μοναδική λύση.

Το επόμενο παράδειγμά μας είναι η εξίσωση του απλού αρμονικού ταλαντωτή:

$$\frac{d^2f}{dx^2}+\omega^2 f=0.$$

Είναι γραμμική, ομογενής και δεύτερης τάξης. Επομένως, ζητάμε 2 γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις για να βρούμε τη γενική. Εδώ ζητάμε η δεύτερη παράγωγος να είναι ανάλογη της συνάρτησης. Με μια γρήγορη ματιά στις βασικές παραγώγους, εύκολα θα δούμε ότι μάλλον υπάρχει κάποια σχέση με τα ημίτονα και τα συνημίτονα, διότι (sinx)’=cosxκαι άρα (sinx)’’=(cosx)’= -sinx, δηλαδή όντως η δεύτερη παράγωγος του ημιτόνου είναι «σχεδόν» το ημίτονο –και παρόμοια (cosx)’’= -cosx.

Για να μην πάμε με μαντεψιά όμως, μπορούμε να παρατηρήσουμε το εξής: ξέρουμε ότι όσες φορές και να παραγωγίζουμε την εκθετική, θα παίρνουμε την εκθετική. Επίσης, από τις ιδιότητες των παραγώγων ξέρουμε ότι $(e^{cx})^{(n)}=c^n e^{cx}$, δηλαδή οι παράγωγοι της e^{cx} είναι ανάλογες της ίδιας. Άρα, σε κάθε ομογενή, γραμμική οποιασδήποτε τάξης, φαίνεται βολικό να δοκιμάσουμε ως λύση την e^{cx}. Πράγματι, αν το κάνουμε αυτό εδώ, η διαφορική γράφεται

$c^2e^{cx}+\omega^2e^{cx}=0$.

Για να ισχύει αυτό για κάθε x, προφανώς πρέπει $c^2= -\omega^2$, ή c±iω, όπου iη φανταστική μονάδα, $i^2= -1$. Επομένως, βρήκαμε δύο λύσεις της εξίσωσης: είναι οι $e^{i\omega x}$, $e^{-i\omega x}$, και μπορούμε να δούμε ότι είναι και γραμμικώς ανεξάρτητες διότι απαιτώντας η $ae^{i\omega x}+be^{-i\omega x}=0$ να ισχύει για κάθε x, η μόνη λύση είναι a=b=0. Άρα, έχουμε βρει δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις, οπότε και τη γενική:

$f = ce^{i\omega x} + de^{-i\omega x}$.

Η δε σχέση με τα ημίτονα και τα συνημίτονα μπορεί να ανακτηθεί με χρήση της ταυτότητας του Eulere^{x}=cosx+isinx. Και πάλι προέκυψε οικογένεια λύσεων. Αν θέλουμε πιο συγκεκριμένη λύση, θα χρειαστούμε συνθήκες. Για παράδειγμα, αν μας δίνεται f(0)=0, έχουμε: c+d=0, που και πάλι δε μας αρκεί για να προσδιορίσουμε πλήρως τη λύση. Αν όμως είχαμε και άλλη μια συνθήκη, πχ f(π/2ω)=1, τότε (από την ταυτότητα του Euler,εύκολα προκύπτει ότι $e^{i\pi/2}$=iκαι ότιe^{-}

$^{i\pi/2}$=-i),d –c=i. Άρα, τώρα μπορούμε να λύσουμε το σύστημα και να βρούμε d=i/2, c=–i/2. Έτσι, και αν αξιοποιήσουμε την απλή συνέπεια της ταυτότητας του Eulerότι $e^{i\omega x} - e^{-i\omega x} = 2i\sin\omega x$,

f=sinωx.

Σημειώνεται ότι στην περίπτωση της εξίσωσης πρώτης τάξης προέκυψε μία άγνωστη σταθερά, οπότε αρκούσε μία συνθήκη, ενώ στην περίπτωση της εξίσωσης δεύτερης τάξης προέκυψαν δύο, οπότε χρειάζονταν δύο συνθήκες. Αυτή η λογική επεκτείνεται στις γραμμικές, ομογενείς διαφορικές εξισώσεις: για εξίσωσηn-οστής τάξης θα χρειάζονται nσυνθήκες για να προκύψει μοναδική λύση.

Οι διαφορικές εξισώσεις είναι πάρα πολύ σημαντικές για τα μοντέλα ηλεκτρικών συστημάτων που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω.

4. Ο μετασχηματισμός Laplace

Τέλος, θα αναφερθούμε σύντομα στο μετασχηματισμό Laplace. Πρόκειται για ένα μαθηματικό τέχνασμα, το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί οπουδήποτε, αλλά υπάρχουν κάποιες διαφορικές εξισώσεις που η εφαρμογή του μπορεί να απλουστεύσει δραστικά την επίλυσή τους.

Ο μετασχηματισμός Laplaceορίζεται μέσω του ολοκληρώματος

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st} dt.$$

Παρατηρούμε ότι η νέα συνάρτηση που προκύπτει μετά το μετασχηματισμό είναι συνάρτηση μιας νέας μεταβλητής (η fείναι συνάρτηση κάποιας t,η οποία όμως ολοκληρώνεται, και η Fπου προκύπτει είναι συνάρτηση της sπου εμφανίζεται στο εκθετικό μέσα στο ολοκλήρωμα). Σημείωνουμε ότι, εν γένει, ο sμπορεί να είναι και μιγαδική ποσότητα. Ο μετασχηματισμός αυτός μπορεί να κατανοηθεί και ως το ανάλογο των δυναμοσειρών $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$στο συνεχές.

Πριν αναφερθούμε στο λόγο εισαγωγής του εδώ, παρουσιάζουμε κάποιες ιδιότητές του. Μία σημαντική είναι ότι λειτουργεί γραμμικά, ότι δηλαδή αν F(s), G(s) είναι οι μετασχηματισμοί Laplaceτων f(t), g(t) αντίστοιχα, τότε ο μετασχηματισμός Laplace της af(t)+bg(t), a,bσταθερές, είναι η aF(s)+bG(s).

Πέραν αυτού, με χρήση του ορισμού, μπορούμενα υπολογίσουμε τους μετασχηματισμούςLaplaceκάποιων σημαντικών μορφών συναρτήσεων:

γιαf(t)=tg(t), F(s)= –G'(s) (Gο μετασχηματισμός Laplaceτης g, G' η πρώτη παράγωγος της Gως προς sκαι εδώ και στις παρακάτω).

Για $f(t)=t^n g(t)$, $F(s)=(-1)^n G^{(n)}(s)$.

Γιαf(t)=g'(t), F(s)= sG(s) –G(0).

Γιαf(t)=g''(t), $F(s)= s^2G(s) -sG(0^+) -G'(0^+)$.

Γιαf(t)=$g^{(n)}(t)$, $F(s)= s^nG(s) -\sum_{k=1}^{n} s^{n-k} g^{(k-1)}(0^+)$.

Φυσικά, υπάρχουν πολλές ακόμη σχέσεις αντίστοιχες αυτών, χρήσιμες σε διάφορα πλαίσια. Για τη δική μας μελέτη αυτές είναι αρκετές. Ο λόγος αναφοράς αυτού του μετασχηματισμού και της χρησιμότητάς του, μπορεί να διαφανεί από τις παραπάνω: ας υποθέσουμε ότι ασχολούμαστε με μια ομογενή, γραμμική συνήθη διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές, δηλαδή μια εξίσωση που όλοι οι όροι της είναι πρώτης ή μηδενικής τάξης ως προς μία συνάρτηση ή κάποια παράγωγό της, που οι συντελεστές αυτών των όρων είναι σταθεροί και που έχει και ως λύση τη μηδενική. Ηγενική μορφή αυτών των εξισώσεων προφανώς είναι (εδώ a_0, a_1,…a_nθεωρούνται γνωστές σταθερές)

$a_0f+a_1f' +a_2f^{(2)}+\dots a_nf^{(n)} =0$.

Τέτοιες εξισώσεις απαντώνται πολύ συχνά στη μοντελοποίηση ηλεκτρικών συστημάτων, οπότε έχει πολύ ανδιαφέρον η επίλυσή τους. Αν εφαρμόσουμε το μετασχηματισμό αυτό στην εξίσωσή μας, παρατηρούμε ότι στην ουσία έχουμε να κάνουμε μετασχηματισμούς Laplaceπαραγώγων κάποιας τάξης. Η τελευταία από της προηγούμενες σχέσεις όμως, μας δίνει ακριβώς το αποτέλεσμα αυτού του μετασχηματισμού. Το αποτέλεσμα αυτό, παρά την ενδεχόμενη πολυπλοκότητα της σειράς που εμφανίστηκε, έχει ένα τεράστιο πλεονέκτημα: δεν περιέχει πια παραγώγους –παρά μόνο τις τιμές παραγώγων σε συγκεκριμένο σημείο. Δηλαδή, ο μετασχηματισμός Laplaceμετατρέπει τέτοιου είδους εξισώσεις σε πολυωνυμικές! Έτσι, επιτρέπει την αναγωγή μιας διαφορικής εξίσωσης σε αλγεβρικό επίπεδο, στο οποίο η επίλυση ενδεχομένως να είναι ευκολότερη. Το τελικό αποτέλεσμα θα ληφθεί με την αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace, ώστε να προκύψει η συνάρτηση που μας ενδιέφερε εξ αρχής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{ο}
ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΔΙΑΤΑΞΕΩΝ

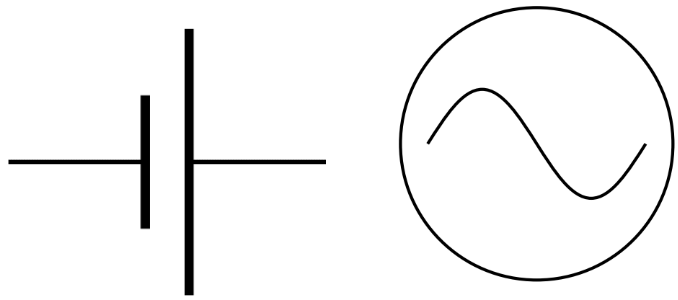
Σε αυτό το Κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τις τρεις σημαντικότερες διατάξεις που εμφανίζονται στα μοντέλα ηλεκτρικών συστημάτων, τον τρόπο λειτουργίας τους, τη φυσική τους σημασία και τη μαθηματική τους περιγραφή.

1. Αντίσταση

Η πρώτη συσκευή με την οποία θα ασχοληθούμε είναι η αντίσταση. Γενικότερα, η πιο ορθή χρήση της ορολογίας είναι να αναφέρουμε ως «αντιστάτη» τη συσκευή και ως «αντίσταση» το αντίστοιχο φυσικό μέγεθος, ωστόσο επειδή στην καθομιλουμένη ο όρος «αντίσταση» συχνά χρησιμοποιείται και για τις δύο έννοιες, τον υιοθετούμε με αυτό τον τρόπο και εδώ.

Αν θεωρήσουμε έναν μεταλλικό αγωγό οποιουδήποτε σχήματος, πχ ένα χάλκινο σύρμα ή ένα τυλιγμένο σύρμα από βολφράμιο μέσα σε έναν λαμπτήρα πυρακτώσεως, τα ελεύθερα ηλεκτρόνια του μετάλλου κινούνται άτακτα και τυχαία, δηλαδή η κίνηση δεν έχει κάποιο συγκεκριμένο προσανατολισμό. Πχ στο σύρμα, η συνολική κίνηση προς τη μία μεριά του σύρματος είναι κατά μέσο όρο ισοδύναμη με την κίνηση προς την άλλη, ή αλλιώς ο ρυθμός διέλευσης των φορτιών από οποιδήποτε επίπεδο κάθετο στη διατομή του σύρματος είναι μηδέν.

Αν, τώρα, συνδεθεί στον αγωγό μια μπαταρία, θα δημιουργηθεί στο σύρμα ένα ηλεκτρικό πεδίο. Τα ελεύθερα ηλεκτρόνια, ως οι μόνοι ελεύθεροι φορείς φορτίου της διάταξης, επηρεάζονται από αυτό το πεδίο: έτσι, οι κινήσεις που πριν ήταν άτακτες και τυχαίες, τώρα, λόγω του ηλεκτρικού πεδίου που παρέχει η μπαταρία, πλέον αποκτούν προσανατολισμό. Συγκεκριμένα, τα ηλεκτρόνια αρχίζουν κατά μέσο όρο να κινούνται προς τις περιοχές υψηλότερου δυναμικού (χωρίς, φυσικά, αυτό να σημαίνει ότι δε διατηρούν και μέρος της «άτακτης» κίνησής τους, η οποία είναι θερμικής φύσεως). Έτσι, σε αυτή την περίπτωση, δημιουργείται μια προσανατολισμένη κίνηση φορτίων. Αυτή ακριβώς η προσανατολισμένη κίνηση είναι το γνωστό ηλεκτρικό ρεύμα.



Στην πρώτη εικόνα το σύμβολο μιας πηγής (μπαταρίας) συνεχούς τάσης στα κυκλώματα (η μεγάλη γραμμή δηλώνει το θετικό πόλο της μπαταρίας, πηγή https://www.howtogeek.com/)· στη δεύτερη το σύμβολο μιας πηγής εναλλασσόμενης (ημιτονοειδούς) τάσης (πηγή https://tex.stackexchange.com/questions/7438/ac-source-symbol-in-tikz-circuits-ee-iec-library).

Σημειώνουμε ότι σε ένα κύκλωμα υπάρχει η πραγματική φορά και η συμβατική φορά του ρεύματος. Η πραγματική φορά είναι η πραγματική φορά κίνησης των ηλεκτρονιών, η οποία είναι από τις περιοχές χαμηλότερου δυναμικού προς τις περιοχές υψηλότερου, ή, αλλιώς, αντίθετη στη φορά της έντασης. Αντίθετα, η συμβατική φορά είναι ακριβώς αντίθετη. Αυτή η θεώρηση υπάρχει διότι αρχικά δεν ήξεραν ότι τα ηλεκτρόνια, που είναι οι φορείς του ρεύματος, έχουν αρνητικό φορτίο. Έτσι, ακολούθησαν τη λογική της βαρύτητας, όπου η κίνηση υπό την επίδραση πεδίου γίνεται από τα υψηλά προς τα χαμηλά δυναμικά. Έτσι, για ιστορικούς λόγους, έχει παραμείνει η σύμβαση να ορίζουμε το ρεύμα σύμφωνα με τη συμβατική και όχι με την πραγματική φορά του, δηλαδή θεωρώντας ότι προκύπτει από κίνηση θετικών φορτίων.

Ο ακριβής ορισμός του ρεύματος είναι η πρώτη παράγωγος του φορτίου ως προς το χρόνο, δηλαδή

$$\mathrm{i} = \frac{\mathrm{dq}}{\mathrm{dt}}.$$

Εδώ iείναι το σύμβολο του ρεύματος, qτο σύμβολο του φορτίου και tο χρόνος. Μονάδα μέτρησης του ρεύματος είναι, προφανώς, το Cb/s, το οποίο ταυτίζεται μετοAmpere (A).

Όπως είπαμε, το ηλεκτρικό πεδίο της μπαταρίας ασκεί μια δύναμη στα ελεύθερα ηλεκτρόνια. Τα ελεύθερα ηλεκτρόνια όμως δεν επιταχύνονται συνεχώς: στην πραγματικότητα συγκρούονται έντονα με τα ακίνητα ιόντα του πλέγματος του αγωγού. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα μέρος της κινητικής ενέργειας των ελεύθερων ηλεκτρονίων να μεταφερθεί στα ακίνητα ιόντα, ώσπου τα πρώτα αποκτούν μια σταθερή ταχύτητα, αντίρροπη στην κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου.

Η ποσότητα του ρεύματος που θα διαπεράσει το σύρμα, εξαρτάται σίγουρα από την τάση. Επίσης, είναι λογικό να εξαρτάται με κάποιον τρόπο από τις λεπτομέρειες του αγωγού – διαισθητικά ξέρουμε ότι δεν είναι το ίδιο να συνδέσουμε μια μπαταρία σε χαλκό και σε ξύλο. Στο ίδιο πλαίσιο, είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι το ρεύμα δεν αλλάζει αν πχ στρίψουμε ένα καλώδιο ή το καμπυλώσουμε ή το τυλίξουμε, κάτι που επίσης έχουμε υπ’ όψιν μας εμπειρικά.

Η αντίσταση ανάμεσα σε δύο σημεία ενός αγωγού ορίζεται ως το πηλίκο της διαφοράς δυναμικού μεταξύ αυτών των δύο σημείων προς το ρεύμα που διαρρέει αυτή την περιοχή:

$$R = \frac{v}{i}.$$

Είναι εμφανής η προέλευση της ονομασίας: προφανώς, όταν υπό κάποια διαφορά δυναμικού δημιουργείται σε έναν αγωγό ένα ρεύμα και σε έναν άλλον ένα μικρότερο, τότε ο δεύτερος «αντιστέκεται» περισσότερο στην επορροή της τάσης. Άρα, μικρότερα ρεύματα σημαίνουν μεγαλύτερη αντίσταση. Αν το νμετράται σε Voltsκαι το iσε A, τότε το Rμετράται σε Ohms (Ω). Η παραπάνω σχέση είναι νευραλγικής σημασίας για ηλεκτρικά κυκλώματα και είναι στην πραγματικότητα μια έκφραση του Νόμου του Ohmγια τέτοιες διατάξεις. Ο Νόμος του Ohmδεν περιορίζεται σε κυκλώματα, και στην ουσία συνδέει το ρεύμα που παράγεται σε μια διάταξη με την ένταση που ασκείται σε αυτή. Εδώ, όμως, που μας ενδιαφέρει να ασχοληθούμε αυστηρά με ηλεκτρικά κυκλώματα, μας αφορά μόνο η παραπάνω έκφραση και αυτή θα αποκαλούμε Νόμο του Ohm.

Σε αυτό τα πλαίσιο, η Rαποκαλείται αντίσταση του αγωγού ή της συσκευής που διαρρέεται από ρεύμα, και στην πραγματικότητα είναι μία εσωτερική ιδιότητα του αγωγού που εξαρτάται από κάποια χαρακτηριστικά του, όπως το υλικό του και η γεωμετρία του.

Για κυλινδρικούς αγωγούς σταθερής κάθετης διατομής A και μήκους lαπό συγκεκριμένο υλικό -ακριβώς δηλαδή όπως είναι τα καλώδια- μπορεί να αποδειχθεί ότι η αντίσταση θα δίνεται από τον τύπο

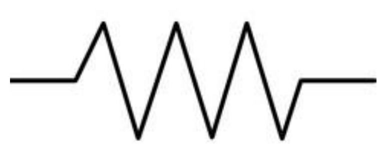
$$R = \rho\frac{l}{A}.$$

Εδώ ρ είναι μια ποσότητα που καλείται «ειδική αντίσταση» και εξαρτάται μόνο από το υλικό από το οποίο είναι φτιαγμένος ο αγωγός και από τη θερμοκρασία του. Βλέπουμε, δηλαδή, ότι όντως η R εξαρτάται από το υλικόκαι από τη γεωμετρία της διάταξης, και δεν αλλάζει αν πχ κάμψουμε το καλώδιο.

Αξίζει να αναφέρουμε ότι υπάρχει και μια άλλη ποσότητα, η αγωγιμότητα, η οποία δείχνει πόσο εύκολα άγει ρεύμα μία διάταξη και είναι το αντίστροφο της αντίστασης,

$$\sigma = \frac{1}{R}.$$

Σημειώνουμε, επίσης, ότι η σχέση R=v/iισχύει για όλα τα υλικάκαι υπό οποιεσδήποτε συνθήκες –προφανώς μπορεί πάντα να εξεταστεί το πηλίκο της ποσότητας v/iκαι να ονομαστεί το αποτέλεσμα R. Εκείνο που δεν ισχύει πάντα είναιο Νόμος του Ohm, δηλαδή ότι η αντίσταση είναι μια σταθερά, ανεξάρτητη των εξωτερικών συνθηκών. Για παράδειγμα, είναι γνωστό ότι υπάρχουν κάποια υλικά, οι λεγόμενοι υπεραγωγοί, που από κάποια θερμοκρασία και κάτω έχουν εντελώς μηδενική αντίσταση. Επίσης, υπάρχουν υλικά τα οποία, σε συνήθεις θερμοκρασίες, ναι μεν παρουσιάζουν αύξηση του ρεύματος με αύξηση της τάσης, πλην όμως όχι γραμμικά, ενώ υπάρχουν συσκευές που άγουν μόνο όταν η τάση εφαρμόζεται προς μία κατεύθυνση. Σε αυτή την εργασία, για αντιστάσεις οι οποίες είναι σταθερές και ανεξάρτητες της εξωτερικής τάσης, θα χρησιμοποιούμε σε κυκλώματα το παρακάτω σύμβολο:



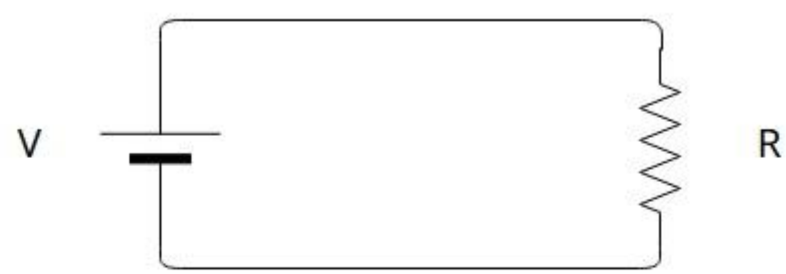
Το σύμβολο της αντίστασης σε κυκλώματα (πηγή https://stock.adobe.com/gr_en/search?k=resistor+symbol).

Το ότι ο Νόμος του Ohmδεν ισχύει πάντα εξηγεί και για ποιο λόγο δε θεωρείται θεμελιώδης Νόμος του Ηλεκτρομαγνητισμού. Στα μέταλλα, πάντως, και σε συνήθεις θερμοκρασίες ισχύει ικανοποιητικά. Σημειώνεται ότι η πραγματική εξήγηση του φαινομένου απαιτεί να επιστρατευτούν περιγραφές που έρχονται από την κβαντική φυσική, και σε εκείνο το πλαίσιο υπάρχει και η αρμόζουσα μαθηματική θεμελίωση. Ωστόσο, για τις ανάγκες αυτής της εργασίας θα θεωρήσουμε δεδομένη την σταθερότητα της αντίστασης όπου εμφανίζεται το παραπάνω σύμβολο.

Τώρα, ας θεωρήσουμε μια αντίσταση συνδεδεμένη με μια μπαταρία, με τρόπο ώστε το άκρο της αντίστασης ανα είναι συνδεδεμένο με τον θετικό πόλο τηςμπαταρίας ενώ το bμε τον αρνητικό. Αν ένα φορτίο dqπεράσει μέσα από την αντίσταση, τότε, από βασικές γνώσεις ηλεκτρομαγνητισμού, η δυναμική ενέργεια του φορτίου θα ελαττωθεί κατά $dU=dqV_{ab}$, V_{ab}η διαφορά δυναμικού μεταξύ των δύο σημείων. Αυτή η ενέργεια χάνεται από το φορτίο, αλλά προφανώς σε κάτι πρέπει να μετατραπεί. Στη συγκεκριμένη περίπτωση μετατρέπεται σε θερμική ενέργεια στην αντίσταση. Εδώ που η αντίσταση είναι μια σταθερά, μπορούμε να αξιοποιήσουμε το Νόμο του Ohm: επειδή dq=idtκαι $V_{ab}=iR$, καταλήγουμε ότι:

$$P = \frac{dU}{dt} = Vi = \frac{V^2}{R} = i^2 R.$$

Εδώ P είναι η ισχύς που αποδίδει η αντίσταση και αυτή η εξίσωση είναι γνωστή ως Νόμος του Joule. Προφανώς, για να βρούμε τη συνολική ενέργεια που αποδίδει η αντίσταση, πρέπει να ολοκληρώσουμε την ισχύ σε όλο το χρονικό διάστημα που μας ενδιαφέρει.



Μια μπαταρία συνεχούς τάσης συνδεδεμένη με αντίσταση.

Πριν κλείσουμε την ενότητα, εφόσον ήδη έχουμε αρχίσει να μιλάμε για κυκλώματα, καλό είναι να αναφερθούμε σε δύο πολύ βασικούς κανόνες που χρησιμοποιούνται για τη μελέτη τους, τους λεγόμενους κανόνες τουKirchhoff. Και οι δύο είναι μαθηματικές εκφράσεις πολύ λογικών σκέψεων και μπορεί να μοιάζουν απλοί εκ πρώτης όψεως, ωστόσο οι δυνατότητες που ανοίγουν με την κατανόηση και εφαρμογή τους είναι συγκλονιστικές, τόσο για απλά όσο και πάρα πολύ περίπλοκα κυκλώματα. Όπως θα διαφανεί και από την εξήγησή τους που θα δώσουμε παρακάτω, δεν ισχύουν μόνο σε κυκλώματα με αντιστάσεις, αλλά σε όλα τα κυκλώματα.

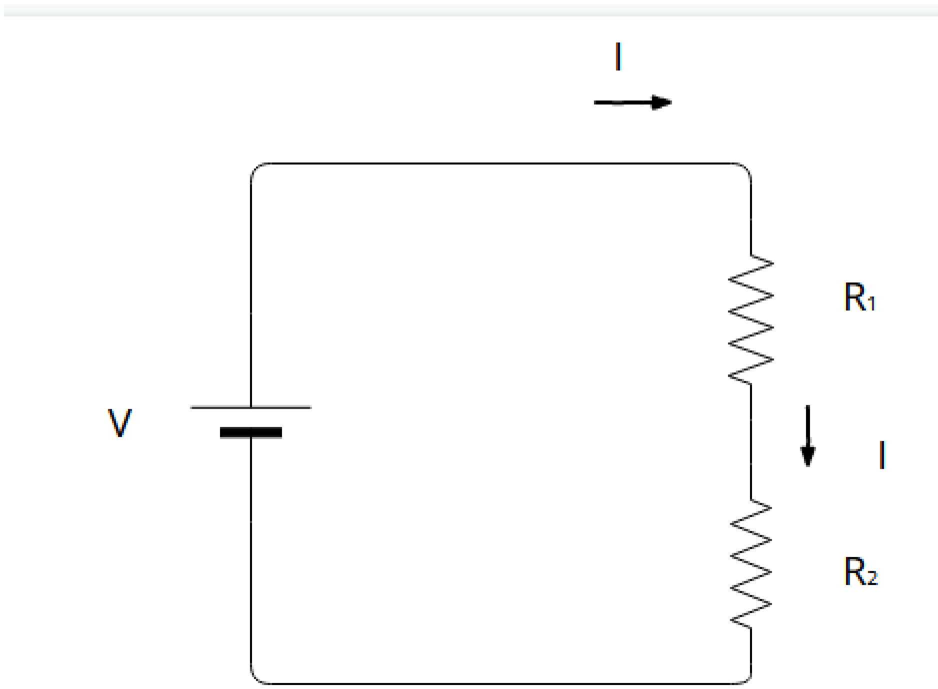
Ο πρώτος κανόνας αφορά τα ρεύματα και λέει ότι σε κάθε κόμβο ενός κυκλώματος το συνολικό ρεύμα που εισέρχεται στον κόμβο είναι ίσο με το συνολικό ρεύμα που εξέρχεται, ή αλλιώς το άθροισμα των ρευμάτων σε κάθε σημείο είναι μηδέν, θεωρώντας ως θετικά τα ρεύματα που εισέρχονται στον κόμβο και αρνητικά τα ρεύματα που εξέρχονται. Πχ σε ένα τυχόν σημείο ενός μονού καλωδίου -το οποίο είναι ο τετριμμένος κόμβος όπου συναντιέται μια διαδρομή με τη συνέχειά της- το ρεύμα που έρχεται από τη μία πλευρά θα βγει όλο από την άλλη. Αυτός ο κανόνας στην ουσία μας λέει ότι δεν έχουμε δημιουργία ή καταστροφή ρεύματος σε κάποιο τυχόν σημείο καλωδίου (όπου δεν υπάρχουν πηγές ή καταβόθρες ρεύματος) και, παρά τη φαινομενική απλοϊκότητα της διαπίστωσης, οφείλεται σε μια πολύ βαθύτερη αιτία που είναι η αρχή διατήρησης του φορτίου.

Ο δεύτερος κανόνας οφείλεται στη διατήρηση της ενέργειας και λέει ότι το άθροισμα των διαφορών δυναμικού σε έναν κλειστό βρόχο είναι μηδέν. Αυτό είναι απλώς μια άλλη έκφραση του ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι συντηρητικό, δηλαδή σε κλειστές διαδρομές αποδίδει έργο μηδέν.

Αυτοί, παρά την απλότητά τους μπορούν να οδηγήσουν σε πολύ σημαντικά συμπεράσματα, που ίσως εκ πρώτης όψεως να μην είναι απολύτως προφανή. Για παράδειγμα, στο παραπάνω κύκλωμα με τη μπαταρία και την αντίσταση, η εφαρμογή αυτών των δύο κανόνων μας δίνει τα διαισθητικά προφανή αλλά όχι τετριμμένα συμπεράσματα ότι η τάση στα άκρα της αντίστασης είναι ακριβώς ίση με την τάση που παρέχει η μπαταρία και ότι το ρεύμα είναι ίδιο σε όλα τα σημεία του κυκλώματος. Σημειώνεται ότι το ίδιο θα ίσχυε και αν η μπαταρία δεν ήταν πηγή συνεχούς αλλά εναλλασσόμενης τάσης –το ρεύμα θα ήταν ίδιο σε όλα τα σημεία, απλώς δε θα ήταν σταθερό στο χρόνο.

Θα χρησιμοποιήσουμε τους κανόνες του Kirchhoffγια να εξετάσουμε δύο συγκεκριμένες, πολύ πρακτικές συνδεσμολογίες που εμφανίζονται συνεχώς σε εφαρμογές, τη σύνδεση σε σειρά και τη σύνδεση σε παραλληλία, και θα βρούμε τη συνολική αντίσταση που προκύπτει.

Ένα τυπικό κύκλωμα με δύο αντιστάσεις συνδεδεμένες σε σειρά είναι το εξής (βάζουμε πηγή συνεχούς τάσης, αλλά θα μπορούσε να είναι και εναλλασσόμενης):



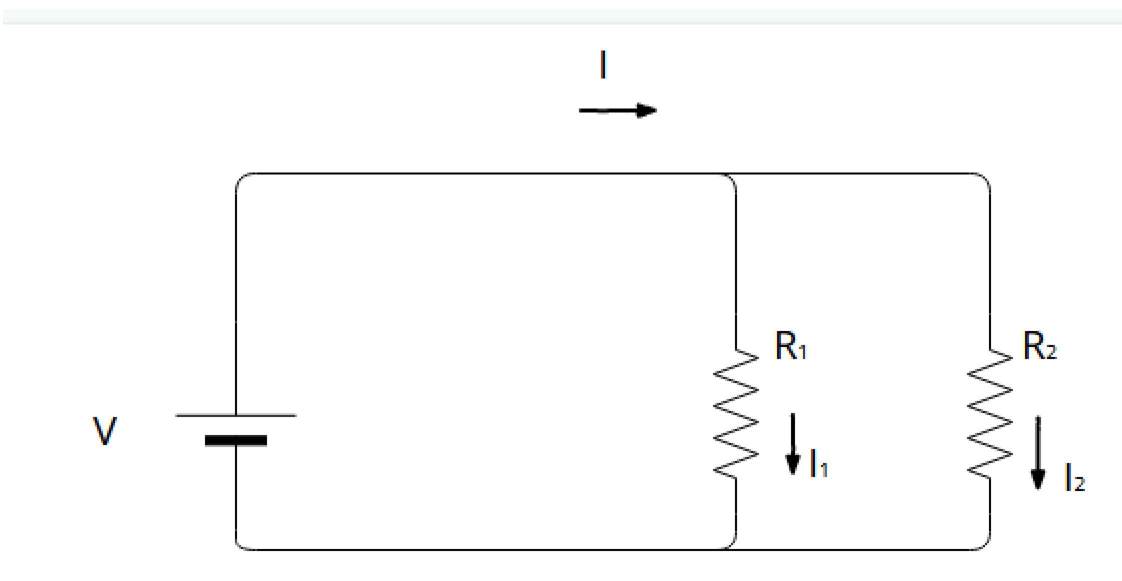
Κύκλωμα με πηγή σταθερής τάσης Vκαι δύο αντιστάσεις R_1, R_2συνδεδεμένες σε σειρά (το ρεύμα είναι συνεχές και συμβολίζεται με το κεφαλαίο γράμμα I).

Η εφαρμογή του πρώτου κανόνα του Kirchhoffσε αυτό το κύκλωμα μας δίνει ότι το ρεύμα είναι σταθερό παντού στο κύκλωμα, δηλαδή το ρεύμα που διαρρέει τις δύο αντιστάσεις είναι το ίδιο. Επομένως, ο Νόμος του Ohmδίνει για τις τάσεις στα άκρα καθεμιάς από τις δύο αντιστάσεις: V_1=IR_1, V_2=IR_2. Την ίδια στιγμή, ο δεύτερος κανόνας απαιτεί το άθροισμα των τάσεων σε όλο το βρόχο να είναι μηδέν, δηλαδή $V_1+V_2–V=0$ (το Vέρχεται με πρόσημο μείον γιατί αν θεωρήσουμε ότι οι τάσεις στις δύο αντιστάσεις φαίνονται ως θετικές, σε εκείνο το σημείο η τάση της πηγής φαίνεται αρνητική –πχ τέτοια σημεία βρίσκονται στην οριζόντια κάτω πλευρά του καλωδίου). Όμως, η τάση Vαπό το Νόμο του Ohmμπορεί να γραφεί ως V=IR, Rη συνολική αντίσταση του κυκλώματος, όποια κι αν είναι. Έτσι, συναληθεύοντας όλες αυτές, προκύπτει:

$V_1+V_2=V=>IR_1+IR_2=IR=>R=R_1+R_2$.

Άρα, η συνολική αντίσταση που προκύπτει από σύνδεση αντιστάσεων σε σειρά είναι το άθροισμα των επιμέρους αντιστάσεων. Είναι προφανές από τη λογική που ακολουθήθηκε ότι αυτό μπορεί να επεκταθεί σε περισσότερες αντιστάσεις. Έτσι, η συνολική αντίσταση ενός αριθμού αντιστάσεων συνδεδεμένων σε σειρά είναι απλώς το άθροισμα όλων των επιμέρους αντιστάσεων.

Στην παράλληλη συνδεσμολογία έχουμε το εξής σχήμα:



Παράλληλη συνδεσμολογία των αντιστάσεων R_1, R_2με πηγή συνεχούς τάσης V.

Εφαρμόζοντας τον πρώτο κανόνα του Kirchhoffσε κάποιον από τους κόμβους συνάντησης τριών καλωδιών, συνάγουμε ότι $I=I_1+I_2$, ενώ εφαρμόζοντας το δεύτερο σε δύο από τους τρεις κλειστούς βρόχους που σχηματίζονται συνάγουμε ότι $V=V_1=V_2$. Την ίδια στιγμή, θεωρώντας συνολική αντίσταση R, ο Νόμος του Ohmδίνει $V=IR$, $V_1=I_1R_1$, $V_2=I_2R_2$. Συναληθεύοντας όλα αυτά, προκύπτει:

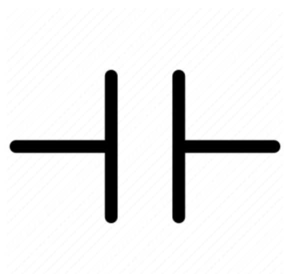
$I=I_1+I_2=>V/R=V/R_1+V/R_2=>1/R=1/R_1+1/R_2=>R=R_1R_2/(R_1+R_2)$.

Και πάλι μπορούμε να επεκτείνουμε τη λογική και να θεωρήσουμε πολλές αντιστάσεις συνδεδεμένες παράλληλα. Τότε, η συνολική αντίσταση θα δίνεται από την $1/R=1/R_1+1/R_2+1/R_3+\ldots$.

Με βάση αυτές, μπορούμε να βρούμε πάντα τη συνολική αντίσταση σε κάποια συνδεσμολογία, όσο περίπλοκη και αν είναι.

2. Πυκνωτής

Μια άλλη συσκευή, πάρα πολύ χρήσιμη σε εφαρμογές κυκλωμάτων, είναι ο πυκνωτής. Πρόκειται για ένα σύστημα δύο αγωγών, μεταξύ των οποίων παρεμβάλλεται μονωτικό υλικό (πχ αέρας ή πλαστικό). Στο πλαίσιο των πυκνωτών οι αγωγοί καλούνται οπλισμοί και το υλικό ανάμεσά τους διηλεκτρικό. Η χρησιμότητα του πυκνωτή έγκειται στην ιδιότητά του να μπορεί να φορτιστεί, δηλαδή να αποθηκεύει φορτίο και ενέργεια. Σε αυτή την εργασία θα ασχοληθούμε μόνο με επίπεδους πυκνωτές, δηλαδή πυκνωτές που οι οπλισμοί τους είναι δύο επίπεδες, παράλληλες, αγώγιμες πλάκες.



Το σύμβολο του πυκνωτή σε κυκλώματα (πηγή https://www.iconfinder.com/)

Με τη συσσώρευση φορτίου στον πυκνωτή αναπτύσσεται μεταξύ των οπλισμών του διαφορά δυναμικού V. Μπορεί να αποδειχθεί ότι η ποσότητα q/V, δηλαδή το πηλίκο του φορτίου που έχει συσσωρευθεί προς αυτή τη διαφορά δυναμικού, είναι μια σταθερά. Αυτή η σταθερά ονομάζεται χωρητικότητα του πυκνωτή και συμβολίζεται με το γράμμα C:

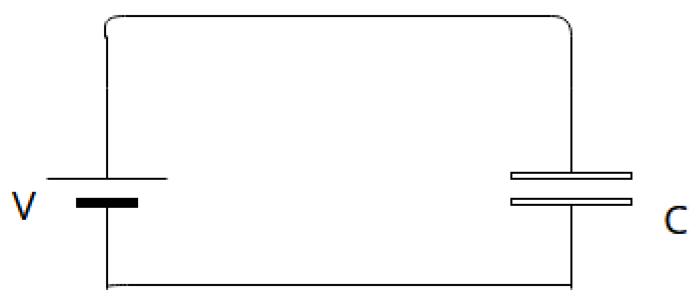
$$C = \frac{q}{V}.$$

Μονάδα μέτρησής της είναι το 1F=1Cb/V (Farad). Η χωρητικότητα ενός πυκνωτή εξαρτάται μόνο από το διηλεκτρικό του και από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του. Μπορεί να αποδειχθεί ότι για επίπεδο πυκνωτή η χωρητικότητα ισούται με

$$C = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{A}{d}.$$

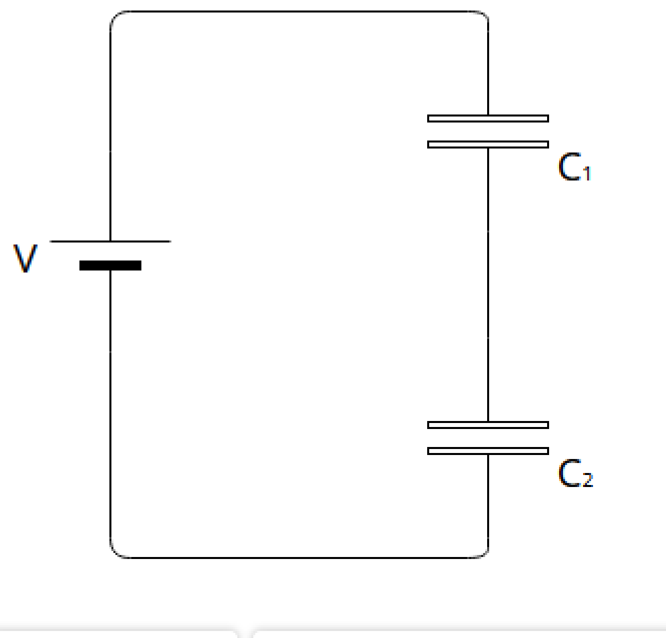
Εδώ ε είναι η λεγόμενη σχετική διηλεκτρική σταθερά του υλικού (η οποία εξαρτάται από το υλικό παρόμοια με την ειδική αντίσταση ρ και για το κενό ισούται με 1), ε_0 η διηλεκτρική σταθερά του κενού (που είναι μια παγκόσμια σταθερά της φύσης), A το εμβαδό κάθε επίπεδης πλάκας οπλισμού και dη απόσταση μεταξύ των επίπεδων πλακών.

Μπορούμε να κατανοήσουμε καλύτερα τη λειτουργία του πυκνωτή τοποθετώντας τον σε ένα απλό κύκλωμα με μπαταρία:



Το σημείο-κλειδί εδώ είναι ότι μεταξύ των δύο οπλισμών του πυκνωτή υπάρχει μονωτής, επομένως δεν μπορεί να διαρρέεται από ρεύμα. Ωστόσο, η μπαταρία ακόμη κι έτσι παράγει τάση, δηλαδή στέλνει φορτία προς τις πλάκες (σ' αυτό το σχήμα θα συσσωρεύονται αρνητικά φορτία στην κάτω πλάκα του πυκνωτή και, θετικά στην άνω, λόγω του ότι παρουσιάζεται αντίστοιχο έλειμμα ηλεκτρονίων). Τα φορτία αυτά, ευρισκόμενα αντιμέτωπα με την τάση της πηγής από τη μια πλευρά και με το μονωτή στο εσωτερικό του πυκνωτή από την άλλη, και, μη έχοντας κανέναν δρόμο να ακολουθήσουν, παραμένουν στους οπλισμούς. Έτσι, δημιουργείται η προαναφερθείσα διαφορά δυναμικού. Προφανώς, αυτό δε μπορεί να συνεχίζεται επ' άπειρον όποια και να είναι η εξωτερική τάση: θα έρθει κάποια στιγμή που οι οπλισμοί δε θα μπορούν πια να φιλοξενήσουν άλλα φορτιά, οπότε θα επέλθει ηλεκτρική εκκένωση –κατάρρευση του πυκνωτή. Σε αυτή την εργασία θα θεωρούμε πάντα ότι δεν ξεπερνάμε αυτό το όριο κατάρρευσης. Σημειώνεται ότι σε μια τέτοια διάταξη, θεωρούμε ότι έχει διαμορφωθεί μια σταθερή κατάσταση ισορροπίας, όπου ο πυκνωτής έχει φορτιστεί αρκετά ώστε να εξισορροπηθούν οι δύο αντίθετες τάσεις πηγής και μόνωσης· επομένως, ένα τέτοιο κύκλωμα δε διαρρέεται από ρεύμα.

Ακριβώς όπως με τις αντιστάσεις, εύκολα μπορούμε να υπολογίσουμε χωρητικότητες για συνδεσμολογία σε σειρά και παράλληλα, απλώς τώρα δε θα χρησιμοποιούμε το Νόμο του Ohmαλλά τη σχέση που δίνει τη χωρητικότητα.

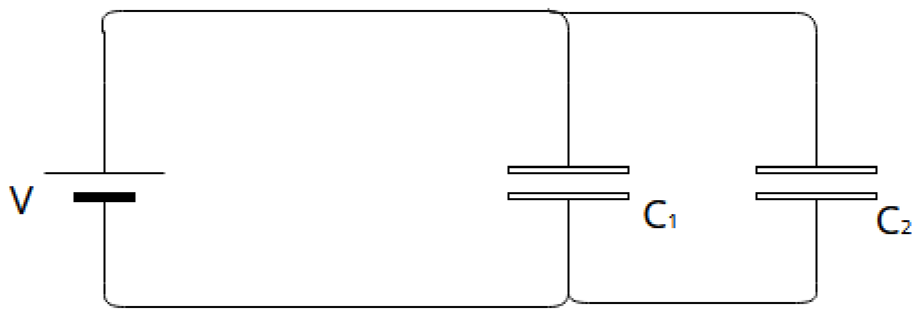


Συνδεσμολογία πυκνωτών σε σειρά.

Για τη συνδεσμολογία σε σειρά, το φορτίο σε κάθε πυκνωτή και στο ισοδύναμο κύκλωμα με έναν πυκνωτή είναι ίδιο, αλλιώς θα είχαμε κινήσεις φορτίων στα καλώδια, δηλαδή ρεύμα. Έτσι, $q_1=q_2=q$. Επίσης, ο δεύτερος κανόνας του Kirchhoffδίνει ότι $V=V_1+V_2$. Συναληθεύοντας αυτές και τον ορισμό της χωρητικότητας προκύπτει:

$V=V_1+V_2 \Rightarrow q/C=q/C_1+q/C_2 \Rightarrow C=C_1C_2/(C_1+C_2)$.

Επαγωγικά, κατανοούμε ότι για συνδεσομολογία πολλών πυκνωτών σε σειρά, η συνολική χωρητικότητα θα δίνεται από την $1/C=1/C_1+1/C_2+1/C_3+\ldots$.



Παράλληλη συνδεσμολογία δύο πυκνωτών υπό συνεχή τάση.

Για την παράλληλη συνδεσμολογία, ο δεύτερος κανόνας του Kirchhoffδίνει τις τάσεις που έχουν αναπτυχθεί σε κάθε κλάδο: $V=V_1=V_2$. Επίσης, είναι προφανές ότι το φορτίο της ισοδύναμης διάταξης με έναν πυκνωτή θα πρέπει να ισούται με το ολικό φορτίο στους δύο πυκνωτές, εφόσον το δεύτερο προέκυψε από την πηγή τάσης: $q=q_1+q_2$. Άρα, συναληθεύοντας αυτές τις δύο και τον ορισμό της χωρητικότητας:

$$q=q_1+q_2 \Rightarrow CV=C_1V+C_2V \Rightarrow C=C_1+C_2.$$

Επομένως, σε παράλληλες συνδεσμολογίες πυκνωτών, επεκτείνοντας την παραπάνω λογική επαγωγικά, η συνολική χωρητικότητα θα είναι το άθροισμα των επιμέρους χωρητικοτήτων.

Με αυτά, μπορούμε να βρούμε τη χωρητικότητα οποιασδήποτε διάταξης συνδεσμολογίας με πυκνωτές, όσο περίπλοκη και αν είναι. Επίσης, παρατηρούμε ότι για πυκνωτές η συνδεσμολογία σε σειρά «λειτουργεί» ανάλογα με την παράλληλη συνδεσμολογία αντιστάσεων και αντίστροφα.

Σημειώνουμε, τέλος, ότι η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη σε ένα πυκνωτή δίνεται από τις σχέσεις:

$$U=\frac{qV}{2}=\frac{q^2}{2C}=\frac{CV^2}{2}.$$

3. Πηνία

Όπως είπαμε, η χρησιμότητα του πυκνωτή είναι ότι αποθηκεύει φορτία στους οπλισμούς του. Τα φορτία αυτά μπορούν να αξιοποιηθούν και να μεταφερθούν με ασφάλεια σε άλλες συνδεσμολογίες. Υπάρχει μια αντίστοιχη συσκευή η οποία, σε αναλογία με την αποθήκευση φορτίων του πυκνωτή, μπορεί να αποθηκεύσει τάση. Αυτή η συσκευή είναι το λεγόμενο σωληνοειδές ή πηνίο και επί της ουσίας πρόκειται για ένα σύρμα τυλιγμένο γύρω από κάποιον άξονα (κάτι σαν ελατήριο, συνήθως με πολύ πυκνές σπείρες).

Το σύμβολο του πηνίου σε κυκλώματα (πηγή Wikipedia).

Η εξήγηση του γιατί μια τέτοια διάταξη είναι σε θέση να αποθηκεύσει τάση ξεφεύγει από τα όρια της μελέτης αυτής της εργασίας –συγκεκριμένα, απαιτεί μια εις βάθος εφαρμογή του νόμου αυτεπαγωγής του Faraday. Έτσι, εδώ θα αναφερθούμε απλώς στις βασικές ιδιότητες που μας αφορούν και όχι ιδιαίτερα στο πώς ακριβώς προκύπτουν.

Η τάση που αναπτύσσεται σε ένα πηνίο δίνεται από την

$$\mathrm{E} = -\mathrm{L}\frac{\mathrm{di}}{\mathrm{dt}}.$$

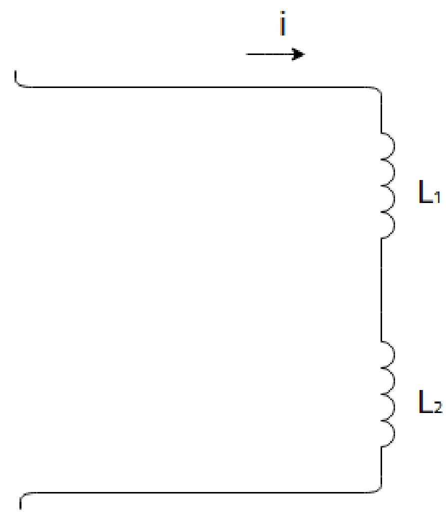
Καλείται τάση αυτεπαγωγής και, όπως φαίνεται από αυτή τη σχέση, είναι ανάλογη του ρυθμού μεταβολής του ρεύματος –επομένως, για σταθερά ρεύματα δεν αναπτύσσεται τάση στο πηνίο. Το πρόσημο μείον υποδεικνύει ότι η τάση αυτή είναι τέτοιας πολικότητας ώστε να αντισταθμίζει τη μεταβολή που λαμβάνει χώρα –αν το ρεύμα μεγαλώνει, οπότε η παράγωγος είναι θετική, δημιουργείται μια αρνητική τάση που τείνει να αναιρέσει αυτή την αύξηση ρεύματος, αν το ρεύμα μικραίνει, οπότε η παράγωγος είναι αρνητική, δημιουργείται μια θετική τάση που τείνει να αντισταθμίσει αυτή τη μείωση. Ο συντελεστής Lκαλείται συντελεστής αυτεπαγωγής ή απλώς αυτεπαγωγή της διάταξης, και η μονάδα μέτρησής του είναι το 1H=1Vs/A (Henry). Όπως και η χωρητικότητα του πυκνωτή, έτσι και το Lεξαρτάται από γεωμετρικά και εσωτερικά χαρακτηριστικά του πηνίου και από το αν περιέχει κάποιο υλικό στο εσωτερικό του τυλίγματός του.

Για τα κυλινδρικά, σωληνοειδή πηνία με πυκνές σπείρες -με τέτοια θα ασχοληθούμε σε αυτή την εργασία- μπορεί να αποδειχθεί ότι ο συντελεστής αυτεπαγωγής δίνεται από τη σχέση

$L = \mu \mu_0 n^2 l A$.

Εδώ, μ είναι η σχετική μαγνητική διαπερατότητα του υλικού εντός του πηνίου (για το κενό $\mu=1$), μ_0 η μαγνητική διαπερατότητα του κενού (που είναι παγκόσμια σταθερά της φύσης), nη πυκνότητα των σπειρών του πηνίου (αριθμός σπειρών ανά μονάδα μήκους), lτο μήκος του και A το εμβαδό της διατομής του. Άρα, το Lεξαρτάται μόνο από εσωτερικά χαρακτηριστικά της συσκευής και όχι από εξωτερικά πεδία ή ρεύματα, ακριβώς όπως η αντίσταση και η χωρητικότητα.

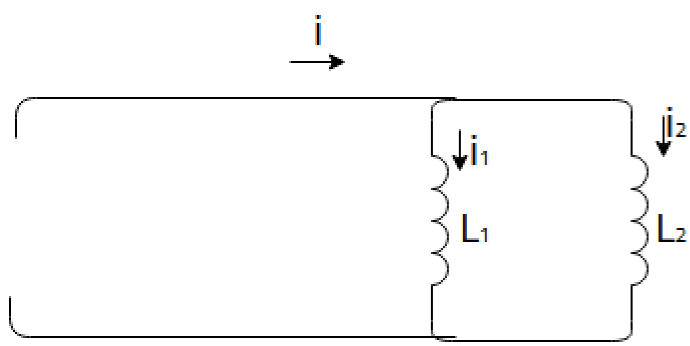
Ακολουθώντας τη μελέτη των προηγούμενων ενοτήτων, υπολογίζουμε την αυτεπαγωγή που προκύπτει συνδέοντας πηνία σε σειρά και παράλληλα. Ωστόσο, υπάρχει εδώ μια λεπτομέρεια που πρέπει να σημειώσουμε: τα πηνία δεν είναι τόσο «ανεξάρτητα» μεταξύ τους όσο είναι πχ δύο αντιστάσεις. Ο λόγος είναι ένα φαινόμενο που ονομάζεται αμοιβαία επαγωγή, το οποίο περιγράφειτην εμφάνιση τάσης αυτεπαγωγής σε ένα πηνίο με τη μεταβολή του ρεύματος που διαρρέει όχι το ίδιο αλλά ένα γειτονικό του. Το φαινόμενο σχετίζεται με μαγνητικά πεδία και για να μην περιπλέξουμε τη μελέτη θα θέλαμε να διασφαλίσουμε ότι δε θα εμφανιστεί. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί θεωρώντας σε όλα τα παρακάτω ότι τα πηνία για τα οποία συζητάμε βρίσκονται πάρα πολύ αποκρυσμένα μεταξύ τους στο χώρο.



Σε σειρά συνδεσμολογία πηνίων (σημειώνεται ότι τώρα βάλαμε μη σταθερό στο χρόνο ρεύμα, το οποίο συμβολίζεται με το μικρό γράμμα i).Τοαριστερό μέρος του κυκλώματος μπορεί να έχει οτιδήποτε ώστε να έχουμε μη στατικό ρεύμα.

Στη συνδεσμολογία σε σειρά, ο πρώτος κανόνας του Kirchhoffεπιβάλλει τα δύο σωληνοειδή και το ισοδύναμό τους να διαρρέεονται από το ίδιο ρεύμα $i=i_1=i_2$. Την ίδια στιγμή, ο δεύτερος δίνει ότι η συνολική τάση αυτεπαγωγής που προκαλούν είναι το άθροισμα των επιμέρους, δηλαδή $v=v_1+v_2$. Συναληθεύοντας αυτές και τη σχέση για την τάση αυτεπαγωγής, προκύπτει εύκολα

$$L=L_1+L_2.$$



Παράλληλη συνδεσμολογία πηνίων.

Στην παράλληλη συνδεσμολογία, πάλι με τους κανόνες του Kirchhoff,μπορούμε εύκολα να δούμε ότι $i=i_1+i_2$, και ότι $v=v_1=v_2$, οπότε, με τον ορισμό της τάσης αυτεπαγωγής καταλήγουμε ακριβώς όπως στα προηγούμενα στο ότι

$$\frac{1}{L}=\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}.$$

Προφανώς, σε αναλογία με τις αντιστάσεις και τους πυκνωτές, αυτά τα συμπεράσματα μπορούν να επεκταθούν στην περίπτωση των περισσότερων πηνίων.

Τέλος, μπορεί να αποδειχθεί ότι η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη σε ένα πηνίο είναι μαγνητικής φύσεως και ισούται με

$$U=\frac{Li^2}{2}.$$

Αυτές είναι οι βασικές συσκευές που θα χρησιμοποιήσουμε στο επόμενο Κεφάλαιο για να μελετήσουμε τη μαθηματική μοντελοποίηση ηλεκτρικών κυκλωμάτων. Ωστόσο, θα πρέπει να τονίσουμε ότι, στην πραγματικότητα, η μαθηματική μοντελοποίηση έχει ξεκινήσει: πράγματι, σε αυτό το Κεφάλαιο, ήδη μελετήσαμε κυκλώματα μέσω μαθηματικών σχέσεων που διέπουν τη λειτουργία τους. Αλλά και να μην το είχαμε κάνει, και μόνο η αναφορά σε σχέσεις όπως ο Νόμος του Ohmή η σχέση που δίνει την τάση αυτεπαγωγής, είναι από μόνη της ένα μαθηματικό μοντέλο, όχι κυκλώματος, βέβαια, αλλά κάποιας διάταξης. Πράγματι, αυτές οι σχέσεις δεν είναι τίποτα άλλο παρά μαθηματικές περιγραφές της λειτουργίας συγκεκριμένων διατάξεων, οι οποίες εφαρμόζονται στο εκάστοτε πλαίσιο προκειμένου να εξαχθούν χρήσιμα συμπεράσματα για τη συμπεριφορά τους.

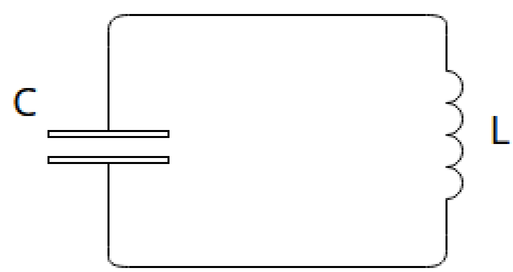
Αυτά τα στοιχεία, οι αντιστάσεις, οι πυκνωτές και τα πηνία, θα τοποθετηθούν στην επόμενη ενότητα σε συγκέκριμενα κυκλώματα, τη λειτουργία των οποίων θα αναλύσουμε αξιοποιώντας τα όσα αναφέρθηκαν σε αυτό το Κεφάλαιο, σε συνδυασμό με τις μαθηματικές γνώσεις από το προηγούμενο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο
ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Το κύκλωμα LC, ηλεκτρικές ταλαντώσεις

Το πρώτο κύκλωμα που θα μελετήσουμε είναι το λεγόμενο LC, και παίρνει το όνομά του από τα στοιχεία που το αποτελούν, τουτέστιν αποτελείται από ένα πηνίο Lκαι έναν πυκνωτή C. Θα διατυπώσουμε το πρόβλημα, αμέσως μετά θα περιγράψουμε διαισθητικά τη λειτουργία του κυκλώματος και κατόπιν θα δώσουμε το μαθηματικό μοντέλο διαχείρισής του.

Ας υποθέσουμε ότι συνδέοουμε έναν πυκνωτή με μια μπαταρία και τον φορτίζουμε μέχρι να αποκτήσει μεταξύ των οπλισμών του τάση V_0. Μετά αποσυνδέουμε τον πυκνωτή και, ακαριαία και χωρίς απώλειες ενέργειας, τον συνδέουμε με ένα πηνίο. Ποια θα είναι η ένταση του ρεύματος κάθε στιγμή;



Το κύκλωμα LC.

Ο τρόπος λειτουργίας του κυκλώματος μπορεί να εξαχθεί από όσα είπαμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο για τον τρόπο λειτουργίας των δύο διατάξεων. Τη στιγμή της σύνδεσής του στο κύκλωμα, ο πυκνωτής είναι φορτισμένος με κάποιο φορτίο και παρέχει κάποια τάση. Με τη σύνδεσή του στο κύκλωμα, θα αρχίζει να εκφορτίζεται αμέσως. Αυτή η εκφόρτιση σημαίνει ότι φορτία ταξιδεύουν στο κύκλωμα, δηλαδή δημιουργείται ρεύμα. Το μέτρο αυτού του ρεύματος δε θα είναι σταθερό, αλλά θα μεγαλώνει συνεχώς. Αυτό μπορεί να κατανοηθεί από τη σταθερότητα της συνολικής ενέργειας στο κύκλωμα, η οποία είναι το άθροισμα της ενέργειας του πυκνωτή $q^2/2C$και της ενέργειας του πηνίου $Li^2/2$· εφόσον το φορτίο του πυκνωτή φθίνει συνεχώς, φθίνει και η ενέργειά του, επομένως η ενέργεια στο πηνίο θα πρέπει να αυξάνεται ώστε το συνολικό άθροισμα να είναι σταθερό, και αυτό μπορεί να συμβεί μόνο με αύξηση της απόλυτης τιμής του ρεύματος. Την ίδια στιγμή, το πηνιό, εφόσον δεν έχουμε σταθερό ρεύμα, θα αναπτύξει τάση αυτεπαγωγής. Κάποια στιγμή, ο πυκνωτής θα εκφορτιστεί εντελώς και τότε το μέτρο του ρεύματος προφανώς θα είναι μέγιστο, αφού ο πυκνωτής δε θα έχει φορτίο. Έτσι, το ενυπάρχον ρεύμα θα συνεχίσει να ρέει, ξεκινώντας αμέσως την επαναφόρτιση του πυκνωτή, πλην όμως τώρα με αντίθετη πολικότητα απ' ό,τι πριν –εφόσον αυτό το ρεύμα ήταν μέχρι εκείνη τη στιγμή ρεύμα εκφόρτισης. Όμως, βέβαια, αυτή η φόρτιση του πυκνωτή θα οδηγεί σε ελάττωση του μέτρου του ρεύματος λόγω διατήρησης της ενέργειας, ώσπου ο πυκνωτής θα φορτιστεί και πάλι πλήρως, αλλά αυτή τη φορά με αντίθετη πολικότητα. Όταν συμβεί αυτό, ο κύκλος θα επαναληφθεί, μόνο που το ρεύμα θα ρέει αντίθετα απ' ό,τι πριν.

Φαίνεται, λοιπόν, ήδη η «ταλαντωτική» φύση του κυκλώματος. Προχωράμε στη μαθηματική μοντελοποίηση, η οποία θα γίνει σύμφωνα με τα εργαλεία των προηγούμενων Κεφαλαίων.

Ο πρώτος κανόνας του Kirchhoffεπιβάλλει το ρεύμα να είναι σε κάθε στιγμή ίδιο για όλα τα σημεία του κυκλώματος, δηλαδή $i_L=i_c=i$, ενώ ο δεύτερος επιβάλλει το άθροισμα των τάσεων στο βρόχο να είναι 0, δηλαδή $V_L+V_c=0$. Άρα

$$\mathrm{L}\frac{\mathrm{di}}{\mathrm{dt}}+\frac{\mathrm{q}}{\mathrm{C}}=0.$$

Σημειώνουμε ότι το μείον στην τάση αυτεπαγωγής υπάρχει απλώς για να μας δείξει τη φορά και εδώ δεν το βάλαμε διότι η φορά της τάσης φαίνεται ήδη στον κανόνα του Kirchhoff (εναλλακτικά, θα το βάζαμε αν αποφασίζαμε να μετρήσουμε τις τάσεις από το κάτω μέρος του κυκλώματος προς τα πάνω, μόνο που τότε ο δεύτερος κανόνας του Kirchhoffθα γινόταν $V_L=V_c$ και θα καταλήγαμε πάλι στην παραπάνω).

Τώρα, ξέρουμε ότι το ρεύμα είναι η παράγωγος του φορτίου ως προς το χρόνο, οπότε:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{q}}{\mathrm{dt}^2}+\frac{\mathrm{q}}{\mathrm{LC}}=0.$$

Άρα, φτάσαμε ακριβώς στην ομογενή, γραμμική διαφορική εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή, που λύσαμε στο Τρίτο Κεφάλαιο. Άρα, εδώ αυτό που ονομάζαμε εκεί συχνότητα μπορεί να ταυτιστεί με αυτό που συνοδεύει το q, μιας και αυτή είναι η συνάρτηση που ψάχνουμε, οπότε

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Μπορούμε να ελέγξουμε εύκολα ότι αυτή η ποσότητα έχει, όντως, μονάδες συχνότητας.

Τώρα, εφόσον αυτή η εξίσωση έχει ήδη λυθεί, μπορούμε απλώς να αντικαταστήσουμε στο εκεί αποτέλεσμα τις ποσότητες που έχουμε εδώ, δηλαδή

$$q = ce^{i\omega t} + de^{-i\omega t}.$$

Οι c, dείναι σταθερές που δείχνουν την, εντελώς αναμενόμενη, απειρία των πιθανών λύσεων εφόσον δεν έχουμε χρησιμοποιήσει συνοριακές ή αρχικές συνθήκες. Τονίζουμε ότι αυτή είναι η εξίσωση του φορτίου στους οπλισμούς του πυκνωτή συναρτήσει του χρόνου. Φυσικά, το αποτέλεσμά μας θα πρέπει να είναι πραγματική ποσότητα, εφόσον είναι φορτίο, δηλαδή q=q* για κάθε χρονική στιγμή, το οποίο οδηγεί στο ότι c*=d (οι σταθερές είναι εν γένει μιγαδικές). Επίσης, ξέρουμε ότι την t=0 το φορτίο του πυκνωτή είναι $q(0)=CV_0$. Άρα: $c+c^*=CV_0$. Επίσης, ξέρουμε ότι την t=0 δεν έχουμε ροή ρεύματος, δηλαδή η παράγωγος του φορτίου την t=0 ισούται με 0, $\frac{dq}{dt}(0) = 0$.Άρα, c=c*, οπότε μπορούμε να βρούμε ότι $c=c^*=CV_0/2$. Έτσι:

$$q=CV_0\cos\omega t.$$

Επομένως, η συνάρτηση που δίνει το ρεύμα κάθε στιγμή είναι

$$i = \frac{dq}{dt} = -CV_0\omega\sin\omega t.$$

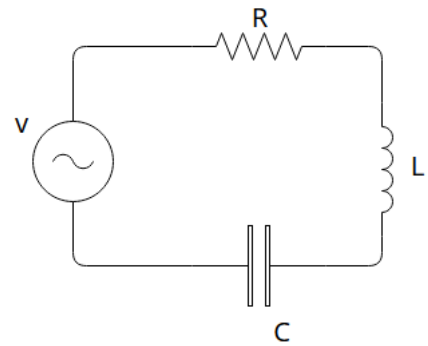
Αξίζει να επισημάνουμε ένα σημαντικό πλεονέκτημα της μαθηματικής μοντελοποίησης εδώ, πέραν, φυσικά, του ότι μας έδωσε τις τιμές του φορτίου και του ρεύματος κάθε χρονική στιγμή. Αυτό είναι η δυνατότητα αναλογίας του συστήματός μας με ένα εντελώς διαφορετικό φυσικό σύστημα, για το οποίο όμως έχουμε πολύ καλύτερη εποπτεία. Πράγματι, όπως είπαμε, η εξίσωση που δίνει το φορτίο αντιστοιχεί στην εξίσωση που δίνει τη θέση ενός σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Την ίδια στιγμή, η παράγωγος του φορτίου είναι το ρεύμα, ενώ της θέσης η ταχύτητα. Άρα, έχουμε μια πλήρη αναλογία: ό,τι είναι η θέση για μια απλή αρμονική ταλάντωση είναι το φορτίο για το κύκλωμα LCκαι ό,τι είναι η ταχύτητα για μια απλή αρμονική ταλάντωση είναι το ρεύμα για το κύκλωμα LC.

Αυτή είναι μια πάρα πολύ χρήσιμη διαπίστωση: το κύκλωμα LCείναι ένα σύστημα για το οποίο δεν έχουμε εποπτεία. Αντιθέτως, η απλή αρμονική ταλάντωση είναι πολύ εύκολη να τη φανταστούμε –αρκεί να σκεφτούμε ένα σώμα πακτωμένο σε ελατήριο. Έτσι, μπορούμε να «μεταφέρουμε» όσα ξέρουμε για τον ταλαντωτή στο σύστημα LC, έχοντας πάντα υπ’ όψιν τις αναλογίες μεταξύ των ποσοτήτων. Για παράδειγμα, το ότι το φορτίο είναι μέγιστο την αρχική χρονική στιγμή αντιστοιχεί στο ότι η θέση του ταλαντωτή είναι μέγιστη την αρχική χρονική στιγμή, δηλαδή το ταλαντούμενο σώμα βρίσκεται στο θετικό άκρο της ταλάντωσής του.

Επίσης, παρατηρούμε ότι εφόσον το ρεύμα αντιστοιχεί στην ταχύτητα, η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο πηνίο $Li^2/2$ αντιστοιχεί στην κινητική ενέργεια $mu^2/2$, άρα ο συντελεστής αυτεπαγωγής αντιστοιχεί στη μάζα, είναι δηλαδή ένα μέτρο της «ηλεκτρικής αδράνειας» για το κύκλωμα. Επίσης, το φορτίο αντιστοιχεί στη θέση, οπότε η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στον πυκνωτή $q^2/2C$αντιστοιχεί στη δυναμική ενέργεια του ταλαντωτή $kx^2/2$, δηλαδή η σταθερά του ελατηρίου αντιστοιχεί στο 1/C, οπότε η χωρητικότητα του πυκνωτή είναι ένα μέτρο της «μαλακότητας» του κυκλώματος (μεγάλο kσημαίνει σκληρό ελατήριο, οπότε μεγάλο 1/C, δηλαδή μικρό C, σημαίνει «σκληρό»κύκλωμα). Τέλος, η συχνότητα είναι για τον ταλαντωτή $\omega=\sqrt{k/m}$, οπότε για το ηλεκτρικό κύκλωμα, βάσει της αναλογίας, θα είναι $\omega=\sqrt{1/LC}$, δηλαδή αυτό ακριβώς που προέκυψε και με τη γραφή και επίλυση της διαφορικής εξίσωσης.

2. Κύκλωμα με R, L, C σε σειρά

Το επόμενο ηλεκτρικό σύστημα το οποίο θα μοντελοποιήσουμε μαθηματικώς είναι ένα κύκλωμα με πηγή, αντίσταση, πηνίο και πυκνωτή συνδεδεμένα σε σειρά.



Κύκλωμα με πηγή τάσης vκαι R, L, Cσε σειρά.

Σημειώνεται ότι βάλαμε πηγή εναλλασσόμενης τάσης ώστε να εξασφαλίσουμε ότι θα υπάρχει μη σταθερό ρεύμα και άρα το πηνίο θα συμμετέχει στο κύκλωμα ως στοιχείο που κρατάει κάποια τάση.Ας υποθέσουμε ότι αναζητάμε την τιμή του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα, θεωρώντας την πηγή τάσης vως γνωστή συνάρτηση.

Όπως κάναμε και στο προηγούμενο ηλεκτρικό σύστημα, θα ξεκινήσουμε από τους κανόνες του Kirchhoffκαι από αυτούς θα προκύψει το μαθηματικό μοντέλο που θα περιγράφει το κύκλωμα.

Ο πρώτος κανόνας επιβάλλει ενιαίο ρεύμα για όλα τα στοιχεία του κυκλώματος λόγω της σύνδεσής τους σε σειρά (i_R=i_L=i_C=i) ενώ ο δεύτερος επιβάλλει άθροισμα τάσεων σε όλο το βρόχο ίσο με 0 και ορίζοντας ως θετική φορά του ρεύματος τη ρολογιακή φορά, αυτός ο κανόνας γράφεται μαθηματικώς (λαμβάνοντας υπ’ όψιν ότι όλα τα στοιχεία διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα):

$$\mathrm{v} - \mathrm{iR} - \mathrm{L}\frac{\mathrm{di}}{\mathrm{dt}} - \frac{\mathrm{q}}{\mathrm{C}} = 0.$$

Τώρα θα εκμεταλλευτούμε όπως και πριν το ότι $\mathrm{i} = \frac{\mathrm{dq}}{\mathrm{dt}}$και θα ξαναγράψουμε την παραπάνω ως:

$$\frac{\mathrm{q}}{\mathrm{C}} + \mathrm{R}\frac{\mathrm{dq}}{\mathrm{dt}} + \mathrm{L}\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{q}}{\mathrm{dt}^2} = \mathrm{v}.$$

Είναι ήδη εμφανείς κάποιες δυσκολίες σε αυτή την εξίσωση. Η πρώτη, ίσως όχι τόσο ενοχλητική, είναι ότι εμπλέκεται το φορτίο, η πρώτη αλλά και η δεύτερη παράγωγός του, δηλαδή παράγωγοι τριών διαφορετικών τάξεων (είναι ωστόσο ακόμη διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης). Η δεύτερη, και αρκετά πιο ενοχλητική, είναι η παρουσία του όρου νστο δεύτερο μέλος της εξίσωσης. Αυτός ο όρος μας στερεί τη δυνατότητα που είχαμε πριν να «μαντέψουμε» λύσεις χρησιμοποιώντας εκθετικά και, ακόμα χειρότερα, κάνει την εξίσωση μη ομογενή –είναι προφανές ότι η q=0 δεν είναι πια λύση!

Επομένως, πρέπει να κινηθούμε διαφορετικά. Επισημαίνουμε το γεγονός για το οποίο προϊδεάζαμε από το Τρίτο Κεφάλαιο κιόλας: η επίλυση των διαφορικών εξισώσεων δεν είναι πάντα εύκολη ούτε υπάρχει σίγουρη συνταγή, πρέπει κάθε φορά να προσαρμόζεται η στρατηγική μας στο εκάστοτε πρόβλημα. Επίσης, είναι τώρα εμφανής και η σχέση τους με τη μαθηματική μοντελοποίηση: εμφανίζεται μια εντελώς μη τετριμμένη εξίσωση ακόμη και για ένα τόσο απλό και πρακτικό ηλεκτρικό σύστημα όσο αυτό που εξετάζουμε!

Αξίζει να σημειώσουμε, ωστόσο, ότι με τη γραφή της τελευταίας εξίσωσης η μαθηματική μοντελοποίηση έχει τελειώσει. Πράγματι, αυτή είναι η εξίσωση που περιγράφει μαθηματικώς πλήρως το σύστημα, από την άποψη ότι αν τη λύσουμε και βρούμε το φορτίο, μπορούμε κατόπιν να υπολογίσουμε το ρεύμα και διάφορες άλλες ποσότητες που μπορεί να μας αφορούν, όπως για παράδειγμα τις επιμέρους τάσεις στις διατάξεις. Φυσικά, η επίλυση της εξίσωσης μόνο τετριμμένη δεν είναι. Ωστόσο, αυτό αφορά τη διαχείριση του μαθηματικού μοντέλου που προέκυψε και όχι τη μοντελοποίηση αυτή καθαυτήν. Το μοντέλο έχει καταστρωθεί πια πλήρως και η επίλυσή του είναι πλέον υπόθεση των μαθηματικών εργαλείων.

Προχωρώντας προς αυτό, οδρόμος που θα ακολουθήσουμε θα είναι ο μετασχηματισμόςLaplace –συγκεκριμένα, θα πραγματοποιήσουμε τον εν λόγω μετασχηματισμό και στα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης.

Κατά το μετασχηματισμό Laplace, όπως φαίνεται και στις σχέσεις των μετασχηματισμών κάποιας παραγώγου που παραθέσαμε στο Τρίτο Κεφάλαιο, εμφανίζονται οι τιμές $f^{(n)}(0)$, οι οποίες στο δικό μας πλαίσιο είναι αρχικές συνθήκες, εφόσον η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος. Δεν είναι απαραίτητο να θέσουμε συγκεκριμένες τιμές από τώρα –θα μπορούσαμε να τις κρατήσουμε σε όλη την παρακάτω ανάλυση απλώς ως q(0), i(0) (δύο θα χρειαστούμε εδώ επειδή η διαφορική εξίσωση είναι δεύτερης τάξης). Ωστόσο, για να διευκολύνουμε τις πράξεις,δε θα το κάνουμε. Σημειώνεται ότι, τα τελικά μας αποτελέσματα δε θα παρουσιάζουν την ελευθερία στην επιλογή σταθερών, ή αλλιώς την απειρία λύσεων, που θα περιμέναμε από την επίλυση μιας διαφορικής εξίσωσης. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι, φυσικά, ότι στα παρακάτω θα έχουμε ήδη επιλέξει αρχικές τιμές κάποιων ποσοτήτων· επομένως, εντελώς αναμενόμενα, έχει αρθεί η απροσδιοριστία ως προς τις αρχικές συνθήκες.

Σε όλα τα παρακάτω θεωρούμε ότι οι μονάδες μέτρησης όλων των ποσοτήτων είναι στο SI. Έτσι, τα αποτελέσματα που θα προκύψουν θα έχουν και αυτά μονάδες στο SI. Για να πραγματοποιήσουμε το μετασχηματισμό Laplace θέτουμε πρώτα αρχικές συνθήκες$q(0)=0$, $i(0)=0$. Αυτές μοιάζουν βολικές, αλλά αργότερα θα επιλέξουμε κάποιες άλλες που θα είναι βολικότερες για μια πλήρη επίλυση.

Τότε, με το μετασχηματισμό Laplace προκύπτει:

$$\mathrm{Q(s)} = \frac{\mathrm{CV(s)}}{1 + \mathrm{RCs} + \mathrm{LCs}^2}.$$

Εδώ $Q(s)$, $V(s)$ είναι οι μετασχηματισμοί Laplaceτων $q(t)$, $v(t)$,αντίστοιχα. Επομένως, θεωρητικά, τώρα το μόνο που μένει είναι να γίνει ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace ώστε αυτό το Qνα λυθεί ως προς $q(t)$. Δυστυχώς, αυτό δεν είναι συνήθως και πολύ απλή υπόθεση. Στην πραγματικότητα, το αυστηρό μαθηματικό υπόβαθρο που δίνει τον αντίστροφο μετασχηματισμό που ζητάμε περιλαμβάνει μια μαθηματική διαδικασία που ονομάζεται αναλυτική συνέχιση και αφορά την επέκταση της έννοιας της συνάρτησης και του ολοκληρώματος στο μιγαδικό επίπεδο. Πρόκειται για έναν ολόκληρο κλάδο των μαθηματικών, τη μιγαδική ανάλυση, και η παρουσίασή του δεν είναι στους σκοπούς αυτής της εργασίας. Ωστόσο, τονίζεται ότι αυτή η αντιστροφή είναι καλά ορισμένη σε θεωρητικό επίπεδο, ενώ, αν υποθέσουμε ότι τα εργαλεία της μιγαδικής ανάλυσης είναι γνωστά, ο υπολογισμός μπορεί, κατ’ αρχήν, να πραγματοποιηθεί υπεράνω πάσης αμφιβολίας.

Εδώ, όμως, για να αποφύγουμε αυτό το σκόπελο που εμφανίστηκε μπροστά μας και να κάνουμε την εν λόγω αντιστροφή με έναν απλούστερο τρόπο, χωρίς αναφορές σε ολοκληρώματα στο μιγαδικό επίπεδο, θα επιλέξουμε κάποιες συγκεκριμένες τιμές για τις αρχικές συνθήκες και για τις παραμέτρους του προβλήματος, οι οποίες θα μας οδηγήσουν σε επίλυση.

Παρακάτω, λοιπόν, επιλέγονται τα εξής (όπως είπαμε όλα θα είναι στο SI, δηλαδή το φορτίο μετριέται σε Cb, το ρεύμα σε A, η χωρητικότητα σε F, η αντίσταση σε Ω, ο συντελεστής αυτεπαγωγής σε H καιοχρόνος σε s): q(0)=1, i(0)=0, C=1/6, R=5, L=1, v(t)=1. Τότε, αν κάνουμε εκ νέου το μετασχηματισμό Laplaceστη διαφορική εξίσωση (και πρέπει να το κάνουμε διότι αλλάξαμε αρχικές συνθήκες), προκύπτει:

$$\mathrm{Q(s)} = \frac{\mathrm{s}^2 + 5\mathrm{s} + 1}{\mathrm{s}(\mathrm{s}^2 + 5\mathrm{s} + 6)} = \frac{1}{6s} + \frac{5}{2}\frac{1}{s+3} - \frac{5}{3}\frac{1}{s+2}.$$

Όπως είπαμε, θεωρητικά θα έπρεπε να αντιστρέψουμε αυτό το Q(s) και να βρούμε το q(t). Εδώ, αυτό μπορεί να συμβεί αλλιώς –δηλώνεται χωρίς απόδειξη ότι η αντιστροφή του μετασχηματισμού είναι μια καλά ορισμένη πράξη, είναι ένα προς ένα και ότι το sπαίρνει τιμές ώστε να εξασφαλίζεται αυτό.

Ας ξεκινήσουμε από το δεύτερο όρο που προέκυψε (χωρίς το σταθερό συντελεστή που δεν αφορά την ολοκλήρωση και θα βγει έξω από το ολοκλήρωμα), και ας γράψουμε πλήρως το μετασχηματισμό Laplaceπου οδηγεί σε αυτόν:

$$\frac{1}{\mathrm{s}+3} = \int_0^\infty \mathrm{q(t)e^{-st}dt}.$$

Από τα ολοκληρώματα γνωστών συναρτήσεων, δεν είναι πολύ δύσκολο να «μαντέψουμε» μια qπου οδηγεί σε αυτή. Πράγματι, εφόσον το ολοκλήρωμα ενός e^{at}οδηγεί σε αποτέλεσμα 1/a, είναι εύλογο να δοκιμάσουμε $q(t)=e^{-3t}$. Και, όντως, είναι πολύ εύκολο να δείξουμε ότι για αυτή την qικανοποιείται η παραπάνω. Επομένως, βρήκαμε τη συνάρτηση που αν μετασχηματιστεί σύμφωνα με το σχηματισμό Laplaceοδηγεί στην 1/(s+3). Ο τρίτος όρος, μετά από αυτή τη θεώρηση, είναι απολύτως προφανές από ποια qπροέρχεται: πράγματι, είναι ακριβώς ίδιος με το δεύτερο, μόνο που αντί για +3 στον παρονομαστή έχει +2. Οπότε, μπορούμε να δοκιμάσουμε για την $q=e^{-2t}$. Εύκολα επαληθεύεται ότι αυτή οδηγεί στην 1/(s+2). Τέλος, ο πρώτος όρος είναι και ο πιο εύκολος, καθώς, όταν υπολογίσαμε τη V(s) για v(t)=1, καταλήξαμε ακριβώς σε αυτόν τον όρο 1/s. Επομένως, ο πρώτος όρος προέρχεται από την q=1.

Συναρμολογώντας όλα αυτά, λαμβάνοντας υπ' όψιν τους αντίστοιχους συντελεστές και εκμεταλλευόμενοι τη γραμμικότητα του μετασχηματισμού Laplace, καταλήγουμε στη συνάρτηση που δίνει το φορτίο (σε Cb αν το t μετριέται σε s):

$$q(t) = \frac{1}{6} + \frac{5}{2}e^{-2t} - \frac{5}{3}e^{-3t}.$$

Αυτή η συνάρτηση προέκυψε εντελώς κατασκευαστικά, αποφεύγοντας την περίπλοκη διαδικασία του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace. Ωστόσο, είναι βέβαιο ότι αυτό δε θα μπορεί να γίνεται σε κάθε περίπτωση: εδώ, επιλέξαμε βολικά τις παραμέτρους του προβλήματος για να καταφέρουμε να το φέρουμε εις πέρας ως το τέλος.

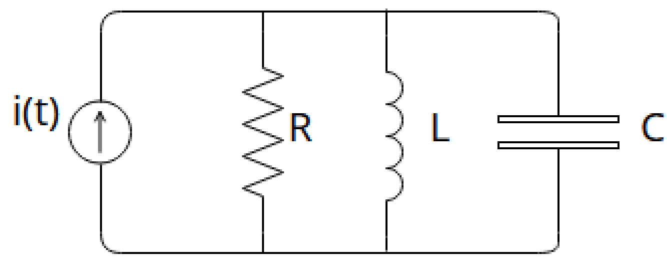
Έτσι, το ρεύμα που ζητάμε θα δίνεται από την παράγωγο του φορτίου και θα είναι (σε A αν το t μετριέται σε s)

$$i(t) = -5e^{-2t} + 5e^{-3t}.$$

Τέλος, σημειώνεται η συνέπεια του αποτελέσματος με τις αρχικές συνθήκες που επιλέξαμε: εύκολα φαίνεται ότι q(0)=1 και ότι i(0)=0, ως όφειλε.

3. Κύκλωμα με R, L, C σε παραλληλία

Σε αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε το ίδιο πρόβλημα, μόνο που τα στοιχεία θα είναι συνδεδεμένα σε παραλληλία. Σημειώνεται ότι γενεσιουργός αιτία της τάσης αυτεπαγωγής είναι το ρεύμα και όχι κάποια διαφορά τάσης στα άκρα του, οπότε σε αυτή την περίπτωση, για να έχει νόημα ο κλάδος του πηνίου, θα βάλουμε πηγή εναλλασσόμενου ρεύματος και όχι τάσης:



Κύκλωμα με πηγή ρεύματος i(t) και R, L, Cσυνδεδεμένα παράλληλα.

Κατά τα γνωστά, θα αξιοποιήσουμε τους κανόνες του Kirchhoff. Ο πρώτος επιβάλλει

$i_R+i_L+i_c=i(t)$.

Ο δεύτερος επιβάλλει $v_R=v_L=v_c=v$. Άρα:

$$\frac{v}{R}+\frac{1}{L}\int vdt+C\frac{dv}{dt}=i(t).$$

Για την παραπάνω εξίσωση χρησιμοποιήσαμε το Νόμο του Ohmστην αντίσταση R, την εξίσωση της τάσης αυτεπαγωγής σε ολοκληρωμένη μορφή ($L\frac{di}{dt}=v_L=v\Rightarrow i=\frac{1}{L}\int vdt$)και την εξίσωση v=q/C σε συνδυασμό με τον ορισμό του ρεύματοςγια τον πυκνωτή.

Ονομάζοντας $\varphi=\int vdt$, δηλαδή $v=\frac{d\varphi}{dt}$, η εξίσωση γίνεται:

$$\frac{\varphi}{L}+\frac{1}{R}\frac{d\varphi}{dt}+C\frac{d^2\varphi}{dt^2}=i(t).$$

Δηλαδή, και πάλι προέκυψε μία διαφορική εξίσωση με παραγώγους τριών διαφορετικών τάξεων, και μη ομογενής.

Όπως είπαμε, εφόσον φτάσαμε σε αυτή την εξίσωση, το σύστημα έχει μοντελοποιηθεί πλήρως. Από ‘κει και πέρα όλα είναι ζήτημα μαθηματικών χειρισμών. Παρουσιάσαμε ήδη, στην προηγούμενη ενότητα, ένα παράδειγμα του πώς θα μπορούσε να κινηθεί κανείς, οπότε δε θα το επαναλάβουμε και εδώ. Όλα θα γίνονταν εντελώς ανάλογα: θα προσλαμβάναμε το μετασχηματισμό Laplaceκαι θα καταλήγαμε σε μια Φ(s)· από εκεί και πέρα, θα έπρεπε να αντιστρέψουμε το μετασχηματισμό για να πάρουμε τη φ(t). Αυτό θα το κάναμε είτε από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplaceπου περιλαμβάνει ολοκλήρωση στο μιγαδικό επίπεδο είτε με εύστοχες «μαντεψιές», αναλόγως της βολικότητας των παραμέτρων του προβλήματος και των αρχικών συνθηκών.

Σε κάθε περίπτωση, εφόσον φτάναμε στη φ(t), η εύρεση της τάσης είναι πια ζήτημα μιας απλής παραγώγισης και από αυτή θα μπορούσαμε πια να υπολογίσουμε οποιαδήποτε ποσότητα στο πρόβλημα.

Φυσικά, τα ηλεκτρικά συστήματα δεν εξαντλούνται εδώ. Όπως είναι ευνόητο εφόσον ασχολούμαστε με κυκλώματα, οι συνδεσμολογίες που θα μπορούσαμε να εξετάσουμε είναι ανεξάντλητες. Αν ασχολούμασταν, δε, και με άλλα στοιχεία, και ειδικά με μη γραμμικά, οι μοντελοποιήσεις θα γίνονταν όλο και πιο περίτεχνες.

Εκείνο που ποτέ δε θα άλλαζε, πάντως, είναι τα βασικά εργαλεία: αυτά είναι οι κανόνες του Kirchhoff, που δεν είναι τίποτα άλλο παρά μια μαθηματική μοντελοποίηση του πώς λειτουργούν στα κυκλώματα οι κόμβοι και οι βρόχοι, και κάποια σχέση που θα αφορά την εκάστοτε συσκευή (πχ στην αντίσταση αυτή η σχέση είναι ο Νόμος του Ohm), η οποία δεν είναι τίποτα άλλο παρά μια μαθηματική μοντελοποίηση της λειτουργίας της εν λόγω συσκευής. Όπως και να ‘χει, στο τέλος θα καταλήγαμε σε μια διαφορική εξίσωση.Αυτή η εξίσωση θα μπορούσε να μην είναι ούτε γραμμική, ούτε ομογενής, ούτε μικρής τάξης, εν γένει, και συχνά θα ήταν πάρα πολύ δύσκολο να λυθεί.

Ωστόσο, όπως επισημάναμε ήδη, αυτό είναι ζήτημα εύρεσης μαθηματικών τεχνικών και εργαλείων· μόλις φτάνει κανείς απλώς στην καταγραφή αυτής της εξίσωσης, το εκάστοτε κύκλωμα έχει ήδη μοντελοποιηθεί και η επίλυσή της, από εκεί και πέρα, θα αποδώσει διάφορες ποσότητες που το αφορούν.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. D. J. Griffiths, Εισαγωγή στην Ηλεκτροδυναμική, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης
2. D. Halliday, R. Resnick, Φυσική, ΜέροςII, Έκδοση Γ.Α. Πνευματικού, Αθήνα
3. R. A. Serway, Physics for Scientists and Engineers, Saunders College Publishing
4. G. Thomas, Απειροστικός Λογισμός, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης
5. Λ. Ν. Τσίτσας, Εφαρμοσμένος Απειροστικός Λογισμός, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα
6. Σ. Τραχανάς, Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης
7. https://science.howstuffworks.com/environmental/energy/circuit5.htm
8. https://iswitch.com.sg/a-brief-history-of-electricity/
9. https://www.britannica.com/science/history-of-science
10. https://www.pbs.org/weta/roughscience/discover/briefhistory.html
11. https://machinelearningmastery.com/a-gentle-introduction-to-function-derivatives/