ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΔΥΤΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ & ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ ΓΙΩΤΑΣ

ΛΟΥΚΑΣ ΣΤΑΜΑΤΟΠΟΥΛΟΣ

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΧΡΗΣΤΟΥ

ΕΠΟΠΤΕΥΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΜΕΓΑΡΙΤΗΣ

ΜΕΣΟΛΟΓΓΙ 2015

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΔΥΤΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ ΓΙΩΤΑΣ (Α.Μ 14927)

evangiot@logistiki.teimes.gr

ΛΟΥΚΑΣ ΣΤΑΜΑΤΟΠΟΥΛΟΣ (Α.Μ 15119)

loukstam@logistiki.teimes.gr

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΧΡΗΣΤΟΥ (Α.Μ 15634)

Nikochri@logistiki.teimes.gr

ΕΠΟΠΤΕΥΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΜΕΓΑΡΙΤΗΣ

ΜΕΣΟΛΟΓΓΙ 2015

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ο διαφορικός και ο ολοκληρωτικός λογισμός είναι ένας μαθηματικός κλάδος ο οποίος συνδέεται άμεσα με πολλές άλλες επιστήμες. Εφαρμόζεται κυρίως στη φυσική και την οικονομία. Οι εφαρμογές του ολοκληρωτικού και διαφορικού λογισμού με τις οποίες θα ασχοληθούμε παρακάτω αφορούν την επιστήμη της οικονομίας. Μέσα από τον συνδυασμό αυτών των δύο κλάδων της επιστήμης, απορρέουν κάποια συμπεράσματα τα οποία συναρτώνται με την οικονομία. Αυτά σχετίζονται:

I. Με τις μεταβολές των μέτρων της οικονομίας,
II. Πως επηρεάζουν αυτές οι μεταβολές την ίδια την οικονομία και πολύ περισσότερο τις επιχειρήσεις,
III. Πόσο μεταβάλλονται τα μέτρα αυτά, πότε γίνεται αυτό και πως επηρεάζονται οι επιχειρήσεις όσον αφορά τις αποφάσεις που πρέπει να λάβουν.

Η στενότητα της σχέσης των δύο αυτών επιστημών αποτελεί θέμα μείζονος σημασίας διότι το μεγαλύτερο μέρος των επιχειρήσεων στηρίζει τη βιωσιμότητά αλλά και τις αποφάσεις του στον υπολογισμό των μεταβολών διαφόρων μέτρων της οικονομίας με βασικό εργαλείο μέτρησης τον ολοκληρωτικό και διαφορικό λογισμό.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η πτυχιακή εργασία με θέμα, οι εφαρμογές του ολοκληρωτικού και διαφορικού λογισμού στην οικονομία, χωρίζεται σε έξι κεφάλαια. Ας αναφέρουμε τι περιλαμβάνει το κάθε κεφάλαιο ξεχωριστά:

I. Το πρώτο κεφάλαιο αναφέρεται κυρίως στον ορισμό και τη βαθύτερη έννοια του λογισμού, παρακάτω δίνεται η ιστορική σημασία αλλά και τα θεμέλια αυτού.
II. Το δεύτερο κεφάλαιο περιγράφει την έννοια και τα είδη των συναρτήσεων, τη μονοτονία και τα ακρότατα μιας συνάρτησης, τη σύνθεση συναρτήσεων, την αντίστροφη συνάρτηση. Λίγο πιο κάτω γίνεται αναφορά στον ορισμό του ορίου, στις ιδιότητες των ορίων και τέλος στη συνέχεια των συναρτήσεων και στις ιδιότητες αυτών.
III. Το τρίτο κεφάλαιο αφορά κυρίως την έννοια και τα είδη της παραγώγου. Κάνει λόγο για την παράγωγο βασικών συναρτήσεων, την παράγωγο αντίστροφης και σύνθετης συνάρτησης. Στη συνέχεια αναφέρει τους κανόνες παραγώγισης και την έννοια του διαφορικού λογισμού.
IV. Το τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζει το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού, τον ορισμό και τις μεθόδους ολοκλήρωσης, τα βασικά ολοκληρώματα, τους κανόνες των πράξεων. Επιπλέον, δείχνει τον τρόπο ολοκλήρωσης όλων των ειδών ρητών συναρτήσεων, τονίζει διάφορες μορφές σημαντικών ολοκληρωμάτων εκ’ των οποίων το βασικότερο είναι το ολοκλήρωμα Riemann. Στις επόμενες γραμμές αναλύονται οι αντιπαράγωγοι και τα ορισμένα ολοκληρώματα, τα διπλά ολοκληρώματα, τα διπλά ολοκληρώματα και οι πολικές συντεταγμένες, τα τριπλά ολοκληρώματα, το τριπλό ολοκλήρωμα-κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες.
V. Το πέμπτο κεφάλαιο απευθύνεται αρχικά στην έννοια της οικονομικής επιστήμης, στην ιστορική της πορεία αλλά και στους παραγωγικούς συντελεστές οι οποίοι είναι τα βασικά εργαλεία μέτρησης της. Ακόμη, περιγράφει την έννοια της επιχείρησης και διαχωρίζει λεπτομερώς της μορφές της. Πιο κάτω μιλάει για την ζήτηση, τους προσδιοριστικούς παράγοντες της ατομικής ζήτησης και την αγοραία ζήτηση, παράλληλα εμφανίζει την καμπύλη της ατομικής και της αγοραίας ζήτησης. Με την ίδια σειρά παρουσιάζει και την έννοια της προσφοράς. Αργότερα αναφέρει τη σημασία, της ελαστικότητας της ζήτησης και της προσφοράς, του κόστους παραγωγής, τον ορισμό του συνολικού εσόδου, του συνολικού κόστους και του κέρδους. Το κεφάλαιο αυτό καταγράφει επίσης, το κόστος ευκαιρίας, το συνδυασμό παραγωγής και κόστους, την καμπύλη της συνάρτησης παραγωγής, την καμπύλη συνολικού κόστους, τις διάφορες κατηγορίες του κόστους. Αξίζει να σημειωθεί ότι σημαντικά υποκεφάλαια είναι και οι μορφές καμπυλών του κόστους, η σύγκριση του συνολικού εσόδου με το συνολικό κόστος, η σύγκριση του οριακού εσόδου με το οριακό κόστος

θεωρητικά, πρακτικά και ο κανόνας μεγιστοποίησης του κέρδους μιας επιχείρησης και με μαθηματικούς όρους, οι συναρτήσεις παραγωγής, εσόδων, κατανάλωσης και αποταμίευσης. Στο τελικό μέρος του κεφαλαίου βλέπουμε, τη μετατροπή της οριακής συνάρτησης σε συνολική, την επένδυση και σχηματισμό κεφαλαίου, την παρούσα αξίας μιας χρηματικής ροής.

VI. Το έκτο κεφάλαιο έχει όλες τι εφαρμογές του ολοκληρωτικού και διαφορικού λογισμού στην οικονομία.

Πίνακας περιεχομένων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{Ο}

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{O}

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο
Ο ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΚΑΙ Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

1.1 ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Λογισμός είναι η μαθηματική μελέτη της αλλαγής, κατά τον ίδιο τρόπο που η γεωμετρία μελετά και αναλύει τα γεωμετρικά σχήματα και η άλγεβρα μελετά τις πράξεις και τις εφαρμογές τους στην επίλυση των εξισώσεων. Χωρίζεται σε δύο μέρη ο πρώτος είναι ο διαφορικός λογισμός και τον ολοκληρωτικό. Και οι δύο αυτοί κλάδοι κάνουν χρήση των θεμελιωδών εννοιών της σύγκλισης απείρων ακολουθιών και απείρων σειρών σε ένα καλά καθορισμένο όριο. Ο λογισμός έχει πολλές χρήσεις και εφαρμογές σε πολλούς επιστημονικούς κλάδους και πρωτίστως στον κλάδο της οικονομίας. Επίσης χρήσιμος είναι και στον τομέα της μηχανικής επιστήμης όπως και σε πολλές άλλες επιστήμες και μπορεί να λύσει προβλήματα που η άλγεβρα από μόνη της δεν μπορεί.

Αξίζει να αναφερθεί ότι ο λογισμός αποτελεί ένα σημαντικό μέρος της σύγχρονης εκπαίδευσης μαθηματικών. Ένα μάθημα λογισμού αποτελεί την είσοδο των διδασκόντων σε πιο εξελιγμένα και δύσκολα μαθηματικά, που είναι αφιερωμένα στην ανάλυση των συναρτήσεων και των ορίων, και γενικά ονομάζονται μαθηματική ανάλυση. Ο λογισμός ιστορικά έχει τίτλο ‘’ ο λογισμός των απειροελάχιστων’’ ή ‘’ απειροστικός λογισμός’’. Μερικά αξιοσημείωτα παραδείγματα άλλων γνωστών λογισμών είναι ο προτασιακός λογισμός, ο λογισμός των μεταβολών και ο Λογισμός λάμδα.

1.2 ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Οι ιδέες του ολοκληρωτικού λογισμού υπήρξαν από τα αρχαία χρόνια αλλά, δεν κατάφεραν να αναπτυχθούν και να ευδοκιμήσουν λόγω του ότι δεν χρησιμοποιήθηκε ένα οργανωτικό σύστημα ορθολογικής και σωστής μελέτης. Στο μαθηματικό πάπυρο της Μόσχας μπορεί να (1820 π. Χ) ανακαλυφθεί ένας σκοπός του ολοκληρωτικού λογισμού, ο οποίος αφορά τον υπολογισμό όγκων και περιοχές. Παρόλα αυτά οι τύποι είναι απλές οδηγίες και με καμία ένδειξη ως προς τη μέθοδο, και μερικά από αυτά δε διαθέτουν σωστές συνιστώσες. Από την εποχή των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών ο Εύδοξος (408 – 355 π. Χ), χρησιμοποίησε τη μέθοδο της εξαντλήσεως, ο οποία προδιαγράφει την έννοια του ορίου, για τον υπολογισμό επιφανειών και όγκων, ενώ ο Αρχιμήδης (287-212 π. Χ) ανέπτυξε και διάνθησε την ιδέα, εφευρίσκοντας διαισθητικά μεθόδους που μοιάζουν με τις μεθόδους του ολοκληρωτικού λογισμού.

Κατά τον Μεσαίωνα, τον 14^{o} αιώνα, ο Ινδός μαθηματικός Madhava Sangamagrama και το σχολείο kerala της αστρονομίας και των μαθηματικών όρισε συστατικά του λογισμού, όπως η σειρά Taylor και οι άπειρες προσεγγίσεις σειράς.

Φτάνοντας στη σύγχρονη εποχή ο Bonaventura Cavalieri έδωσε σάρκα στο θεμελιώδες αυτό έργο υποστηρίζοντας ότι οι όγκοι και οι περιοχές θα πρέπει να υπολογίζονται ως το άθροισμα των όγκων και των περιοχών των απειροελάχιστα λεπτών διατομών. Οι ιδέες του στηρίχτηκαν σε αυτές του Αρχιμήδη. Το έργο όμως του Cavalieri δεν ήταν σεβαστό καθώς αποδείχθηκε λανθασμένο διότι οδήγησε σε λανθασμένα αποτελέσματα.

Ο Πιέρ ντε Φερμά υποστηρίζοντας ότι δανείστηκε από το Διόφαντο, εισήγαγε την έννοια της επάρκειας, η οποία αντιπροσώπευε την ισότητα μέχρι έναν απειροελάχιστο λανθασμένο όρο. Ο συνδυασμός επιτεύχθηκε από τους John Wallis, Isaac Barron και James Gregory, τα δύο τελευταία αποδείκνυαν το δεύτερο θεμελιώδης θεώρημα του λογισμού γύρω στο 1670.

Ο κανόνας του προϊόντος και ο κανόνας της αλυσίδας, η έννοια των υψηλότερων παραγώγων, οι σειρές Taylor και οι αναλυτικές λειτουργίες εισήχθησαν από τον Ισαάκ Νεύτωνα σε μια ιδιότυπη σημειογραφία που θα χρησιμοποιούνται για την επίλυση των προβλημάτων της μαθηματικής φυσικής. Στα έργα του ο Ισαάκ Νεύτων αναδιατύπωνε τις ιδέες του για να ταιριάζουν με το μαθηματικό ιδίωμα της εποχής του, αντικατέστησε τους υπολογισμούς των απειροελάχιστων από ισοδύναμα γεωμετρικά επιχειρήματα, τα οποία θεωρήθηκαν υπεράνω κριτικής. Συνήθιζε τις μεθόδους του λογισμού για την επίλυση του προβλήματος της πλανητικής κίνησης, το σχήμα της επιφάνειας ενός περιστρεφόμενου ρευστού, το πεπλατυσμένο σχήμα της γης, η κίνηση του βάρους συρόμενη σε ένα κυκλοειδές και πολλά άλλα προβλήματα που συζητήθηκαν στο Principia Mathematika του (1687). Σε άλλη εργασία ανέπτυξε σειρά επεκτάσεων για τις συναρτήσεις, συμπεριλαμβανομένων το κλασματικών και των άρρητων δυνάμεων και ήταν σαφές ότι κατάλαβε τις αρχές της σειράς Taylor.

Οι αρχές της ολοκλήρωσης διατυπώθηκαν από τον Ισαάκ Νεύτωνα και τον Γκότφριντ Βίλχελμ Λάιμπνιτς στο τέλος του 17^{ου} αιώνα. Μέσα από το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού, που ανέπτυξαν ανεξάρτητα, η ολοκλήρωση συνδέεται με την παραγώγιση και το ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης μπορεί εύκολα να υπολογιστεί μόλις γίνει γνωστή η αντιπαράγωγος. Τα ολοκληρώματα και οι παράγωγοι έγιναν τα βασικά εργαλεία του απειροστικού λογισμού, με πολυάριθμες εφαρμογές στην επιστήμη και τη μηχανική. Ο συγκεκριμένος επιστήμονας συνετέλεσε παρέχοντας ένα σαφές σύνολο κανόνων για την εργασία του με απειροελάχιστες ποσότητες, επιτρέποντας τον υπολογισμό της δεύτερης παραγώγου και υψηλότερες και απέδειξε τον κανόνα της αλυσίδας. Ο Λάιμπνιτς έδωσε μεγάλη προσοχή στον τρόπο γραφής των τύπων, συχνά περνώντας μέρες για τον καθορισμό των ορθών συμβόλων για τις έννοιες, πράγμα που δεν απασχόλησε ιδιαίτερα το Νεύτων.

Ο Λάιμπνιτς και ο Νεύτων συνήθως και οι δύο πιστώνονται με την εφεύρεση του λογισμού. Ο Νεύτων ήταν ο πρώτος που έγραψε για την εφαρμογή του λογισμού στη γενική φυσική Λάιμπνιτς ανέπτυξε ένα μεγάλο μέρος του συμβολισμού που χρησιμοποιείται στο λογισμό μέχρι και σήμερα. Οι βασικές ιδέες που εισήγαγαν τόσο ο Νεύτων όσο και Λάιμπνιτς ήταν οι νόμοι της παραγώγισης και της ολοκλήρωσης, τη δεύτερη παράγωγο και μεγαλύτερη και την προσέγγιση πολυωνυμικών σειρών. Από την εποχή του Νεύτωνα, το θεμελιώδες θεώρημα του λογισμού ήταν γνωστό.

Όταν ο Νεύτων και ο Λάιμπνιτς δημοσίευσαν τα πρώτα τους αποτελέσματα, υπήρχε μεγάλη διαμάχη και λογομαχία σχετικά με το ποιος μαθηματικός άξιζε πίστωσης. Ο Νεύτων ήταν ο πρώτος, αλλά ο Λάιμπνιτς δημοσίευσε για πρώτη φορά. Ο Νεύτων θεώρησε ότι ο Λάιμπνιτς του καταχράστηκε τις ιδέες από σημειώσεις του οι οποίες δεν είχαν γνωστοποιηθεί ευρέως, τις οποίες και είχε μοιραστεί με μερικά μέλη της Βασιλικής εταιρείας. Αυτή η κόντρα χωρίζει τους αγγλόφωνους μαθηματικούς από τους υπόλοιπους μαθηματικούς εδώ και πολλά χρόνια. Μετέπειτα πραγματοποιήθηκε μια εξέταση των εγγράφων του Νεύτων και του Λάιμπνιτς η οποία δείχνει ότι έφτασαν στα αποτελέσματά του ανεξάρτητα, με το Λάιμπνιτς να αρχίζει πρώτα με την ολοκλήρωση και το Νεύτων με την παραγώγιση. Σήμερα τόσο στο Νεύτων όσο και στο Λάιμπνιτς δίνεται πίστωση για την ανάπτυξη του λογισμού ανεξάρτητα.

Ο Λάιμπνιτς όμως τιμήθηκε δίνοντας το όνομά του. Ο Νεύτων ονόμασε το λογισμό του ''η επιστήμη των συνεχών αλλαγών''. Από την εποχή του Νεύτων και του Λάιμπνιτς μέχρι και σήμερα πολλοί μαθηματικοί έχουν βοηθήσει στη βελτιστοποίηση του λογισμού. Μία αυστηρά προσεγμένη δουλειά είναι αυτή σχετικά με την πεπερασμένη και απειροστή ανάλυση, γράφτηκε το 1748 από τη Maria Gaetana Agnesi.

Τέλος ένας αυστηρός μαθηματικός ορισμός του ολοκληρώματος δόθηκε από τον Μπέρναρντ Ρίμαν. Βασίζεται σε ένα όριο που προσεγγίζει την επιφάνεια μιας καμπυλόγραμμης περιοχής με το να σπάει την περιοχή σε κάθετες λωρίδες. Τον 19^{o} αιώνα, άρχισαν να εμφανίζονται πιο εξελιγμένες έννοιες του ολοκληρώματος, όπου ο τύπος της συνάρτησης όπως και το πεδίο ορισμού της ολοκλήρωσης έχουν γενικευτεί. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ορίζεται για συναρτήσεις δύο ή τριών μεταβλητών, και το διάστημα της ολοκλήρωσης $[a, b]$ αντικαθίστανται από μια καμπύλη μεταξύ δύο σημείων του επιπέδου ή του χώρου. Στο επιφανειακό ολοκλήρωμα η καμπύλη αυτή αντικαθίστανται από μια επιφάνεια στον τρισδιάστατο χώρο. Τα ολοκληρώματα διαφορικής μορφής παίζουν θεμελιώδη ρόλο στη σύγχρονη διαφορική γεωμετρία. Αυτές οι γενικεύσεις του ολοκληρώματος αρχικά εξελίχθηκαν από τις ανάγκες της φυσικής, και διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στη διατύπωση πολλών φυσικών νόμων, κυρίως αυτών της ηλεκτροδυναμικής. Σύγχρονες έννοιες της ολοκλήρωσης στηρίζονται στην αφηρημένη μαθηματική θεωρία γνωστή και ως ολοκλήρωση Λεμπέγκ, που αναπτύχθηκε από τον Ανρί Λεμπέγκ.

1.3ΘΕΜΕΛΙΑ

Στις αρχές του λογισμού η χρήση των απειροελάχιστων ποσοτήτων δεν ήταν αυστηρή και επικρίθηκε έντονα από ορισμένους συγγραφείς κυρίως από τους Μισέλ Ρολ και Τζώτρζ Μπέρκλεϊ. Ο Μπέρκλεϊ γράφει για τον απειροστικό λογισμό στο βιβλίο του The analyst το 1734. Μια πρόσφατη μελέτη υποστηρίζει ότι ο λογισμός του Λάιμπνιτς ήταν πιο καλά θεμελιωμένος από του Μπέρκλεϊ. Τα θεμέλια που είχαν θέσει ο Νεύτων και ο Λάιμπνιτς για το λογισμό επειδή ήταν αυστηρά διατυπωμένα βοήθησαν τους μαθηματικούς για ένα μεγάλο μέρος του επόμενου αιώνα και εξακολουθούν να είναι σε κάποιο βαθμό ένας ενεργός τομέας της έρευνας σήμερα.

Αρκετοί μαθηματικοί, συμπεριλαμβανομένου του Colin Maclaurin, προσπάθησαν να αποδείξουν την ορθότητα της χρήσης απειροελάχιστων, αλλά δεν μπόρεσαν να το αποδείξουν μέχρι 150 χρόνια αργότερα όταν χάρη στο έργο των Ωγκυστέν-Λουί Κωσύ και Weierstrass ένας τρόπος βρέθηκε τελικά για να αποφευχθεί η απλή ''έννοια'' των απείρων μικρών ποσοτήτων. Τα θεμέλια του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού είχαν τεθεί. Στα έγγραφα του Κωσύ υπάρχει ένα ευρύ φάσμα της θεμελιακής προσέγγισης, συμπεριλαμβανομένου και του ορισμού της συνέχειας, όσον αφορά στα απειροελάχιστα και ένα (κάπως σαφές) πρωτότυπο ενός (ε, δ)-ορισμό του ορίου στον ορισμό της διαφοροποίησης. Στο έργο του ο Weierstrass διατύπωσε εκ νέου την έννοια του ορίου. Μετά το έργο του Weierstrass έγινε κοινό στο βασικό λογισμό σχετικά με τα όρια αντί για απειροελάχιστες ποσότητες. Ο Μπέρναρντ Ρίμαν χρησιμοποίησε αυτές τις ιδέες για να δώσει έναν ακριβή ορισμό του ολοκληρώματος. Επίσης κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου οι ιδέες του λογισμού γενικεύονταν στον Ευκλείδειο χώρο και στο μιγαδικό επίπεδο.

Στα σύγχρονα μαθηματικά, τα θεμέλια του λογισμού που περιλαμβάνονται στο πεδίο της πραγματικής ανάλυσης το οποίο περιέχει πλήρεις ορισμούς και τις αποδείξεις από τα θεωρήματα του λογισμού. Η εμβέλεια του λογισμού έχει επίσης επεκταθεί σε μεγάλο βαθμό. Ο Henri Lebesgue εφηύρε τη θεωρία του μέτρου η οποία περιλαμβάνει κυρίως γεωμετρικές εφαρμογές. Ο ακριβής μαθηματικός ορισμός του μέτρου όμως, είναι πολύ σημαντικός για τη θεμελίωση των βασικών εννοιών της ανάλυσης και του απειροστικού λογισμού. Ο Laurent

Schwartz εισήγαγε τις Κατανομές, οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να πάρει την παράγωγο οποιασδήποτε συνάρτησης απολύτως.

Ενώ μερικές από τις ιδέες του λογισμού είχαν αναπτυχθεί νωρίτερα στην Αίγυπτο, την Ελλάδα, την Κίνα, την Ινδία, το Ιράκ, την Περσία και την Ιαπωνία, η σύγχρονη χρήση του λογισμού ξεκίνησε στην Ευρώπη, κατά τη διάρκεια του 17^{ου} αιώνα, όταν ο Ισαάκ Νεύτων και ο Γκότφριντ Βίλχελμ Λάιμπνιτς στηριζόμενοι στο έργο των προηγούμενων μαθηματικών και εισήγαγαν τις βασικές αρχές του λογισμού.

Εφαρμογές του διαφορικού λογισμού περιλαμβάνουν υπολογισμούς που αφορούν την ταχύτητα και την επιτάχυνση , την κλίση της καμπύλης και βελτιστοποίηση. Εφαρμογές του ολοκληρωτικού λογισμού περιλαμβάνουν υπολογισμούς που αφορούν έκταση, τον όγκο, το μήκος του τόξου, το κέντρο της μάζας και την πίεση. Πιο ανεπτυγμένες εφαρμογές περιλαμβάνουν δυναμοσειρές και σειρές Φουριέ. Ο λογισμός χρησιμοποιείται επίσης για να αποκτήσουμε μια ακριβέστερη και πιο συγκεκριμένη κατανόηση της φύσης του χώρου, του χρόνου και της κίνησης. Για αιώνες οι μαθηματικοί και φιλόσοφοι μάχονταν με τα παράδοξα που αφορούν τη διαίρεση με το μηδέν ή τα αθροίσματα απείρως πολλών αριθμών. Αυτά τα ερωτήματα προκύπτουν στη μελέτη της κίνησης και του εμβαδού. Ο αρχαίος Έλληνα φιλόσοφος Ζήνων ο Ελεάτης έδωσε πολλά διάσημα παραδείγματα τέτοιων παράδοξων. Ο λογισμός δίνει εργαλεία, ειδικά το όριο και την άπειρη σειρά, τα οποία επιλύουν τα παράδοξα αυτά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ $2^{Ο}$
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ-ΟΡΙΑ-ΣΥΝΕΧΕΙΑ

2.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Βασική έννοια 2.1.1: Έστω Α και Β υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Πραγματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής από το Α σύνολο στο Β σύνολο καλείται κάθε κανόνας f σύμφωνα με τον οποίο σε κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχεί ένα και μόνο ένα στοιχείο $y \in B$. Το μοναδικό αυτό στοιχείο $y \in B$ καλείται τιμή της συνάρτησης f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$. Τα σύνολα Α και Β καλούνται, αντίστοιχα, πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών της συνάρτησης f. Το σύνολο,

$$f(A) = \{y \in B: υπάρχει\ x \in A\ τέτοιο, ώστε\ y = f(x)\} = \{f(x): x \in A\}$$

καλείται σύνολο τιμών της f. Η συνάρτηση f από το σύνολο Α στο σύνολο Β συμβολίζεται ως $f: A \to B$. Η μεταβλητή x η οποία παριστάνει ένα οποιοδήποτε στοιχείο του συνόλου Α καλείται ανεξάρτητη μεταβλητή ενώ η μεταβλητή y που ανήκει στο Β και στην οποία αντιστοιχίζεται κάποιο στοιχείο $x \in A$ καλείται εξαρτημένη μεταβλητή.

Παραδείγματα:

(1) Έστω $c \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ καλείται σταθερή συνάρτηση. Το σύνολο τιμών της f είναι το μονοσύνολο $\{c\}$.

(2) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ για κάθε $x \in A$ καλείται ταυτοτική συνάρτηση του Α και συμβολίζεται με $id_{A.}$ Δηλαδή $id_A(x) = x$ για κάθε $x \in A$.

(3) Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Το σύνολο τιμών της f είναι το $[0, +\infty)$.

(4) Η συνάρτηση $f: \{x \in \mathbb{R}: x \neq 0\} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(5) Η συνάρτηση:

$$f(x) = \left\{ \begin{matrix} 1, & εάν\ x \in \mathbb{Q} \\ 2 & εάν\ x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{matrix} \right\}$$

Καλείται συνάρτηση Dirichlet.

Σημείωση: συνήθως, για μια συνάρτηση $f: A \to B$ δίνεται μόνο ο τύπος της, δηλαδή μια συνάρτηση του x σύμφωνα με την οποία γίνεται η αντιστοίχηση των στοιχείων $x \in A$ στα αντίστοιχα $y \in B$. Στην περίπτωση αυτή, όταν το πεδίο ορισμού της f δεν αναφέρεται, αυτό είναι το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, στο οποίο έχει νόημα ο τύπος της συνάρτησης.

Ορισμός 2.1.2.: Έστω Α και Β δύο υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και $f: A \to B$ συνάρτηση. Η συνάρτηση f καλείται:

1. Επί του Β, όταν για κάθε $y \in B$ υπάρχει $x \in A$ τέτοιο, ώστε $y = f(x)$.
2. 1-1 (ένα προς ένα), όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ έχουμε
$$f(x_1) \neq f(x_2).$$

Ορισμός 2.1.3.: Δύο συναρτήσεις $f: A \to \mathbb{R}$ και $g: B \to \mathbb{R}$ καλούνται ίσες, εάν

(1) Α=Β και

(2) $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$.

Συμβολικά γράφουμε $f = g$.

Ορισμός 2.1.4.: Έστω $f: A \to \mathbb{R}$, $g \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις με $A \cap B \neq \emptyset$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

1) Η συνάρτηση $h: A \cap B \to \mathbb{R}$ με τύπο
$$h(x) = f(x) + g(x) \; \gamma\iota\alpha \; \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \; x \in A \cap B,$$
καλείται άθροισμα των f και g και συμβολίζεται με $f + g$.
2) Η συνάρτηση $h: A \cap B \to \mathbb{R}$ με τύπο
$$h(x) = f(x) * g(x) \; \gamma\iota\alpha \; \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \; x \in A \cap B,$$
καλείται γινόμενο των f και g και συμβολίζεται με $f * g$.
3) Η συνάρτηση $h: A \to \mathbb{R}$ με τύπο
$$h(x) = \lambda * f(x) \; \gamma\iota\alpha \; \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \; x \in A,$$
καλείται γινόμενο του πραγματικού αριθμού λ με τη συνάρτηση f και συμβολίζεται με $\lambda * f$.
4) Η συνάρτηση $h: A_1 = \{x \in A \cap B : g(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}$ με τύπο
$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \; \gamma\iota\alpha \; \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \; x \in A_1,$$
καλείται πηλίκο των f και g και συμβολίζεται με $\frac{f}{g}$.

Ορισμός 2.1.5.: Έστω $f: A \to B$ συνάρτηση, $C \subseteq A$ και $D \subseteq B$.

(1) Το σύνολο
$$f(C) = \{y \in B : \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota \; x \in C \; \tau\acute{\varepsilon}\tau o\iota o, \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon \; y = f(x)\} = \{f(x) : x \in C\}$$
καλείται εικόνα του C μέσω της f.
(2) Το σύνολο
$$f^{-1}(D) = \{x \in A : f(x) \in C\}$$
καλείται αντίστροφη εικόνα του D μέσω της f.

2.2ΕΙΔΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Πολυωνυμικές συναρτήσεις: Κάθε συνάρτηση $P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, x \in \mathbb{R},$$
Όπου $n = 1,2,\ldots,$ και $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$ με $a_n \neq 0$, καλείται πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού n . Οι σταθερές συναρτήσεις καλούνται πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού 0.

Ρητές συναρτήσεις: Έστω $P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $Q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο πολυωνυμικές συναρτήσεις με τύπους $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ και $Q(x) = \beta_m x^m + \cdots + \beta_1 x + \beta_0$. Η συνάρτηση $R: \{x \in \mathbb{R}: Q(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}$ με τύπο
$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{\beta_m x^m + \cdots + \beta_1 x + \beta_0}$$
καλείται ρητή συνάρτηση.

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις: Οι παρακάτω συναρτήσεις:

1. $f_1: \mathbb{R} \to [-1,1], f_1(x) = \eta\mu x$
2. $f_2: \mathbb{R} \to [-1,1], f_2(x) = \sigma\upsilon\nu x$
3. $f_3: \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}, f_3(x) = \varepsilon\varphi x$
4. $f_4: \{x \in \mathbb{R}: x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, f_4(x) = \sigma\varphi x$

ονομάζονται τριγωνομετρικές συναρτήσεις ή, αντίστοιχα, συνάρτηση του ημιτόνου, συνάρτηση του συνημίτονου, συνάρτηση της εφαπτομένης και συνάρτηση της συνεφαπτομένης.

Φραγμένες συναρτήσεις: Έστω $f: A \to B$ συνάρτηση και $C \subseteq A$. Η f καλείται:

1) Άνω φραγμένη στο C, εάν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in C$ να έχουμε $f(x) \leq M$.
2) Κάτω φραγμένη στο C, εάν υπάρχει $m \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in C$ να έχουμε $m \leq f(x)$.
3) Φραγμένη στο C, εάν υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε για κάθε $x \in C$ να έχουμε $m \leq f(x) \leq M$.

Πρόταση 2.2.1.: Έστω $f: A \to B$ συνάρτηση και $C \subseteq A$. Η f είναι φραγμένη στο C εάν και μόνο εάν υπάρχει $K > 0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in C$ να έχουμε $|f(x)| \leq K$.

Άρτιες και περιττές συναρτήσεις: Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται άρτια, εάν για κάθε $x \in A$ έχουμε $-x \in A$ και $f(x) = f(-x)$.

Μία συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ ονομάζεται περιττή, εάν για κάθε $x \in A$ έχουμε $-x \in A$ και $f(x) = -f(-x)$.

Περιοδικές συναρτήσεις: Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ καλείται περιοδική, εάν υπάρχει $p > 0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in A$ να έχουμε $x + p \in A$ και $f(x + p) = f(x)$. Ο αριθμός p καλείται περίοδος της f.

Ορισμός 2.2.2.: Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ περιοδική συνάρτηση. Ο μικρότερος θετικός αριθμός p, εάν υπάρχει, τέτοιος, ώστε $f(x + p) = f(x)$ για κάθε $x \in A$ ονομάζεται κύρια περίοδος της f.

Εκθετικές συναρτήσεις: Έστω $\alpha > 0$. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ με $f(x) = a^x$καλείται εκθετική συνάρτηση με βάση το α.

Ειδική περίπτωση: Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ με $f(x) = e^x$, όπου e ο αριθμός Euler (άρρητος αριθμός, περίπου ίσος με 2.718281828) , λέγεται εκθετική συνάρτηση και συμβολίζεται με exp.

Πρόταση 2.2.3.: Έστω $\alpha > 0$ και $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Ισχύουν τα παρακάτω:

(1) $a^{x_1} * a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$.

(2) $\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1 - x_2}$.

(3) $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 * x_2}$.

Πρόταση 2.2.4.: Έστω $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ και $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Ισχύουν τα επόμενα:

(1) $(a_1 * a_2)^x = {a_1}^x * {a_2}^x$.

(2) $\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^x = \frac{{a_1}^x}{{a_2}^x}$.

Πρόταση 2.2.5.: Η εκθετική συνάρτηση με βάση το α έχει κάποιες ιδιότητες, αυτές είναι:

(1) Εάν $x_1 < x_2$ και $\alpha > 1$, τότε $\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2}$.

(2) Εάν $x_1 < x_2$ και $0 < \alpha < 1$, τότε $\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2}$.

(3) Εάν $0 < \alpha_1 < \alpha_2$ και $x > 0$, τότε ${\alpha_1}^x < {\alpha_2}^x$.

(4) Εάν $0 < \alpha_1 < \alpha_2$ και $x < 0$, τότε ${\alpha_1}^x > {\alpha_2}^x$.

<u>Λογαριθμικές συναρτήσεις:</u> Έστω $\alpha > 0, \alpha \neq 1$. Η συνάρτηση $f: (0, +\infty \to \mathbb{R})$ με $f(x) = \log a(x)$ καλείται λογαριθμική συνάρτηση με βάση το α.

Ειδική περίπτωση: Η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \log e(x)$, όπου e ο αριθμός Euler (άρρητος αριθμός, περίπου ίσος με 2.718281828), λέγεται λογαριθμική συνάρτηση με βάση το e ή φυσικός λογάριθμος και συμβολίζεται με ln.

Πρόταση 2.2.6.: Έστω $\alpha > 0, \alpha \neq 1$ και $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$. Ισχύουν τα παρακάτω:

(1) $log_a(x_1 * x_2) = log_a x_1 + log_a x_2$.

(2) $log_a \left(\frac{x_1}{x_2}\right) = log_a x_1 - log_a x_2$.

(3) $log_a({x_1}^{x_2}) = x_2 log_a x_1$.

Πρόταση 2.2.7.: Έστω $0 < \alpha_1 \neq 1, 0 < \alpha_2 \neq 1$ και $x \in (0, +\infty)$. Τότε,

$$log_{a_1} x = \frac{log_{a_2} x}{log_{a_2} a_1}.$$

Πρόταση 2.2.8.: Η λογαριθμική συνάρτηση με βάση το α έχει τις εξής ιδιότητες:

(1) Εάν $0 < x_1 < x_2$ και $\alpha > 1$, τότε $log_a x_1 < log_a x_2$.

(2) Εάν $0 < x_1 < x_2$ και $0 < \alpha < 1$, τότε $log_a x_1 > log_a x_2$.

<u>Υπερβολικές συναρτήσεις:</u> Οι παρακάτω συναρτήσεις καλούνται υπερβολικές συναρτήσεις.

1) $\sin h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \sin hx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

2) $\cos h: \mathbb{R} \to [1,+\infty), \cos hx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

3) $\tan h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \tan hx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

4) $\cot h: \mathbb{R}/\{0\} \to \mathbb{R}/\{0\}, cot\ hx = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.

Πρόταση 2.2.9: Ισχύουν τα εξής:

(1) $\cos h^2 x - sinh^2 x = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(2) $\tan hx = \frac{\sin hx}{\cos hx}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(3) $\cot hx = \frac{\cos hx}{\sin hx}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(4) $\sin h(x_1 \pm x_2) = \sin hx_1 * \cos hx_2 \pm \cos hx_1 * \sin hx_2$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

(5) $\cos h(x_1 \pm x_2) = \cos hx_1 * \cos hx_2 \pm \sin hx_1 * \sin hx_2$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

(6) $\tan h(x_1 \pm x_2) = \frac{\tan hx_1 \pm \tan hx_2}{1 \pm \tan x_1 * \tan x_2}$ για όλα τα x_1, x_2 για τα οποία η ισότητα είναι ορισμένη.

(7) $\cot h(x_1 \pm x_2) = \frac{\cot hx_1 * \cot hx_2 \pm 1}{\cot hx_2 \pm \cot hx_1}$ για όλα τα x_1, x_2 για τα οποία η ισότητα είναι ορισμένη.

2.3 ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΚΑΙ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμός 2.3.1.: Έστω $f: A \to B$ συνάρτηση και $C \subseteq A$. Η f καλείται:

1. Αύξουσα στο C, εάν για κάθε $x_1, x_2 \in C$

$$x_1 < x_2 \to f(x_1) \leq f(x_2).$$

2. Γνησίως αύξουσα στο C, εάν για κάθε $x_1, x_2 \in C$

$$x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2).$$

3. Φθίνουσα στο C, εάν για κάθε $x_1, x_2 \in C$

$$x_1 < x_2 \to f(x_1) \geq f(x_2).$$

4. Γνησίως φθίνουσα στο C, εάν για κάθε $x_1, x_2 \in C$

$$x_1 < x_2 \to f(x_1) > f(x_2).$$

Εάν η f είναι αύξουσα ή φθίνουσα στο C, τότε η f καλείται μονότονη στο C. Ενώ εάν η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο C, τότε η f καλείται γνησίως μονότονη στο C.

Ορισμός 2.3.2.: Έστω $f: A \to B$ συνάρτηση και $x_0 \in A$. Λέγεται ότι η f παρουσιάζει στο σημείο x_0 ελάχιστο (αντίστοιχα, μέγιστο), εάν $f(x_0) \leq f(x)$ (αντίστοιχα, $f(x) \leq f(x_0)$) για κάθε $x \in A$. Η τιμή $f(x_0)$ της f στο x_0 καλείται ελάχιστη, (αντίστοιχα, μέγιστη) τιμή της f. Εάν η f παρουσιάζει στο σημείο x_0 ελάχιστο ή μέγιστο, τότε λέγεται ότι η f παρουσιάζει στο x_0 ακρότατο.

Ορισμός 2.3.3.: Έστω $f: A \to B$ συνάρτηση και $x_0 \in A$. Λέγεται ότι η f παρουσιάζει στο σημείο x_0 τοπικό ελάχιστο (αντίστοιχα, τοπικό μέγιστο), εάν υπάρχει θετικός πραγματικός αριθμός δ τέτοιος, ώστε για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$ να έχουμε $f(x_0) \leq f(x)$ (αντίστοιχα, $f(x) \leq f(x_0)$). Η τιμή $f(x_0)$ της f στο x_0 καλείται τοπικό ελάχιστο (αντίστοιχα, τοπικό μέγιστο) της f στο x_0. Εάν η f παρουσιάζει στο σημείο x_0 τοπικό ελάχιστο ή τοπικό μέγιστο, τότε λέγεται ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό ακρότατο.

2.4 ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ορισμός 2.4.1.: Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ και $g: B \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις με $f(A) \cap B \neq \emptyset$. Η συνάρτηση $h: A_1 = \{x \in A: f(x) \in B\} \to \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = g(f(x))$ για κάθε $x \in A_1$, καλείται σύνθεση των f και g και συμβολίζεται gof. Δηλαδή,

$$gof(x) = g(f(x))$$

για κάθε $x \in A_1$.

2.5 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Βασικός ορισμός 2.5.1.: Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ 1-1 συνάρτηση, δηλαδή για κάθε $y \in f(A)$ υπάρχει μοναδικό $x \in A$ τέτοιο, ώστε $f(x) = y$. Ορίζουμε μια συνάρτηση $g: f(A) \to A$ ως εξής: για κάθε $y \in f(A)$ θέτουμε $g(y) = x$, όπου x είναι το μοναδικό στοιχείο του A για το οποίο $f(x) = y$. Η συνάρτηση g καλείται αντίστροφη της f και συμβολίζεται με f^{-1}. Δηλαδή, $f^{-1}(y) = x$ εάν και μόνο εάν $f(x) = y$.

Παραδείγματα:

(1) Έστω η συνάρτηση $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ με $f(x) = \eta\mu x$. Η f είναι 1-1. Η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}: [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ της f καλείται τόξο ημιτόνου και συμβολίζεται με $\tau o\xi\eta\mu x$.

(2) Έστω η συνάρτηση $f: [0, \pi] \to [-1,1]$ με $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$. Η f είναι 1-1. Η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}: [-1,1] \to [0, \pi]$ της f καλείται τόξο συνημιτόνου και συμβολίζεται με $\tau o\xi\sigma\upsilon\nu x$.

(3) Έστω η συνάρτηση $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \varepsilon\varphi x$. Η f είναι 1-1. Η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ της f καλείται τόξο εφαπτομένης και συμβολίζεται με $\tau o\xi\varepsilon\varphi x$.

(4) Έστω η συνάρτηση $f: (0, \pi) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sigma\varphi x$. Η f είναι 1-1. Η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}: \mathbb{R} \to (0, \pi)$ της f λέγεται τόξο συνεφαπτομένης και συμβολίζεται με $\tau o\xi\sigma\varphi x$.

Πρόταση 2.5.2.: κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση f είναι 1-1. Επιπροσθέτως, εάν η f είναι γνησίως αύξουσα (φθίνουσα), τότε και η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα (φθίνουσα).

2.6 ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ο λογισμός συνήθως αναπτύσσεται δουλεύοντας με πολύ μικρές ποσότητες. Πρόκειται για αντικείμενα που μπορούν να αντιμετωπίζονται σαν αριθμούς αλλά τα οποία είναι κατά κάποιο τρόπο ‘’απειροελάχιστα’’. Ένας απειροελάχιστος dx αριθμός θα μπορούσε να είναι μεγαλύτερος από το μηδέν αλλά μικρότερος από οποιοδήποτε αριθμό της ακολουθίας 1, ½, 1/3,… και μικρότερος από κάθε θετικό πραγματικό αριθμό. Κάθε ακέραιο πολλαπλάσιο ενός απειροελάχιστου εξακολουθεί να είναι απείρως μικρός. Από αυτήν την άποψη ο λογισμός είναι μια συλλογή από τεχνικές για το χειρισμό των απειροελάχιστων. Η προσέγγιση αυτή έπεσε σε δυσμένεια τον 19^{ο} αιώνα, επειδή ήταν δύσκολο να γίνει η έννοια των απειροελάχιστων ακριβής. Ωστόσο, η ιδέα αναγεννήθηκε κατά τον 20^{ο} αιώνα, με την εισαγωγή της μη τυποποιημένης ανάλυσης και την ομαλή απειροελάχιστη ανάλυση, η οποία δίνει γερά θεμέλια για τη χειραγώγηση των απειροελάχιστων.

Τον 19^{ο} αιώνα, τα απειροελάχιστα αντικαταστάθηκαν από τα όρια. Τα όρια αναλύουν την τιμή μιας συνάρτησης σε μια ορισμένη εισροή. Συλλαμβάνει μικρής κλίμακας συμπεριφορά, όπως ακριβώς τα απειροελάχιστα, αλλά χρησιμοποιούν την τακτική των πραγματικών αριθμών. Με αυτήν την επεξεργασία ο λογισμός είναι μια συλλογή από τεχνικές για το διαχειρισμό ορισμένων ορίων. Τα απειροελάχιστα θα αντικατασταθούν από πολύ μικρούς αριθμούς και η απείρως μικρή συμπεριφορά της συνάρτησης εντοπίζεται με τη λήψη της συμπεριφοράς του ορίου για μικρότερους και μικρότερους αριθμούς. Τα όρια είναι ο ευκολότερος τρόπος για την παροχή αυστηρών θεμελίων του λογισμού και για το λόγο αυτό είναι σίγουρη η προσέγγιση.

Ορισμός 2.6.1.: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ καλείται σημείο συσσώρευσης του Α, εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset.$$

Ορισμός 2.6.2.: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ συνάρτηση, x_0 σημείο συσσώρευσης του Α και $l \in \mathbb{R}$. Λέγεται το όριο της f όταν το x τείνει στο x_0 είναι l και συμβολικά γράφουμε $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ να έχουμε $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Σχόλια:

i. Όταν γράφουμε $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ θα θεωρούμε ότι η συνάρτηση f ορίζεται <<οσονδήποτε κοντά στο x_0>>. Δηλαδή, το σημείο x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της συνάρτησης f. Σημειώνουμε ότι η f μπορεί να μην ορίζεται στο σημείο x_0.
ii. Το όριο της συνάρτησης f όταν το x τείνει στο x_0 είναι l όταν οι τιμές της f προσεγγίζουν τον αριθμό l καθώς η ανεξάρτητη μεταβλητή x προσεγγίζει, με οποιονδήποτε τρόπο, το x_0.

Μοναδικότητα του ορίου: Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ συνάρτηση και x_0 σημείο συσσώρευσης του Α. Εάν $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ και $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$, τότε $l_1 = l_2$.

Ορισμός 2.6.3.: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ συνάρτηση και x_0 σημείο συσσώρευσης του Α. Λέγεται ότι το όριο της f όταν το x τείνει στο x_0 είναι $+\infty$ και συμβολικά γράφουμε $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, εάν για κάθε $E > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ να έχουμε $f(x) > E$.

Ορισμός 2.6.4.: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ συνάρτηση και x_0 σημείο συσσώρευσης του Α. Λέγεται το όριο της f όταν το x τείνει στο x_0 είναι $-\infty$ και συμβολικά γράφουμε $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, εάν για κάθε $E > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ να έχουμε $f(x) < -E$.

<u>Πλευρικά όρια</u>

Ορισμός 2.6.5.: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}, f: A \to \mathbb{R}$ συνάρτηση, x_0 σημείο συσσώρευσης του Α και $l \in \mathbb{R}$.
Λέγεται ότι το όριο της f όταν το x τείνει στο x_0 εξ αριστερών είναι l και συμβολικά γράφουμε $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l$, εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in A$ με $x_0 - \delta < x < x_0$ να έχουμε $|f(x) - l| < \varepsilon$.
Λέγεται ότι το όριο της f όταν το x τείνει στο x_0 εκ δεξιών είναι l και συμβολικά γράφουμε $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$, εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in A$ με $x_0 < x < x_0 + \delta$ να έχουμε $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Ορισμός 2.6.6.: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}, f: A \to \mathbb{R}$ συνάρτηση και x_0 σημείο συσσώρευσης του Α.
Λέγεται ότι το όριο της f όταν το x τείνει στο x_0 εξ αριστερών είναι $+\infty$ (αντίστοιχα, $-\infty$) και συμβολικά γράφουμε $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$ (αντίστοιχα, $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$, εάν για κάθε $E > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in A$ με $x_0 - \delta < x < x_0$ να έχουμε $f(x) > E$ (αντίστοιχα, $f(x) < -E$).
Λέγεται ότι το όριο της f όταν το x τείνει στο x_0 εκ δεξιών είναι $+\infty$ (αντίστοιχα, $-\infty$) και συμβολικά γράφουμε $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ (αντίστοιχα, $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$), εάν για κάθε $E > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in A$ με $x_0 < x < x_0 + \delta$ να έχουμε $f(x) > E$ (αντίστοιχα, $f(x) < -E$).

Πρόταση: Έστω $A \subseteq R, f: A \to \mathbb{R}$ συνάρτηση, x_0 σημείο συσσώρευσης του Α και $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Τότε,
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l.$$

<u>Ιδιότητες Ορίων</u>

Πρόταση 2.6.7.: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}, f: A \to \mathbb{R}$ συνάρτηση και x_0 σημείο συσσώρευσης του Α.

1. Εάν $\lim_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ να έχουμε $f(x) > 0$.

2. Εάν $\lim_{x\to x_0} f(x) < 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ να έχουμε $f(x) < 0$.

3. Εάν $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ να έχουμε $f(x) \neq 0$.

Πρόταση 2.6.8.: Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ συνάρτηση και x_0 σημείο συσσώρευσης του Α. Εάν $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχουν $\delta > 0$ και $M > 0$ τέτοια, ώστε για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ να έχουμε $|f(x)| \leq M$.

Πρόταση 2.6.9.: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, x_0 σημείο συσσώρευσης του Α και $f: A \to \mathbb{R}$, $g: A \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις με $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ και $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$, όπου $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$. Τότε, ισχύουν τα εξής:

(1) $\lim_{x \to x_0}\big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = l_1 + l_2$,

(2) $\lim_{x \to x_0}\big(f(x) * g(x)\big) = \lim_{x \to x_0} f(x) * \lim_{x \to x_0} g(x) = l_1 * l_2$,

(3) $\lim_{x \to x_0} k * f(x) = k * \lim_{x \to x_0} f(x) = k * l_1$,όπου $k \in \mathbb{R}$,

(4) Εάν $l_2 \neq 0$ (και άρα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$, τότε $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$.

Πόρισμα: Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε,

1) $\lim_{x \to x_0}(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) = a_n {x_0}^n + \cdots a_1 x_0 + a_0$.

2) $\lim_{x \to x_0} \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{\beta_m x^m + \cdots + \beta_1 x + \beta_0} = \frac{a_n {x_0}^n + \cdots + a_1 x_0 + a_0}{\beta_m {x_0}^m + \cdots + \beta_1 x_0 + \beta_0}$ όταν $\beta_m {x_0}^m + \cdots + \beta_1 x_0 + \beta_0 \neq 0$.

Πρόταση 2.6.10.: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, x_0 σημείο συσσώρευσης του Α και $f: A \to \mathbb{R}, g: A \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις. Τότε, ισχύουν τα εξής:

(1) Εάν $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \to x_0} g(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, τότε $\lim_{x \to x_0}\big(f(x) + g(x)\big) = +\infty$.

(2) Εάν $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \to x_0} g(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, τότε $\lim_{x \to x_0}\big(f(x) + g(x)\big) = -\infty$.

(3) Εάν $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \to x_0} g(x) = l \in (\mathbb{R} \backslash \{0\}) \cup \{-\infty, +\infty\}$, τότε

$$\lim_{x \to x_0}\big(f(x) * g(x)\big) = \begin{cases} +\infty, \varepsilon\acute{\alpha}\nu\ l > 0 \text{ ή } l = +\infty, \\ -\infty, \varepsilon\acute{\alpha}\nu\ l < 0 \text{ ή } l = -\infty. \end{cases}$$

(4) Εάν $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \to x_0} g(x) = l (\mathbb{R} \backslash \{0\}) \cup \{-\infty, +\infty\}$, τότε

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) * g(x)) = \begin{cases} -\infty, \varepsilon\acute{\alpha}\nu\ l > 0 \text{ ή } l = +\infty, \\ +\infty, \ \ \varepsilon\acute{\alpha}\nu\ l < 0 \text{ ή } l = -\infty. \end{cases}$$

(5) Εάν $\lim_{x \to x_0} g(x) \in \{-\infty, +\infty\}$, τότε

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = 0.$$

(6) Εάν $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ και υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ να έχουμε $g(x) > 0$, τότε

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = +\infty.$$

(7) Εάν $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ και υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ να έχουμε $g(x) < 0$, τότε

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = -\infty.$$

Πρόταση 2.6.11.: Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ συνάρτηση και x_0 σημείο συσσώρευσης του A.

1. Εάν $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$.

2. Εάν $\lim_{x \to x_0} f(x) \in \{-\infty, +\infty\}$, τότε $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$.

Πρόταση 2.6.12.: Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in A$ και x_0 σημείο συσσώρευσης του A.

1) Εάν $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$, τότε $l \geq 0$ και $\lim_{x \to x_0} \sqrt{f(x) =} \sqrt{l}.$

2) Εάν $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = +\infty$.

Πρόταση 2.6.13.(Sandwich Rule): Έστω $f: A \to \mathbb{R}, g: A \to \mathbb{R}, h: A \to \mathbb{R}$ τρεις συναρτήσεις και x_0 σημείο συσσώρευσης του A. Εάν $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l \in \mathbb{R}$ και υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ να έχουμε $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

Πρόταση (Όριο σύνθετης συνάρτησης) 2.6.14.: Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}, f: A \to \mathbb{R}, g: B \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις, x_0 σημείο συσσώρευσης του A και y_0 σημείο συσσώρευσης του B. Εάν $f(A \setminus \{x_0\}) \subseteq B \setminus \{y_0\}$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ και $\lim_{y \to y_0} g(y) = l$, τότε $\lim_{x \to x_0} g\big(f(x)\big) = l$.

2.7 ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Βασικοί ορισμοί:

Ορισμός 2.7.1.: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ καλείται μεμονωμένο σημείο του A, εάν το σημείο αυτό δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A. Δηλαδή, εάν υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο, ώστε

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap (A \setminus \{x_0\}) = \emptyset.$$

Ορισμός 2.7.2.: Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ συνάρτηση και $x_0 \in A$. Η f καλείται συνεχής στο x_0 σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Το x_0 είναι μεμονωμένο σημείο του A.

- Το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του A και $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$ να έχουμε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Η f καλείται συνεχής στο σύνολο $B \subseteq A$, εάν αυτή είναι συνεχής σε κάθε σημείο του B.

<u>Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων</u>

Πρόταση 2.7.3.: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ σημείο συσσώρευσης του Α και $f: A \to \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής στο σημείο x_0.

1. Εάν $f(x_0) > 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$ να έχουμε $f(x) > 0$.

2. Εάν $f(x_0) < 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$ να έχουμε $f(x) < 0$.

3. Εάν $f(x_0) \neq 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$ να έχουμε $f(x) \neq 0$.

Παρατήρηση: η παραπάνω πρόταση δηλώνει ότι εάν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και $f(x_0) > 0$ (αντίστοιχα, $f(x_0) < 0$), τότε η συνάρτηση f είναι θετική (αντίστοιχα, αρνητική) <<κοντά στο x_0>>.

Πρόταση 2.7.4.: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ και $f: A \to \mathbb{R}, g: A \to \mathbb{R}$, δύο συναρτήσεις συνεχής στο σημείο x_0. Τότε, ισχύουν τα εξής:

1) Η συνάρτηση $f + g$ είναι συνεχής στο σημείο x_0.
2) Η συνάρτηση $f * g$ είναι συνεχής στο σημείο x_0.
3) Η συνάρτηση $k * f$ είναι συνεχής στο σημείο x_0, όπου $k \in \mathbb{R}$.
4) Εάν $g(x_0) \neq 0$ (και άρα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$ να έχουμε $g(x) \neq 0$), τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι συνεχής στο σημείο x_0.

Πρόταση 2.7.5.: Έστω $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ και $Q(x) = \beta_m x^m + \cdots + \beta_1 x + \beta_0$.

(1) Η συνάρτηση P είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(2) Η συνάρτηση $\frac{P}{Q}$ είναι συνεχής στο $\{x \in \mathbb{R}: Q(x) \neq 0\}$.

Παρατήρηση: από την πρόταση αυτή προκύπτει ότι κάθε πολυωνυμική και κάθε ρητή συνάρτηση είναι συνεχής.

Πρόταση 2.7.6.: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ και $f: A \to \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής στο σημείο x_0. Τότε, ισχύουν τα εξής:

(1) Η συνάρτηση $|f|$ είναι συνεχής στο σημείο x_0.

(2) Η συνάρτηση $\sqrt[k]{f}$ είναι συνεχής στο σημείο x_0, όταν $f(x_0) \geq 0$.

Πόρισμα: Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ και $g: A \to \mathbb{R}$ δύο συνεχής συναρτήσεις.

1) Η συνάρτηση $\max\{f, g\}: A \to \mathbb{R}$ με τύπο $\max\{f, g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\}, x \in A$, είναι συνεχής.

2) Η συνάρτηση $\min\{f, g\}: A \to \mathbb{R}$ με τύπο $\min\{f, g\}(x) = \min\{f(x), g(x)\}, x \in A$, είναι συνεχής.

Πρόταση 2.7.7.: Ισχύουν τα εξής:

(1) Η συνάρτηση $f_1: \mathbb{R} \to [-1,1]$ με $f_1(x) = \eta\mu x$ είναι συνεχής.

(2) Η συνάρτηση $f_2: \mathbb{R} \to [-1,1]$ με $f_2(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι συνεχής.

(3) Η συνάρτηση $f_3: \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$ με $f_3(x) = \varepsilon\varphi x$ είναι συνεχής.

(4) Η συνάρτηση $f_4: \{x \in \mathbb{R}: x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ με $f_4(x) = \sigma\varphi x$ είναι συνεχής.

(5) Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ με $f(x) = a^x$ είναι συνεχής.

(6) Η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = log_a(x)$ είναι συνεχής.

Πρόταση 2.7.8.: Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ και $g: B \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις με $f(A) \subseteq B$. Εάν η f είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ και η g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η gof είναι συνεχής στο x_0.

Πρόταση 2.7.9.: Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ συνάρτηση και $\alpha \in A$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

- Η f είναι συνεχής στο σημείο α.
- Για κάθε ακολουθία $(\alpha_n)_{n}^{\infty} = 1$ στοιχείων του Α με $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$ ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty} f(\alpha_n) = f(\alpha)$.

Πόρισμα: Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ συνάρτηση και $a \in A$. Εάν υπάρχει ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ στοιχείων του A με $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ και $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq f(a)$, τότε η f δεν είναι συνεχής στο a.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{Ο}
ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

3.1ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμός 3.1.1.: Έστω Δ διάστημα του $\mathbb{R}$, $f: \Delta \to \mathbb{R}$ συνάρτηση και $x_0 \in \Delta$. Η f καλείται παραγωγίσιμη στο x_0 όταν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός. Το πιο πάνω όριο καλείται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$.

Παρατηρήσεις :

- Εάν το x_0 είναι αριστερό άκρο του διαστήματος Δ και $x_0 \in \Delta$, τότε
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$
- Εάν το x_0 είναι δεξιό άκρο του διαστήματος Δ και $x_0 \in \Delta$, τότε
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
- Εάν το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος Δ , τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 εάν και μόνον εάν
$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$
- Θέτοντας $x - x_0 = h$ ή $x = x_0 + h$ και λαμβάνοντας υπόψη ότι $x \to x_0$ τότε και μόνο τότε όταν $h \to 0$, θα έχουμε την παρακάτω ισοδύναμη έκφραση για την παράγωγο σε ένα σημείο x_0:
$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Πρόταση 3.1.2.: Έστω Δ διάστημα του $\mathbb{R}$, $f: \Delta \to \mathbb{R}$ συνάρτηση και $x_0 \in \Delta$. Εάν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε είναι και συνεχής στο x_0.

Ορισμός 3.1.3.: Έστω Δ διάστημα του $\mathbb{R}$, $f: \Delta \to \mathbb{R}$ συνάρτηση και Δ_1 το σύνολο των σημείων του Δ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Η συνάρτηση $F_1: \Delta_1 \to \mathbb{R}$ με τύπο $F_1(x) = f'(x)$ για κάθε $x \in \Delta_1$ λέγεται πρώτη παράγωγος της f ή απλά παράγωγος της f και συμβολίζεται με f'.

Παρατήρηση: η πρώτη παράγωγος της f συμβολίζεται επίσης ως:

$$\frac{df(x)}{dx}$$

και διαβάζεται <<ντε εφ του x ως προς ντε x>>.

3.2ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

(1) **Πρόταση 3.2.1.:** Έστω $f(x) = c, x \in \mathbb{R}$, όπου $c \in \mathbb{R}$. Τότε $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(2) **Πρόταση 3.2.2.:** Έστω $f(x) = x, x \in \mathbb{R}$. Τότε $f'(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(3) **Πρόταση 3.2.3.:** Έστω $f(x) = \sqrt{x}, x \in [0,+\infty)$. Τότε $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$.

(4) **Πρόταση 3.2.4.:** Έστω $f(x) = x^n, x \in \mathbb{R}$, όπου $n = 2,3 \ldots ..$ Τότε, $f'(x) = nx^{n-1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(5) **Πρόταση 3.2.5.:** Έστω $f(x) = \eta\mu x, x \in \mathbb{R}$. Τότε, $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(6) **Πρόταση 3.2.6.:** Έστω $f(x) = \sigma\upsilon\nu x, x \in \mathbb{R}$. Τότε, $f'(x) = -\eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(7) **Πρόταση 3.2.7.:** Έστω $f(x) = lnx, x \in (0,+\infty)$. Τότε, $f'(x) = \frac{1}{x}$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

(8) **Πρόταση 3.2.8.:** Έστω $f(x) = log_a x, x \in (0,+\infty)$, όπου $\alpha \in (0,+\infty)\backslash\{1\}$. Τότε,

$$f'(x) = \frac{1}{xln_a}$$

για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

3.3ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμός 3.3.1.: Έστω Δ διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f: \Delta \to \mathbb{R}$ γνησίως μονότονη και συνεχής συνάρτηση. Εάν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \Delta$ και $f'(x_0) \neq 0$, τότε η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $y_0 = f(x_0)$ και ισχύει ότι

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f^1(x_0)}.$$

Πρόταση 3.3.2.: Έστω $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$f'(x) = e^x$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Πρόταση 3.3.3.: Έστω $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, όπου $a \in (0,+\infty)\backslash\{1\}$. Τότε,

$$f'(x) = a^x lna$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Πρόταση 3.3.4.: Έστω $f(x) = \tau o\xi\eta\mu x$, $x \in (-1,1)$. Τότε,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

για κάθε $x \in (-1,1)$.

Πρόταση 3.3.5.: Έστω $f(x) = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu x$, $x \in (-1,1)$. Τότε,

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

για κάθε $x \in (-1,1)$.

3.4 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Πρόταση 3.4.1.: Έστω Δ_1 και Δ_2 διαστήματα του $\mathbb{R}$, $f: \Delta_1 \to \mathbb{R}$ και $g: \Delta_2 \to \mathbb{R}$ με $g(\Delta_2) \subseteq \Delta_1$. Έστω ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \Delta_2$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $y_0 = g(x_0)$. Τότε η συνάρτηση fog είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει ότι

$$fog'(x) = f'\big(g(x_0)\big) * g'(x_0).$$

Πόρισμα: Έστω Δ διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f: \Delta \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Τότε,

1. $((f(x))^n)' = n(f(x))^{n-1} * f'(x), n = 1,2, \ldots.$
2. $(\eta\mu\, f(x))' = \sigma\upsilon\nu f(x) * f'(x).$
3. $(\sigma\upsilon\nu f(x))' = -\eta\mu f(x) * f'(x).$
4. $(e^{f(x)})' = e^{f(x)} * f'(x).$
5. $\left(a^{f(x)}\right)' = a^{f(x)} * \ln a * f'(x), a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}.$

Πόρισμα: Έστω Δ διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f: \Delta \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$. Τότε,

1) $\left(\sqrt{fx(x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} * f'(x).$
2) $\ln f(x) = \frac{1}{f} * f'(x).$

Πρόταση 3.4.2.: Έστω $f(x) = x^a$, $x \in (0, +\infty)$, όπου $a \in \mathbb{R}$. Τότε, $f'(x) = ax^{a-1}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

3.5 ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

Πρόταση 3.5.1.: Έστω Δ διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f: \Delta \to \mathbb{R}, g: \Delta \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \Delta$. Τότε, η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει ότι

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Πρόταση 3.5.2.: Έστω Δ διάστημα του $\mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και $f: \Delta \to \mathbb{R}$ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \Delta$. Τότε η συνάρτηση λf είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει ότι

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0).$$

Πόρισμα 3.5.3.: Έστω Δ διάστημα του $\mathbb{R}$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ και $f: \Delta \to \mathbb{R}, g: \Delta \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \Delta$. Τότε, η συνάρτηση $\kappa f + \lambda g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει ότι

$$(\kappa f + \lambda g)'(x_0) = \kappa f'(x_0) + \lambda g'(x_0).$$

Πρόταση 3.5.4.: Έστω Δ διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f: \Delta \to \mathbb{R}$, $g: \Delta \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \Delta$. Τότε, η συνάρτηση $f * g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει ότι

$$(f * g)'(x_0) = f'(x_0) * g(x_0) + f(x_0) * g'(x_0).$$

Πρόταση 3.5.5.: Έστω Δ διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f: \Delta \to \mathbb{R}$ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \Delta$ με $f(x_0) \neq 0$. Τότε, η συνάρτηση $\frac{1}{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει ότι

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{(f(x_0))^2}.$$

Πρόταση 3.5.6.: Έστω Δ διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f: \Delta \to \mathbb{R}$, $g: \Delta \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \Delta$ με $g(x_0) \neq 0$. Τότε, η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει ότι

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) * g(x_0) - f(x_0) * g'(x_0)}{\left(g(x_0)\right)^2}.$$

Πρόταση 3.5.7.: Έστω $f(x) = εφx, x \in \left(κπ - \frac{π}{2}, κπ + \frac{π}{2}\right)$, όπου $κ \in \mathbb{Z}$. Τότε,

$$f'(x) = \frac{1}{συν^2 x}$$

για κάθε $x \in \left(κπ - \frac{π}{2}, κπ + \frac{π}{2}\right)$.

Πρόταση. 3.5.8: Έστω $f(x) = σφx, x \in \left((κ-1)\text{π}, κ\text{π}\right)$, όπου $κ \in \mathbb{Z}$. Τότε,

$$f'(x) = -\frac{1}{ημ^2(x)}$$

για κάθε $x \in \left((κ-1)π, κπ\right)$.

Πρόταση 3.5.9.: Έστω $f(x) = τοξεφx, x \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Πρόταση 3.5.10.: Έστω $f(x) = τοξσφx, x \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Παρατήρηση: από τις τέσσερις τελευταίες προτάσεις προκύπτουν οι εξής κανόνες:

I. $\left(εφ\left(f(x)\right)\right)' = \frac{1}{συν^2 f(x)} * f'(x)$.
II. $\left(σφ\left(f(x)\right)\right)' = \frac{1}{ημ^2 f(x)} * f'(x)$.
III. $\left(τοξεφ\left(f(x)\right)\right)' = \frac{1}{1+(f(x))^2} * f'(x)$.
IV. $\left(τοξσφ\left(f(x)\right)\right)' = -\frac{1}{1+(f(x))^2} * f'(x)$.

3.6 ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Ο διαφορικός λογισμός είναι η μελέτη του ορισμού, των ιδιοτήτων και των εφαρμογών της παραγώγου μιας συνάρτησης. Η ίδια με τη διαδικασία εύρεσης του παραγώγου λέγεται διαφοροποίηση. Λαμβάνοντας υπόψη μια λειτουργία και ένα σημείο στο πεδίο ορισμού του, η παράγωγος στο σημείο αυτό είναι ένας τρόπος που κωδικοποιεί τη συμπεριφορά της συνάρτησης κοντά σε αυτό το σημείο. Με την εύρεση της παραγώγου συνάρτησης σε κάθε σημείο στο πεδίο ορισμού του είναι δυνατόν να παραχθεί μια καινούρια συνάρτηση που ονομάζεται ‘’παράγωγος συνάρτηση’’ ή απλά η παράγωγος της αρχικής συνάρτησης. Στη μαθηματική ορολογία, παράγωγος είναι μια διαδικασία η οποία παίρνει μια συνάρτηση και εξάγει μια δεύτερη συνάρτηση. Αυτή είναι η πιο αφηρημένη από πολλές από τις διεργασίες που μελετούνται σε στοιχειώδη άλγεβρα, όπου η συνάρτηση κατά κανόνα δέχεται έναν αριθμό και παραγάγει έναν άλλον αριθμό. Το κοινό σύμβολο για μια παράγωγο είναι μια απόστροφος που ονομάζεται πρώτη παράγωγος. Έτσι η παράγωγος της συνάρτησης f συμβολίζεται με f', και προφέρεται πρώτη παράγωγος της f. Εάν η μεταβλητή της συνάρτησης αντιπροσωπεύει το χρόνο, στη συνέχεια η παράγωγος αντιπροσωπεύει την αλλαγή της σε σχέση με το χρόνο. Για παράδειγμα, εάν η f είναι μια συνάρτηση που δέχεται το χρόνο ως μεταβλητή και δίνει τη θέση της σφαίρας τη στιγμή εκείνη ως τιμή, τότε η παράγωγος της f είναι το πόσο γρήγορα η θέση μεταβάλλεται στο χρόνο, δηλαδή, είναι η ταχύτητα της σφαίρας.

Αν μια συνάρτηση είναι γραμμική (δηλαδή, εάν η γραφική παράστασή της συνάρτησης είναι μια ευθεία γραμμή), τότε η συνάρτηση μπορεί να γραφτεί ως $y = mx + b$, όπου x είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή, y είναι η εξαρτημένη μεταβλητή και b είναι το σημείο τομής της y :

$$m = \frac{rise}{run} = \frac{change\ in\ y}{change\ in\ x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Αυτό δίνει μια ακριβή τιμή για την κλίση μιας ευθείας γραμμής. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης δεν είναι μια ευθεία γραμμή, τότε η αλλαγή στο y
διαιρούμενη με τη μεταβολή x ποικίλλει. Πιο συγκεκριμένα αν f είναι μια συνάρτηση, ορίζουμε ένα σημείο στο πεδίο ορισμού της με συντεταγμένες $(a, f(a))$, το οποίο είναι ένα σημείο πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης. Αν h είναι ένας αριθμός κοντά στο μηδέν, τότε ο $a + h$ είναι ένας αριθμός κοντά στο a. Επομένως το σημείο $(a + h, f(a + h))$ τείνει στο σημείο $(a, f(a))$.
Η κλίση μεταξύ αυτών των δύο σημείων είναι :

$$m = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Η έκφραση αυτή επονομάζεται πηλίκο διαφοράς. Μια γραμμή μέσω δύο σημείων σε μια καμπύλη ονομάζεται τέμνουσα γραμμή, και έτσι m είναι η κλίση της τέμνουσας γραμμής μεταξύ των $(a, f(a))$ και $(a + h, f(a + h))$. Η τέμνουσα γραμμή είναι μόνο μια προσέγγιση στη συμπεριφορά της συνάρτησης στο σημείο a διότι δεν λαμβάνει υπόψη για ότι συμβαίνει μεταξύ a και $a + h$. Δεν είναι δυνατόν να ανακαλύψει τη συμπεριφορά στο a θέτοντας το h μηδέν επειδή αυτό θα απαιτούσε τη διαίρεση με το μηδέν, η οποία είναι αδύνατη. Η παράγωγος ορίζεται από τη λήψη του ορίου καθώς το h τείνει στο μηδέν, πράγμα που σημαίνει ότι θεωρεί την συμπεριφορά της f για όλες τις μικρές τιμές του h και εξάγει μια τιμή για την περίπτωση κατά την οποία το h ισούται με το μηδέν.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Γεωμετρικά, η παράγωγος είναι η κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $(a, f(a))$. Η παράγωγος είναι ένα όριο των λόγων διαφοράς. Για το λόγο αυτό, η παράγωγος ονομάζεται κάποιες φορές η κλίση της συνάρτησης f.

3.7 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

Ορισμός δεύτερης παραγώγου 3.7.1.: Έστω Δ διάστημα του ℝ, $f: \Delta \to \mathbb{R}$ συνάρτηση και $f': \Delta_1 \to \mathbb{R}$ η παράγωγος της f, δηλαδή το Δ_1 είναι το σύνολο των σημείων του Δ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Εάν το σύνολο Δ_1 είναι διάστημα, τότε η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης f' καλείται δεύτερη παράγωγος της f και συμβολίζεται με f'' ή $f^{(2)}$. Επαγωγικά ορίζεται η n-οστή παράγωγος $f^{(n)}$ της f:

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)', n = 3,4 \ldots$$

Παρατήρηση:
Διακρίνουμε ότι:

$$f^0 = f,$$
$$f^{(1)} = f',$$
$$f^{(2)} = f'',$$

$$f^{(3)} = f''',$$
$$f^{(4)} = f'''', \ldots$$

Θεώρημα 3.7.2

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο (α, β) και x_0 ένα σημείο του (α, β) στο οποίο η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη.

- Αν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) < 0$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση x_0.
- Αν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) > 0$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση x_0.

3.8 ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Θεώρημα 3.8.1.:

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ, τότε:

- Αν $f'(x) > 0$ για κάθε x εσωτερικό του Δ, η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.
- Αν $f'(x) < 0$ για κάθε x εσωτερικό του Δ, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Παρατήρηση:

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει.

Θεώρημα 3.8.2. (Fermat):

Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε εσωτερικό σημείο x_0 του Δ στο οποίο παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, τότε είναι: $f'(x_0) = 0$.

Παρατηρήσεις:

1. Το παραπάνω θεώρημα μας οδηγεί στο να αναζητήσουμε τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης στις ρίζες της f'.
2. Επειδή δεν ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος οι ρίζες της f' είναι πιθανές θέσεις των ακρότατων για την f.
3. Μία συνάρτηση μπορεί να έχει τοπικά ακρότατα και σε σημεία που δεν είναι ρίζες της f', όπως στα άκρα του πεδίου ορισμού της (αν είναι κλειστά) και σε σημεία που δεν είναι παραγωγίσιμη.
   Οι ρίζες της f' και τα σημεία που η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη ονομάζονται κρίσιμα σημεία.
   Χρειάζεται επομένως ένα κριτήριο για να επιβεβαιώνουμε τα σημεία στα οποία μια συνάρτηση παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.
   Αυτό είναι το επόμενο:

Θεώρημα 3.8.3.:

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο (α, β).

Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, x_0) και γνησίως φθίνουσα στο (x_0, β) τότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση x_0.

Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (α, x_0) και γνησίως αύξουσα στο (x_0, β) τότε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση x_0.

Με άλλη διατύπωση:

Έστω f συνάρτηση συνεχής στο (α, β) και παραγωγίσιμη σε αυτό με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 του (α, β).

Αν $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και
$f'(x) < 0$, για κάθε $x \in (x_0, \beta)$, τότε,
η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση x_0 το $f(x_0)$.

Αν $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και
$f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (x_0, \beta)$, τότε,
η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση x_0 το $f(x_0)$.

Αν η f' διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ τότε:

i. το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο,
ii. η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).

3.9 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΔΥΟ ΚΑΙ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Ορισμός 3.9.1.:Έστω D το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών (x, y). Μία πραγματική συνάρτηση f δύο μεταβλητών ορισμένη στο D είναι ένας κανόνας που αποδίδει τον μοναδικό πραγματικό αριθμό:

$$w = f(x, y)$$

σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος (x, y) του D.

Το D είναι το πεδίο ορισμού της f και το σύνολο των τιμών των w που παίρνει η συνάρτηση, το πεδίο τιμών της.

Οι ανεξάρτητες μεταβλητές x, y είναι οι μεταβλητές εισόδου και η εξαρτημένη μεταβλητή w είναι η μεταβλητή εξόδου.

Παρατήρηση: Ανάλογα ορίζεται και η συνάρτηση τριών μεταβλητών $w = f(x, y, z)$.

Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών αποτελείται από όλα τα ζεύγη (x, y) για τα οποία έχει νόημα η έκφραση f. Έτσι λοιπόν το πεδίο ορισμού είναι μια περιοχή του επιπέδου xy.

Ορισμός 3.9.2. (Μερική Παράγωγος):

Η παράγωγος μιας συνάρτησης $f(x)$ μιας μεταβλητής ορίζεται ως:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Για συναρτήσεις δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών, αντίστοιχα όρια ορίζονται ως προς οποιαδήποτε από τις μεταβλητές, με τη συνθήκη ότι οι υπόλοιπες μεταβλητές παραμένουν σταθερές. Για παράδειγμα, αν η $f(x, y)$ είναι μία συνάρτηση των μεταβλητών x και y, το όριο

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ y = \text{σταθερό}}} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

ονομάζεται μερική παράγωγος της $f(x, y)$ ως προς x και συμβολίζεται με:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ ή } f_x.$$

Η $f(x, y)$ έχει δύο πρώτες μερικές παραγώγους, τις:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ y = \text{σταθερό}}} \frac{f(x + \Delta x) - f(x, y)}{\Delta x} \text{ και}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\substack{\Delta y \to 0 \\ x = \text{σταθερό}}} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{Ο}
ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

4.1ΟΡΙΣΜΟΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

Η ολοκλήρωση είναι το αντίστροφο της παραγώγισης. Έστω ότι η $F(x)$ είναι μια συνάρτηση που ορίζεται σε ένα διάστημα του άξονα x. Αν η παράγωγος της είναι η $f(x)$, μπορούμε να ολοκληρώσουμε την $f(x)$ για να βρούμε την $F(x)$ (μιας που η ολοκλήρωση είναι η αντίστροφη διαδικασία του διαφορικού). Η συνάρτηση $F(x)$ θα αναφέρεται σαν ένα ολοκλήρωμα ή (αντιπαράγωγος) της συνάρτησης $f(x)$. Χρειαζόμαστε μια ειδική σημειογραφία για να δηλώσουμε την απαιτούμενη ολοκλήρωση της συνάρτησης $f(x)$ ως προς x.
Μια συνάρτηση $y = F(x)$ ονομάζεται λύση της διαφορικής εξίσωσης.

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

αν η $F(x)$ έχει παράγωγο και ισχύει η σχέση

$$\frac{d}{dx} * F(x) = f(x)$$

Η $F(x)$ είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $f(x)$ ως προς x και συμβολίζεται ως

$$\int f(x)dx.$$

Η $f(x)$ είναι η συνάρτηση προς ολοκλήρωση, και το dx δείχνει πως η συνάρτηση εκτελείται ως προς x.
Βασική ιδιότητα : καταλαβαίνουμε ότι αν η $F(x)$ είναι ολοκλήρωμα της $f(x)$ ως προς x, τότε η $F(x) + c$ είναι επίσης ένα ολοκλήρωμα (όπου c μια τυχαία σταθερά).

$$\frac{d}{dx} * F(x) = f(x) \rightarrow \int f(x)dx = F(x) + c$$

Επειδή το παραπάνω ολοκλήρωμα δεν έχει ορισμένη αριθμητική τιμή, είναι γνωστό ως αόριστο ολοκλήρωμα της $f(x)$.
Αριθμητικό παράδειγμα
Η συνάρτηση $F(x) = x^3$ είναι μια παράγουσα της
$f(x) = 3x^2$στο $\mathbb{R}$, αφού $(x^3)' = 3x^2$
παρατηρούμε ότι και όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = x^3 + c = F(x) + c$, όπου c ανήκει στο $\mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο $\mathbb{R}$, αφού $(x^3 + c)'= 3x^2$.

4.2ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

Ορισμός 4.2.1:Έστω f, g πραγματικές παραγωγίσιμες συναρτήσεις ορισμένες σε ένα διάστημα Δ του $\mathbb{R}$. Εάν η συνάρτηση $f'g$ έχει αόριστο ολοκλήρωμα στο Δ, τότε η συνάρτηση fg' έχει αόριστο ολοκλήρωμα στο Δ και ισχύει ο τύπος:

Μέθοδος (1)

$$\int f(x)g'(x)dx = fg - \int f'(x)g(x)dx$$

Μέθοδος (2)

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + c, c \in \mathbb{R}.$$

4.3 ΒΑΣΙΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

1) $f(x) = 0 \leftrightarrow F(x) = c.$

2) $f(x) = a \leftrightarrow F(x) = ax + c.$

3) $f(x) = x^k \leftrightarrow F(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1} + c, k \neq -1.$

4) $f(x) = e^x \leftrightarrow F(x) = e^x + c.$

5) $f(x) = \frac{1}{x} \leftrightarrow F(x) = ln|x| + c.$

6) $f(x) = \cos(x) \leftrightarrow F(x) = \sin(x) + c.$

7) $f(x) = \sin(x) \leftrightarrow F(x) = -\cos(x) + c.$

8) $f(x) = \frac{1}{cos^2(x)} \leftrightarrow F(x) = \tan(x) + c.$

9) $f(x) = \frac{1}{sin^2(x)} \leftrightarrow F(x) = \cot(x) + c.$

10) $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \leftrightarrow F(x) = \arctan(x) + c.$

11) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \leftrightarrow F(x) = \arcsin(x) + c.$

12) $f(x) = a^x \leftrightarrow F(x) = a^x/\ln(a) + c.$

4.4 ΚΑΝΟΝΕΣ ΤΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ

Στο υποκεφάλαιο αυτό θα δούμε τους δύο κανόνες πράξεων στα ολοκληρώματα, ας τα αναφέρουμε παρακάτω:

- **<u>Το ολοκλήρωμα του αθροίσματος</u>**

Ολοκλήρωμα αθροίσματος πεπερασμένου αριθμού συναρτήσεων είναι το άθροισμα των ολοκληρωμάτων αυτών των συναρτήσεων.

$$\int [f(x) + g(x)]\, dx = F(x) + G(x) + c$$

Παρατηρήσεις: ο κανόνας αυτός είναι φυσική συνέπεια του ολικού διαφορικού αθροίσματος συναρτήσεων αφού

$$\frac{d}{dx}[F(x) + G(x)] = \frac{d}{dx}F(x) + \frac{d}{dx}G(x) = f(x) + g(x)$$

Άρα ολοκληρώνοντας ως προς x έχουμε :

$$\int (\frac{d}{dx}[F(x)+G(x)])dx = \int \left(\frac{d}{dx}F(x)+\frac{d}{dx}G(x)\right) = \int (f(x)+g(x))dx$$

Επομένως,

$$F(x)+G(x)+c = F(x)+c_1+G(x)+c_2 = \int \big(f(x)+g(x)\big)dx$$

Εφόσον οι σταθερές c, c_1,c_2 είναι τυχαίες μεταβλητές τότε μπορούμε να θέσουμε c= $c_1 + c_2$. Τα δεξιά μέλη των πιο πάνω εξισώσεων είναι ίσα και συνεπώς θα είναι ίσα και τα αριστερά.

- **Το ολοκλήρωμα ενός πολλαπλασιασμού**

Το ολοκλήρωμα r φορών μιας συνάρτησης προς ολοκλήρωση (το r είναι μια σταθερά), είναι r φορές το ολοκλήρωμα της συνάρτησης. Δηλαδή :

$$\int rf(x)dx = r\int f(x)dx$$

Παρατηρήσεις :

- Ο κανόνας αυτός είναι άμεση συνέπεια του ολοκληρώματος του αθροίσματος
- Για να ισχύει η παραπάνω σχέση το r πρέπει να είναι σταθερός όρος.

- **Το ολοκλήρωμα μιας ρητής συνάρτησης**

Αν έχουμε μια ρητή συνάρτηση (πηλίκο δύο πολυωνύμων) και ο αριθμητής είναι βαθμού ίδιου ή μεγαλυτέρου του παρανομαστή, τότε πρώτη μας δουλειά είναι η διαίρεση.

4.5 ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Οι ρητές συναρτήσεις αναφέρονται σε συναρτήσεις που γράφονται σαν λόγος δύο πολυωνύμων δηλαδή $f(x) = p(x)/q(x)$.

Μερικά βασικά ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων:

α) $\int \frac{1}{ax+\beta}dx = a^{-1}\ln(ax+\beta)+c$

β)$\int \frac{1}{ax+\beta^k}dx = a^{-1}(ax+\beta)^{-k+1}/(-k+1)+c$

γ)$\int \frac{x}{(1+x^2)^k}dx = \frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{-k+1}x}{-k+1}+c, k \neq -1$

δ)$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \ln(1+x^2)/2+c$

ε)$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x)+c$

4.6 ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΡΗΤΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΤΟΥ x ΚΑΙ ΤΟΥ $\sqrt[n]{\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$

Έστω:

$$R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right),$$

όπου $n = 2,3, \ldots$, και $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ με $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$, ρητή έκφραση της μεταβλητής x και της συνάρτησης:

$$\sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}.$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος:

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right) dx$$

θέτουμε:

$$t = \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}.$$

Οπότε,

$$t^n = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}, x = \frac{\beta-\delta t^n}{\gamma t^n-\alpha}$$

και

$$dx = \frac{-n\delta t^{n-1}(\gamma t^n-\alpha) - (\beta-\delta t^n)n\gamma t^{n-1}}{(\gamma t^n-\alpha)^2} dt = \frac{n(\alpha\delta-\beta\gamma)t^{n-1}}{(\alpha-\gamma t^n)^2} dt.$$

Συνεπώς, το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int R\left(\frac{\beta-\delta t^n}{\gamma t^n-\alpha}, t\right) \frac{n(\alpha\delta-\beta\gamma)t^{n-1}}{(\alpha-\gamma t^n)^2} dt.$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης τον υπολογισμό του οποίου γνωρίζουμε.

4.7 ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΡΗΤΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΤΟΥ x ΚΑΙ ΤΩΝ $\boldsymbol{\sqrt[n_1]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}, \dots, \sqrt[n_k]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}}$

Έστω:

$$R\left(x, \sqrt[n_1]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}, \dots, \sqrt[n_k]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)$$

ρητή έκφραση του x και των συναρτήσεων $\sqrt[n_1]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}, \dots, \sqrt[n_k]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος:

$$R\left(x, \sqrt[n_1]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}, \dots, \sqrt[n_k]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right) dx,$$

θέτουμε,

$$t = \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}},$$

όπου n είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των $n_1, \dots, n_k$. Έτσι οδηγούμαστε σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης τον υπολογισμό του οποίου γνωρίζουμε.

4.8 ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΡΗΤΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΤΟΥ x ΚΑΙ ΤΟΥ $\boldsymbol{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}$

Έστω $R\left(x, \sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}\right)$, όπου $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ και $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ρητή έκφραση της μεταβλητής x και της συνάρτησης $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος:

$$\int R\left(x, \sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}\right) dx,$$

διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις.

Πρώτη περίπτωση: $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$

Στην περίπτωση αυτή, απλοποιείται η τετραγωνική ρίζα με το τετράγωνο της διπλής ρίζας και, συνεπώς, αναγόμαστε σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης.

Δεύτερη περίπτωση: $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$

Στην περίπτωση αυτή, το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες: ρ_1, ρ_1. Θέτουμε:

$$\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = t(x-\rho_1).$$

Οπότε έχουμε:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=t^2(x-\rho_1)^2 \to \alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)=t^2(x-\rho_1)^2 \to \alpha(x-\rho_2) = t^2(x-\rho_1) \to x=\frac{\rho_1 t^2-\alpha\rho_2}{t^2-\alpha}$$

και

$$dx=\left(\frac{\rho_1 t^2-\alpha\rho_2}{t^2-\alpha}\right)' dt=\frac{2\rho_1 t(t^2-\alpha)-2t(\rho_1 t^2-\alpha\rho_2)}{(t^2-\alpha)^2}dt =\frac{2\rho_1 t^3-2\alpha\rho_1 t+2\alpha\rho_2 t-2\rho_1 t^3}{(t^2-\alpha)^2}dt=\frac{2\alpha\rho_2 t-2\alpha\rho_1 t}{(t^2-\alpha)^2}dt.$$

Συνεπώς, το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int R\left(\frac{\rho_1 t^2-\alpha\rho_2}{t^2-\alpha}, t\left(\frac{\rho_1 t^2-\alpha\rho_2}{t^2-\alpha}-\rho_1\right)\right)*\frac{2\alpha\rho_2 t-2\alpha\rho_1 t}{(t^2-\alpha)^2}dt.$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης τον υπολογισμό του οποίου γνωρίζουμε.

Τρίτη περίπτωση: $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma<0$

Στην περίπτωση αυτή, επειδή το υπόριζο τριώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες, έχουμε $\alpha>0$ και, επομένως, $\gamma>0$. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος:

$$\int R(x,\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma})dx$$

υπάρχουν δύο τρόποι

(1) Θέτουμε:

$$\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}=t\pm\sqrt{\alpha}x.$$

Οπότε,

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\left(t\pm\sqrt{\alpha}x\right)^2 \to \alpha x^2+\beta x+\gamma=t^2\pm 2\sqrt{a}tx+\alpha x^2 \to \left(\beta\mp 2\sqrt{\alpha}t\right)x =t^2-\gamma \to x=\frac{t^2-\gamma}{\beta\mp 2\sqrt{\alpha}t}$$

και

$$dx=\left(\frac{t^2-\gamma}{\beta\mp 2\sqrt{\alpha}t}\right)' dt=\frac{2t\left(\beta\mp 2\sqrt{\alpha}t\right)\pm 2\sqrt{\alpha}(t^2-\gamma)}{\left(\beta\mp 2\sqrt{\alpha}t\right)^2}dt=\frac{\mp 2\sqrt{\alpha}t^2+2\beta t\mp 2\sqrt{\alpha}\gamma}{\left(\beta\mp 2\sqrt{\alpha}t\right)^2}dt.$$

Συνεπώς, το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int R\left(\frac{t^2-\gamma}{\beta\mp 2\sqrt{\alpha}t}, t\pm\sqrt{\alpha}\frac{t^2-\gamma}{\beta\mp 2\sqrt{\alpha}t}\right)*\frac{\mp 2\sqrt{\alpha}t^2+2\beta t\mp 2\sqrt{\alpha}\gamma}{\left(\beta\mp 2\sqrt{\alpha}t\right)^2}dt.$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης τον υπολογισμό του οποίου γνωρίζουμε.

(2) Θέτουμε:

$$\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}=xt\pm\sqrt{\gamma}.$$

Οπότε,

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\left(xt\pm\sqrt{\gamma}\right)^2\rightarrow \alpha x^2+\beta x+\gamma=x^2t^2\pm 2\sqrt{\gamma}xt+\gamma\rightarrow \alpha x+\beta =xt^2\pm 2\sqrt{\gamma}t\rightarrow x=\frac{\pm 2\sqrt{\gamma}t-\beta}{\alpha-t^2}$$

και

$$dx=\left(\frac{\pm 2\sqrt{\gamma}t-\beta}{\alpha-t^2}\right)'dt=\frac{\pm 2\sqrt{\gamma}(\alpha-t^2)\pm 2t(2\sqrt{\gamma}t-\beta)}{(\alpha-t^2)^2}dt=2*\frac{\pm\sqrt{\gamma}t^2\mp\beta t\pm\sqrt{\gamma}\alpha}{(\alpha-t^2)^2}dt.$$

Συνεπώς, το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int R\left(\frac{\pm 2\sqrt{\gamma}t-\beta}{\alpha-t^2},\frac{\pm 2\sqrt{\gamma}t-\beta}{\alpha-t^2}t\pm\sqrt{\gamma}\right)*\frac{\pm\sqrt{\gamma}t^2\mp\beta t\pm\sqrt{\gamma}\alpha}{(\alpha-t^2)^2}dt$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης τον υπολογισμό του οποίου γνωρίζουμε.

4.9 ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΡΗΤΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΤΟΥ x ΚΑΙ ΤΩΝ $\sqrt{\boldsymbol{\alpha x+\beta}},\sqrt{\boldsymbol{\gamma x+\delta}}$

Έστω

$$R\left(x,\sqrt{\alpha x+\beta},\sqrt{\gamma x+\delta}\right)$$

ρητή έκφραση του x και των συναρτήσεων $\sqrt{\alpha x+\beta},\sqrt{\gamma x+\delta}$. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int R\left(x,\sqrt{\alpha x+\beta},\sqrt{\gamma x+\delta}\right)dx$, θέτουμε:

$$\sqrt{\gamma x+\delta=t}.$$

Οπότε,

$$x=\frac{t^2-\delta}{\gamma}\ \kappa\alpha\iota\ dx=\frac{2}{\gamma}tdt.$$

Συνεπώς, το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int R\left(\frac{t^2-\delta}{\gamma},\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}t^2+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma}},t\right)*\frac{2}{\gamma}tdt.$$

4.10 ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\int \boldsymbol{x^p\,(\alpha+\beta x^r)^q dx}$

Έστω:

$$I = \int x^p(\alpha-\beta x^r)^q dx,$$

όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $p, q, r \in \mathbb{Q}$. Εάν ο q είναι θετικός ακέραιος, τότε:

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta x^r)^q &= \sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}\alpha^{q-k}(\beta x^r)^k\\ &= \alpha^q + \binom{q}{1}\alpha^{q-1}\beta x^r + \cdots + \binom{q}{q-1}\alpha(\beta x^r)^{q-1} + (\beta x^r)^q, \text{όπου}:\end{aligned}$$

$$\binom{q}{k} = \frac{q!}{k!\,(q-k)!}, k = 0,1,\dots,q.$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος I διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

Πρώτη περίπτωση: $q \in \mathbb{Z}$.

Θέτουμε $x = t^k$, όπου k είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των απολύτων τιμών των παρανομαστών του p και r. Οπότε,

$$t = x^{\frac{1}{k}} \;\kappa\alpha\iota\; dx = (t^k)'dt = kt^{k-1}dt.$$

Συνεπώς,

$$I = \int (t^k)^p(\alpha+\beta(t^k)^r)^q\, kt^{k-1}dt.$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης τον υπολογισμό του οποίου γνωρίζουμε.

Δεύτερη περίπτωση: $q = \frac{q_1}{q_2}$.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(1) Εάν $\frac{p+1}{r} \in \mathbb{Z}$, τότε θέτουμε $\alpha + \beta x^r = t^{|q_2|}$. Οπότε,

$$x = \left(\frac{t^{|q_2|}-\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{r}}$$

και

$$dx = \left(\left(\frac{t^{|q_2|} - \alpha}{\beta}\right)^{r}\right)' dt = \frac{1}{r}\left(\frac{t^{|q_2|} - \alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{r}-1} \left(\frac{t^{|q_2|} - \alpha}{\beta}\right)' dt$$
$$= \frac{|q_2|}{\beta r}\left(\frac{t^{|q_2|} - \alpha}{\beta}\right)^{\frac{1-r}{r}} t^{|q_2|-1} dt.$$

Συνεπώς,

$$I = \int \left(\frac{t^{|q_2|} - \alpha}{\beta}\right)^{\frac{p}{r}} \left(\alpha + \beta \frac{t^{|q_2|} - \alpha}{\beta}\right)^{q} \frac{|q_2|}{\beta r}\left(\frac{t^{|q_2|} - \alpha}{\beta}\right)^{\frac{1-r}{r}} t^{|q_2 - 1|} dt$$
$$= \frac{|q_2|}{\beta r}\int \left(\frac{t^{|q_2|} - \alpha}{\beta}\right)^{\frac{p+1}{r}-1} t^{|q_2|(q+1)-1}\, dt.$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης τον υπολογισμό του οποίου γνωρίζουμε.

(2) Εάν $\frac{p+1}{r} + q \in \mathbb{Z}$, τότε θέτουμε $\alpha + \beta x^r = t^{|q_2|} x^{r\cdot}$ Οπότε,

$$x = \left(\frac{\alpha}{t^{|q_2|} - \beta}\right)^{\frac{1}{r}}$$

και

$$dx = \left(\left(\frac{\alpha}{t^{|q_2|} - \beta}\right)^{\frac{1}{r}}\right)' dt = \frac{1}{r}\left(\frac{\alpha}{t^{|q_2|} - \beta}\right)^{\frac{1}{r}-1} \left(\frac{\alpha}{t^{|q_2|} - \beta}\right)' dt$$
$$= -\frac{\alpha|q_2|}{r}\left(\frac{\alpha}{t^{|q_2|} - \beta}\right)^{\frac{1-r}{r}} \frac{t^{|q_2|-1}}{(t^{|q_2|} - \beta)^2} dt.$$

Συνεπώς, το ολοκλήρωμα I είναι ίσο με:

$$-\int \left(\frac{\alpha}{t^{|q_2|} - \beta}\right)^{\frac{p}{r}} \left(\alpha + \beta \frac{\alpha}{t^{|q_2|} - \beta}\right)^{q} \frac{\alpha|q_2|}{r}\left(\frac{\alpha}{t^{|q_2|} - \beta}\right)^{\frac{1-r}{r}} \frac{t^{|q_2|-1}}{(t^{|q_2|} - \beta)^2} dt \text{ ή}$$

$$I = -\frac{\alpha|q_2|}{r}\int \left(\frac{\alpha}{t^{|q_2|} - \beta}\right)^{\frac{p+1}{r}+q-1} \frac{t^{|q_2|(q+1)-1}}{(t^{|q_2|} - \beta)^2} dt.$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης τον υπολογισμό του οποίου γνωρίζουμε.

4.11 ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\int \eta\mu\, \alpha x * \sigma\upsilon\nu\beta x\, dx, \int \eta\mu\alpha x * \eta\mu\beta x dx, \int \sigma\upsilon\nu\alpha x * \sigma\upsilon\nu\beta x dx$

Για τον υπολογισμό των παραπάνω ολοκληρωμάτων χρησιμοποιούμε τους αντίστοιχους τύπους:

$$\eta\mu A * \sigma\upsilon\nu B = \frac{1}{2}[\eta\mu(A-B) + \eta\mu(A+B)],$$

$$\eta\mu A * \eta\mu B = \frac{1}{2}[\sigma\upsilon\nu(A-B) - \sigma\upsilon\nu(A+B)],$$

$$\sigma\upsilon\nu A * \sigma\upsilon\nu B = \frac{1}{2}[\sigma\upsilon\nu(A-B) + \sigma\upsilon\nu(A+B)].$$

Οπότε,

$$\int \eta\mu\alpha x * \sigma\upsilon\nu\beta x dx = \frac{1}{2}\int [\eta\mu(\alpha-\beta)x + \eta\mu(\alpha+\beta)x]\, dx$$
$$= \frac{-1}{2(\alpha-\beta)}\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)x - \frac{1}{2(\alpha+\beta)}\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)x + c,$$

$$\int \eta\mu\alpha x * \eta\mu\beta x dx = \frac{1}{2}\int [\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)x - \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)x]\, dx$$
$$= \frac{1}{2(\alpha-\beta)}\eta\mu(\alpha-\beta)x - \frac{1}{2(\alpha+\beta)}\eta\mu(\alpha+\beta)x + c,$$

$$\int \sigma\upsilon\nu\alpha x * \sigma\upsilon\nu\beta x dx = \frac{1}{2}\int [\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)x + \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)x] dx = \frac{1}{2(\alpha-\beta)}\eta\mu(\alpha-\beta)x$$
$$+ \frac{1}{2(\alpha+\beta)}\eta\mu(\alpha+\beta)x + c.$$

4.12 ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΡΗΤΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΤΩΝ $\boldsymbol{\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x}$

Έστω $R(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x)$ ρητή έκφραση των συναρτήσεων $\eta\mu x$ και $\sigma\upsilon\nu x$. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int R(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x) dx$$

θέτουμε:

$$t = \varepsilon\varphi\frac{x}{2}, x \in (-\pi, \pi).$$

Όποτε,

$$x = 2\tau o\xi\varepsilon\varphi t, t \in \mathbb{R},$$

$$dx = (2\tau o\xi\varepsilon\varphi t)' dt = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

Επίσης,

$$\eta\mu x \frac{2\eta\mu\frac{x}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}}{1} = \frac{2\eta\mu\frac{x}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}}{\eta\mu^2\frac{x}{2} + \sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}} = \frac{2\varepsilon\varphi\frac{x}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

και

$$\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2} - \eta\mu^2\frac{x}{2}}{1} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2} - \eta\mu^2\frac{x}{2}}{\eta\mu^2\frac{x}{2} + \sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}{1 + \varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Συνεπώς, το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) * \frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης τον υπολογισμό του οποίου γνωρίζουμε.

4.13 ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΡΗΤΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΤΟΥ e^x

Έστω $R(e^x)$ ρητή έκφραση της συνάρτησης e^x . Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int R(e^x)dx,$$

θέτουμε $t = e^x$. Οπότε, $x = \ln t$ και $dx = \frac{dt}{t}$. Συνεπώς,

$$\int R(e^x)\,dx = \int R(t) * \frac{dt}{t}.$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης τον υπολογισμό του οποίου γνωρίζουμε.

4.14 ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ RIEMANN

Έστω μια φραγμένη συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$. Αν $X \subseteq [\alpha, \beta]$ με M_X, m_X

θα συμβολίζουμε τα:

$$\sup\{f(x), x \in X\}$$

$$\inf\{f(x), x \in X\}.$$

Αν $X \subseteq Y \subseteq [\alpha, \beta]$ τότε $m_Y \leq m_X \leq M_X \leq M_Y$.

Διαμέριση του $[\alpha, \beta]$ ονομάζεται κάθε σύνολο P που απαρτίζεται από πεπερασμένα σημεία του $[\alpha, \beta]$ στα οποία συμπεριλαμβάνονται οπωσδήποτε τα α, β. Η πιο μικρή διαμέριση του $[\alpha, \beta]$ είναι το σύνολο $\{\alpha, \beta\}$.

Αν $P_1 \subseteq P_2$ είναι δύο διαμερίσεις του $[\alpha, \beta]$ τότε η P_2 ονομάζεται εκλέπτυνση της P_1.

Η τομή και η ένωση δύο διαμερίσεων του $[\alpha, \beta]$ είναι διαμέριση του $[\alpha, \beta]$.

Έστω μια φραγμένη συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$. Αν η διαμέριση P απαρτίζεται από τα

$$\alpha = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n = \beta$$

τότε

- Με

$$M, m, M_i, m_i, \Delta_{x_i}$$

Συμβολίζουμε αντιστοίχως τα

$$M_{[\alpha,\beta]}, m_{[\alpha,\beta]}, M_{[x_i-1,x_i]}, m_{[x_i-1,x_i]}, x_i - x_{i-1}$$

- Ο μέγιστος από τους αριθμούς $x_i - x_{i-1}$ λέγεται norm της διαμέρισης και συμβολίζεται με $\|P\|$.
- Άνω άθροισμα της f για τη διαμέριση P ονομάζεται ο αριθμός

$$U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta_{x_i}$$

- Κάτω άθροισμα της f για τη διαμέριση P ονομάζεται ο αριθμός

$$U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta_{x_i}$$

Αν $P_1 \subseteq P_2$ τότε

(α) $\|P_1\| \geq \|P_2\|$

(β) $m(\beta - \alpha) \leq L(P_1, f) \leq L(P_2, f) \leq U(P_2, f) \leq U(P_1, f) \leq M(\beta - \alpha)$

Το supremum των κάτω αθροισμάτων της f ονομάζεται κάτω ολοκλήρωμα της f και συμβολίζεται με:

$$\underline{\int_{\alpha}^{\beta}} f$$

Το infimum των άνω αθροισμάτων της f ονομάζεται άνω ολοκλήρωμα της f και συμβολίζεται με:

$$\overline{\int_{\alpha}^{\beta}} f$$

Ισχύει:

$$\underline{\int_{\alpha}^{\beta}} f \leq \overline{\int_{\alpha}^{\beta}} f$$

Αν η παραπάνω ανισότητα ισχύει ως ισότητα τότε η f λέγεται ολοκληρώσιμη κατά Riemann η δε κοινή τιμή τους ονομάζεται ολοκλήρωμα της f και συμβολίζεται με:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f$$

ή και

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)$$

Η f θα είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann αν και μόνο αν για κάθε θετικό αριθμό ε υπάρχει διαμέριση P έτσι ώστε να ισχύει:

$$U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$$

Αν η f είναι συνεχής τότε είναι και ολοκληρώσιμη κατά Riemann.

Αν η f είναι μονότονη τότε είναι και ολοκληρώσιμη κατά Riemann.

Αν η f είναι φραγμένη στο $[\alpha,\beta]$ τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε διαμέριση P με $\|P\| < \delta$ να ισχύει:

$$\int_{-\alpha}^{\beta} f - \varepsilon < L(P,f) \leq U(P,f) < \int_{\alpha}^{-\beta} +\varepsilon.$$

<u>Ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann</u>

1) Εάν $f(x) = c, x \in [\alpha,\beta]$, τότε : $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = c(\beta - \alpha)$.

Πράγματι, για κάθε διαμέριση Δ, $M_k = m_k = c$, άρα:

$$U(f,\Delta) = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)c = c(\beta - \alpha) = L(f,\Delta)$$

2) Εάν οι f και g είναι ολοκληρώσιμες στο $[\alpha,\beta]$, τότε και η $f + g$ είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\big(f(x) + g(x)\big)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$$

Παρατήρηση: ο ορισμός του ολοκληρώματος της f έχει δοθεί για συναρτήσεις f ορισμένες στο $[\alpha,\beta]$ με $\alpha < \beta$. Επεκτείνουμε τον ορισμό του ολοκληρώματος της f στο $[\alpha,\alpha]$ και της f στο $[\beta,\alpha]$ ως εξής:

i. Για κάθε f, ορίζουμε:

$$\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$$

ii. Για κάθε ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$ $(\alpha < \beta)$ ορίζουμε:

$$\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx = -\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

4.15 ΑΝΤΙΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Θεώρημα 4.15.1.: εάν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$ τότε η συνάρτηση

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt$$

είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

Θεώρημα: 4.15.2.: ($1^{\text{ο}}$ Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού)

Εάν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και συνεχής στο x_0, τότε η συνάρτηση $F(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt, \alpha \leq x \leq \beta$,είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η παράγωγος αυτής ισούται με $f(x_0)$.

Ορισμός 4.15.3.: Αν η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$, τότε η συνάρτηση F καλείται αντιπαράγωγος της f, ή και αρχική συνάρτηση της f.

Θεώρημα 4.15.4.: Αν η F είναι μια αντιπαράγωγος της f ορισμένη σε ένα διάστημα, τότε το σύνολο των αντιπαραγώγων της f είναι της μορφής:

$$\{F + c, c = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}\}.$$

Θεώρημα 4.15.5.: ($2^{\text{ο}}$ θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού)

Εάν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = G(\beta) - G(\alpha),$$

όπου η G είναι μια οποιαδήποτε αντιπαράγωγος της f.

Θεώρημα 4.15.6.: εάν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = G(\beta) - G(\alpha),$$

όπου η G είναι μια οποιαδήποτε αντιπαράγωγος της f.

4.16 ΔΙΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Θεωρία 4.16.1.:

(α) Εάν το χωρίο R είναι φραγμένο αριστερά και δεξιά από τις ευθείες $x = a$ και $x = \beta$ και από πάνω και κάτω από τις καμπύλες $y = g_1(x)$ και $y = g_2(x)$ τότε το διπλό ολοκλήρωμα:

$$\iint_R f(x,y)dR = \int_{\alpha}^{\beta}\left(\int_{g_2(x)}^{g_1(x)} f(x,y)dy\right)dx$$

(β) Εάν το χωρίο είναι φραγμένο πάνω και κάτω από τις ευθείες $y = d$ και $y = c$ και αριστερά και δεξιά από τις καμπύλες $x = h_1(y)$ και $x = h_2(y)$ τότε το διπλό ολοκλήρωμα:

$$\iint_R f(x,y)dR' = \int_{c}^{d}\left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx\right)dy$$

Παρατήρηση (ερμηνεία του διπλού ολοκληρώματος):

αν $f(x,y) \geq 0$ τότε το:

$$\iint_R f(x,y)dxdy$$

παριστάνει τον όγκο που βρίσκεται κάτω από το γράφημα της $f(x,y)$ και πάνω (μέσα) από το χωρίο R.

4.17 ΔΙΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Πολλές φορές ένα διπλό ολοκλήρωμα υπολογίζεται ευκολότερα αν αντί για καρτεσιανές συντεταγμένες (x,y) χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες (r,θ) όπου:

$$\left.\begin{array}{l} x = rcos\theta \\ y = rsin\theta \end{array}\right\} \to x^2 + y^2 = r^2$$

Παρατήρηση: η μέθοδος χρησιμοποιείται ιδιαίτερα από το χωρίο ολοκλήρωσης R είναι ένας κυκλικός δίσκος (ή μέρος αυτού).

Ισχύει:

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_{R'} f(rcos\theta, rsin\theta)rdrd\theta$$

όπου R' είναι το χωρίο στο οποίο μετασχηματίζεται το χωρίο R με την αλλαγή των μεταβλητών.

Προσοχή: Πολλαπλασιάζουμε με r.

Γενικότερα ισχύει το παρακάτω θεώρημα για διπλά ολοκληρώματα και αλλαγές μεταβλητών.

Θεώρημα (αλλαγή μεταβλητών σε διπλό ολοκλήρωμα):

Αν $x, y \in R$ είναι δύο μεταβλητές οι οποίες είναι συναρτήσεις των μεταβλητών u, v τέτοιες ώστε:

$$x = x(u,v): R_1 \to IR, y = y(u,v): R_1 \to IR$$

τότε:

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_{R_1} F(u,v)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

όπου $F(u,v) = f\big(x(u,v), y(u,v)\big)$, $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ είναι η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού και R_1 είναι το χωρίο στο οποίο μετασχηματίζεται το χωρίο R με την αλλαγή των μεταβλητών.

Παρατήρηση:

Εάν $x = rcos\theta, y = rsin\theta$ τότε:

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial_x}{\partial_r} & \frac{\partial_x}{\partial_\theta} \\ \frac{\partial_y}{\partial_r} & \frac{\partial_y}{\partial_\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

οπότε από το θεώρημα έχουμε:

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_{R'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta.$$

4.18 ΤΡΙΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Θεωρία 4.18.1.:Εάν G είναι ένα στερεό που περικλείεται από τις επιφάνειες $z = g_1(x,y)$ και $z = g_2(x,y)$ και R η προβολή του G στο Oxy - επίπεδο τότε το τριπλό ολοκλήρωμα:

$$\iiint_G f(x,y,z)dG = \iint_R \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dR$$

4.19 ΤΡΙΠΛΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ-ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Πολλές φορές ένα τριπλό ολοκλήρωμα υπολογίζεται ευκολότερα αν αντί για συντεταγμένες (x,y,z) χρησιμοποιήσουμε κυλινδρικές συντεταγμένες (ρ,θ,z) όπου:

$$\left.\begin{matrix} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{matrix}\right\} \to x^2 + y^2 = r^2$$

Έτσι:

$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{G'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)rdrd\theta dz$$

όπου G' είναι το χωρίο στο οποίο μετασχηματίζεται το χωρίο G με την αλλαγή των μεταβλητών.

Προσοχή:

Πολλαπλασιάζουμε με το r το $drd\theta dz$.

4.20 ΤΡΙΠΛΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ-ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Κάποιες φορές ένα τριπλό ολοκλήρωμα υπολογίζεται πιο εύκολα αν αντί για καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) χρησιμοποιήσουμε σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, φ) όπου:

$$\left.\begin{array}{c} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{array}\right\} \left.\begin{array}{c} r \geq 0 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \end{array}\right\}$$

έτσι:

$$\iiint_G f(x, y, z)dxdydz = \iiint_{G'} (r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)\, r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

όπου G' είναι το χωρίο στο οποίο μετασχηματίζεται το χωρίο G με την αλλαγή των μεταβλητών.

Προσοχή:

Πολλαπλασιάζουμε με το $r^2\sin\varphi$.

4.21 ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού δηλώνει ότι η ολοκλήρωση και η παραγώγιση είναι αντίστροφες πράξεις.

Έστω f μια πραγματική συνεχής συνάρτηση που ορίζεται σε κλειστό διάστημα, $f : [a, b] \to R$. Η συνάρτηση $F : [a, b] \to R$ με

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Είναι συνεχής και ισχύει

$$F'(x) = f(x)\ \textit{για κάθε}\ x \in [a, b]$$

Η F ονομάζεται αρχική ή αντιπαράγωγος της f.

Έστω f μια πραγματική συνεχής συνάρτηση που ορίζεται σε κλειστό διάστημα, $f : [a, b] \to R$ και η F η αρχική της f. Τότε ισχύει:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

4.22 ΠΡΩΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Ορισμός 4.22.1.: Έστω $f(x)$ είναι συνεχής στο $[a, +\infty]$. Τότε το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ορίζεται σαν το όριο $\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a)$.

Ανάλογα έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

Σχόλια: Αν τα παραπάνω όρια είναι ίσα με ένα πραγματικό αριθμό τότε το αντίστοιχο ολοκλήρωμα συγκλίνει, διαφορετικά αποκλίνει.

4.23 ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΤΥΠΟΥ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Ορισμός 4.23.1.: Έστω $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και [1] $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ ή και [2] $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$. Τότε το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)dx$ ορίζεται σαν όριο

- $\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx = F(b) - \lim_{x\to a^+} F(x)$ αν ισχύει η [1]

- $\lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx = \lim_{x\to b^-} F(x) - F(a)$ αν ισχύει η [2].

Σχόλια (1): Ανάλογα μπορούμε να ορίσουμε και συνδυασμούς Α και Β τύπου γενικευμένα ολοκληρώματα,

Σχόλια (2): Αν η συνάρτηση f είναι ασυνεχής σε ένα σημείο $x_0 \in (a, b)$ τότε:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^b f(x)dx.$$

4.24 ΕΛΕΓΧΟΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

Θεώρημα 4.24.1.: αν $f(x)$ και $g(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha, +\infty)$ και $0 \leq f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \geq a$ τότε

(1) αν $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει τότε και το $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ συγκλίνει,

(2) αν $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ αποκλίνει τότε και το $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ αποκλίνει.

Σχόλια: Το παραπάνω θεώρημα μπορεί να γενικευτεί για όλα τα γενικευμένα ολοκληρώματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{Ο}

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

5.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

Η οικονομία (η λέξη προέρχεται από την αρχαία ελληνική << οικονομία>>, διαχείριση της οικίας , δηλαδή του νοικοκυριού) μπορεί να οριστεί επίσημα και γενικά ως το σύνολο των συνειδητών και συστηματικών ενεργειών των ανθρώπων, που διαβιούν σε κοινωνία, και περιλαμβάνει την παραγωγή, διανομή, ανταλλαγή και την κατανάλωση αγαθών και υπηρεσιών.

Ωστόσο, η λέξη αυτή έχει βέβαια πολλές σημασίες. Στην καθημερινή μας ζωή μπορεί να σημαίνει πολύ απλά από την εξοικονόμηση χρημάτων, μέχρι και τη γενικότερη κατάσταση ενός κράτους ή και του πλανήτη ολόκληρου. Η επιστημονική της έννοια όμως, αντιστοιχεί στον παραπάνω ορισμό. Σύμφωνα με αυτόν, η οικονομία στηρίζεται σε οικονομικές θεωρίες και τρόπους διαχείρισης για την εφαρμογή τους. Η χρήση του όρου << οικονομία >>, μόνο με την έννοια της πολιτικής οικονομίας, ήταν δημοφιλής από τέτοιους νεοκλασικούς οικονομολόγους, όπως ο Alfred Marshall. Η λέξη οικονομία έγινε έτσι δηλαδή, συνοπτικά συνώνυμη, με την έννοια της << οικονομικής επιστήμης >> και μπορεί να θεωρηθεί ότι μπορεί να υποκαταστήσει τον όρο << πολιτική οικονομία >>. Αυτό αντιστοιχεί στη σημαντική (πλέον) επιρροή των μαθηματικών μεθόδων που καθιερώθηκαν πλέον να χρησιμοποιούνται ευρύτερα στην επιστήμη.

Ο όρος <<οικονομία>> μπορεί, λοιπόν, να αναφέρεται επίσης στην κατάσταση μιας χώρας ή μιας περιοχής (στενότερης ή ευρύτερης από χώρα), δηλαδή η θέση της (σε σχέση με τους οικονομικούς κύκλους) μπορεί να είναι κυκλική ή δομική. Με την έννοια αυτή, η οικονομία αποτελεί ένα βασικό μετρήσιμο μέγεθος και σύνολο μετρήσιμων μεγεθών για ένα σύστημα ή καθεστώς, που επικρατεί στη χώρα ή την περιοχή στην οποία αναφέρεται. Με την άλλη έννοια, της οικονομίας, δηλαδή την εξοικονόμηση χρημάτων, ή καλύτερα, της περιστολής δαπανών, η οικονομία μπορεί πράγματι να είναι το αποτέλεσμα μιας εσωτερικής πιο αποτελεσματικής οργάνωσης, που συχνά ονομάζεται <<εσωτερική οικονομία>>. Η μείωση του μέσου κόστους που οφείλεται στην αύξηση μεγέθους μιας εταιρίας είναι μια οικονομία κλίμακας, όπως λέγεται. Η οικονομία, όμως, μπορεί να προκύψει από ένα φαινόμενο έξω από τον παράγοντα λήψης αποφάσεων. Αυτό ονομάζεται <<εξωτερική οικονομία>> και μπορεί να είναι θετική, ουδέτερη ή αρνητική, ως προς το αποτέλεσμα της μεταβολής που επιφέρει.

Η οικονομία, με τη σύγχρονη έννοια του όρου, άρχισε να αναδύεται από τις απλές εμπορικές πρακτικές και αναπτύσσεται από τον Άνταμ Σμιθ (Adam Smith) σε σημαντικό αναλυτικό σώμα, που χωρίζεται γενικά σε δύο κύριους κλάδους : τη μικροοικονομία, ή τη μελέτη της ατομικής οικονομικής συμπεριφοράς και μακροοικονομία, όπως αναδύθηκαν στην περίοδο του μεσοπολέμου. Σήμερα, η οικονομία εφαρμόζει αυτήν την ανάλυση (και την εξέλιξή της) για τη διαχείριση πολλών ανθρώπινων οργανώσεων, που περιλαμβάνουν κυβερνήσεις , ιδιωτικές εταιρίες, συνεταιρισμούς, κ.α.. Μερικές περιοχές εφαρμογής της οικονομικής θεωρίας περιλαμβάνουν και επηρεάζουν, για παράδειγμα, το διεθνή χρηματοοικονομικό τομέα, την εθνική ανάπτυξη, το περιβάλλον, την αγορά εργασίας, τον πολιτισμό, τη γεωργία, κ.τ.λ..

Μια οικονομία αποτελείται από το οικονομικό σύστημα μιας χώρας ή άλλης μονάδας της ανθρώπινης κοινωνίας. Περιλαμβάνει το εργατικό δυναμικό, το κεφάλαιο, τους φυσικούς πόρους, την παραγωγή, το εμπόριο, τη διανομή και την κατανάλωση αγαθών και υπηρεσιών στην περιοχή που η ανθρώπινη κοινωνία δραστηριοποιείται. Αυτοί οι παράγοντες δίνουν το πλαίσιο, το περιεχόμενο, και καθορίζουν τους όρους και τις παραμέτρους με τις οποίες η οικονομία λειτουργεί.

5.2 ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Σαν επιστημονικό πεδίο η οικονομία ασχολείται με τη βέλτιστη κατανομή περιορισμένων πόρων. Τα σύγχρονα οικονομικά χωρίζονται βασικά σε Μικροοικονομικά, Μακροοικονομικά και Οικονομετρία. Πιο πρόσφατος κλάδος είναι τα Πειραματικά Οικονομικά/Οικονομικά της συμπεριφοράς που ξεκίνησαν από τα Μικροοικονομικά αλλά χρησιμοποιούν ευρέως μεθόδους της Οικονομετρίας και πρόσφατα χρησιμοποιούνται και στα Μακροοικονομικά.

Τα οικονομικά και οι παράπλευροι κλάδοι που τα ακολουθούν (παραδείγματος χάριν Χρηματοοικονομικά, Διοίκηση Επιχειρήσεων, Οικονομικά της Υγείας, Πολιτική Οικονομία, Οικονομικά της Δημόσιας Επιλογής και ακόμη Μαθηματικά Οικονομικά) ασχολούνται γενικά μπορούμε να πούμε με τις οικονομικές κρατών, επιχειρήσεων και ανθρώπων.

Μια βασική αρχή που διδάσκεται σε όλες τις κοινωνικές επιστήμες και αποτελεί επιτομή για την οικονομία, είναι ότι καθορίζει με τον έναν ή τον άλλο τρόπο τη ζωή μας. Αυτό αποτελεί καθημερινή διαπίστωση και κοινή λογική καθώς από τα οικονομικά που διδάσκονται στα πανεπιστήμια μέχρι τα οικονομικά μιας απλής νοικοκυράς υπάρχει μια αλληλένδετη σχέση.

5.3 ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ ΤΟΥ ΚΡΑΤΟΥΣ

Πολλές φορές η οικονομία αναφέρεται στην οικονομία του κράτους. Με άλλα λόγια την οικονομική κατάσταση που βρίσκεται το κράτος. Αφιερώνουν όλοι το χρόνο τους σε αυτό το θέμα γιατί απλούστατα όλοι συνεισφέρουν στην οικονομία του κράτους με τον έναν ή με τον άλλο τρόπο. Αυτό κάνει όλους τους ανθρώπους μέρος του οικονομικού συστήματος που λειτουργεί αέναα και με έναν κυκλικό και επαναλαμβανόμενο τρόπο. Τα αγαθά μετατρέπονται σε χρήματα και με τα χρήματα αγοράζονται τα αγαθά. Το ίδιο ισχύει και με την παροχή υπηρεσιών. Στην ουσία παρατηρούμε μια ανταλλακτική μέθοδο συναλλαγών. Το οικονομικό σύστημα ωστόσο διαθέτει πλήθος τόσο δύσκολων όσο και περίπλοκων μηχανισμών όσον αφορά τη δραστηριότητα του που το καθιστά πολύ ευαίσθητο στην οποιαδήποτε μεταβολή.

5.4 ΔΙΕΘΝΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

Η Διεθνής Οικονομική είναι ιδιαίτερος κλάδος της ευρύτερης Οικονομίας και ειδικότερα του Διεθνούς Δικαίου, που αναπτύσσεται κυρίως σε διεθνής οικονομικές συναλλαγές και διεργασίες μεταξύ εμπόρων, χωρών και διεθνών θεσμικών οργάνων. Στα αντικείμενα συναλλαγών και διεργασιών αυτής περιλαμβάνονται πάσης φύσεως διεθνής εμπορικές συναλλαγές, επενδύσεις καθώς επίσης και θέματα μετανάστευσης όπως ορίζονται μέσα από διεθνής συνθήκες και συμβάσεις. Από τη στιγμή που υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ των κρατών, ανταλλαγή αγαθών και υπηρεσιών ισχύει και η έννοια της διεθνούς οικονομίας. Οι κανόνες της ελεύθερης αγοράς των ελεύθερα διακινούμενων προϊόντων στην

Ευρωπαϊκή Ένωση αλλά και οι εξαγωγικές σχέσεις που επικρατούν ανά την υφήλιο καθιστούν την οικονομία διεθνή παράγοντα στις σχέσεις μεταξύ κρατών. Επιπλέον η άμεση επίδραση στις οικονομίες των κρατών επέρχεται από το γεγονός της ύπαρξης των διαφόρων νομισμάτων των χωρών ανά τον κόσμο. Το γεγονός και μόνο ότι εμπορεύονται νομίσματα και επηρεάζονται οι αξίες των εξαγόμενων αγαθών επιδρά άμεσα στις οικονομίες των κρατών. Για να δώσουμε ένα παράδειγμα στην κατανόηση αυτού του μηχανισμού μπορούμε να συγκρίνουμε την εξαγωγική ικανότητα των Η.Π.Α. όταν το δολάριο είναι ασθενές έναντι του Ευρώ και όταν είναι ισχυρό. Ένα ασθενές δολάριο κάνει τα εξαγόμενα προϊόντα πιο πολύ ελκυστικά ενώ ένα ισχυρό δολάριο αποθαρρύνει τις εξαγωγές και συνεπώς αυξάνει τις εισαγωγές.

5.5 ΠΑΓΚΟΣΜΙΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

Μέσα από τη νέα εποχή της παγκοσμιοποίησης η οικονομία έχει αλλάξει πρόσωπο και έχει περιέλθει σε ένα πιο διευρυμένο πεδίο δράσης. Οι εξαγωγές και οι εισαγωγές, τα χρηματιστήρια, οι αλληλεπιδράσεις των νομισμάτων και πολλά άλλα πεδία της οικονομίας επηρεάζονται πλέον όχι μόνο από τις τοπικές αγορές αλλά και από τις παγκόσμιες. Αυτό έχει σαν συνέπεια να δημιουργούνται πολυεθνικές εταιρίες που δραστηριοποιούνται σε πολλά κράτη συγχρόνως.

Οι απόψεις για το κατά πόσο ωφελήθηκε η παγκόσμια οικονομία από τις τελευταίες αλλαγές διίστανται. Πολλοί εκφέρουν τη γνώμη ότι πλέον οι αγορές έχουν γίνει αλληλοεξαρτώμενες και μια πιθανή κατάρρευση μιας εκ των μεγάλων οικονομιών μπορεί να συμπαρασύρει και τις υπόλοιπες και έτσι να έχουμε αλυσιδωτές αντιδράσεις και ραγδαία κατάρρευση όλων των οικονομιών του πλανήτη.

5.6 ΠΑΡΑΓΩΓΙΚΟΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

Παραγωγικοί συντελεστές είναι όλοι οι πόροι (φυσικοί και ανθρώπινοι) που χρησιμοποιούνται για την παραγωγή προϊόντων και υπηρεσιών. Πιο συγκεκριμένα οι παραγωγικοί συντελεστές είναι η εργασία, η γη, το κεφάλαιο, η επιχειρηματικότητα. Το χαρακτηριστικό στοιχείο των παραγωγικών συντελεστών είναι ότι για κάθε χρονική περίοδο και για κάθε οικονομία θεωρούνται δεδομένοι. Φυσικά σε μακροχρόνιες περιόδους το μέγεθος τους μετατρέπεται, αλλά βραχυχρόνια μπορεί να θεωρηθούν δεδομένοι, συνεπώς και τα προϊόντα που μπορούν να παραχθούν με τους συντελεστές αυτούς είναι και αυτά δεδομένα.

Ας δούμε αναλυτικά τους παραγωγικούς συντελεστές:

(1) Εργασία: η εργασία περιλαμβάνει όλες τις ανθρώπινες προσπάθειες, πνευματικές και σωματικές, που καταβάλλονται για την παραγωγή αγαθών και υπηρεσιών καθώς και για τη μεταφορά τους, το εμπόριο του κ.α. Για να θεωρηθεί η καταβολή προσπάθειας ως εργασία, πρέπει να αποβλέπει κυρίως στην παραγωγή οικονομικών αγαθών ή υπηρεσιών και όχι μόνο στην ψυχική ικανοποίηση εκείνου που την καταβάλλει. Για παράδειγμα, ο επαγγελματίας μπασκετμπολίστας εργάζεται όταν παίζει μπάσκετ στο παρκέ ενώ το παιδί που παίζει μπάσκετ με τους φίλους του δεν εργάζεται, απλά ψυχαγωγείται. Η εργασία είναι πρωτογενής συντελεστής παραγωγής. Χωρίς εργασία τίποτα δεν μπορεί να παραχθεί από οικονομικής άποψης, γιατί ακόμη και τα αυτοφυή προϊόντα της γης είναι αναγκαίο να συλλεχθούν προκειμένου να μετατραπούν σε οικονομικά αγαθά. Ας μην ξεχνάμε ότι τα αγαθά της γης χρειάζονται μεγάλη περιποίηση και διάφορες αγροτικές ενέργειες για να γίνουν ένα τελειοποιημένο αγαθό.

(2) Γη: η γη είναι και αυτή πρωτογενής συντελεστής παραγωγής και περιλαμβάνει όλα τα στοιχεία που χαρίζει η φύση, δηλαδή το έδαφος, το υπέδαφος, τις λίμνες, τα ποτάμια, τη θάλασσα, την ατμόσφαιρα, τα ορυκτά, τα δάση, τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην καλλιέργεια, στο ψάρεμα, στην παραγωγή αγαθών και υπηρεσιών, στις μεταφορές, στις επικοινωνίες και σε όλους τους άλλους οικονομικούς σκοπούς. Οι φυσικού πόροι χωρίζονται σε ανανεώσιμους όπως (τα δάση) και σε μη ανανεώσιμους όπως (τα ορυκτά).

(3) Κεφάλαιο: τα παραγόμενα αγαθά που δεν ικανοποιούν τις οικονομικές ανάγκες άμεσα αλλά συντελούν στην καλύτερη ικανοποίηση τους στο μέλλον αποτελούν το συντελεστή κεφάλαιο. Η σύγχρονη ανεπτυγμένη οικονομία βασίζεται στη χρησιμοποίηση υπέρογκων ποσοτήτων κεφαλαίου: κτιρίων, μηχανημάτων, επίπλων και λοιπού εξοπλισμού, μεταφορικών μέσων, αποθεμάτων πρώτων υλών, ημικατεργασμένων προϊόντων. Το κεφάλαιο δεν είναι πρωτογενής αλλά παράγωγος συντελεστής, δηλαδή συντελεστής που έχει ο ίδιος παραχθεί. Η δημιουργία υλικού κεφαλαίου συνεπάγεται μείωση της χρησιμοποίησης παραγωγικών συντελεστών για παραγωγή αγαθών και υπηρεσιών για άμεση τελική κατανάλωση, ώστε να παραχθούν προϊόντα που θα συμβάλλουν στην αύξηση της μελλοντικής παραγωγής.

(4) Επιχειρηματικότητα: ονομάζεται η ανθρώπινη ικανότητα συνδυασμού των τριών άλλων παραγωγικών συντελεστών, εργασίας, γης και κεφαλαίου, για την παραγωγή αγαθών και υπηρεσιών. Ο επιχειρηματίας είναι αυτός που λαμβάνει τις πιο βασικές και σημαντικές αποφάσεις για την επιχείρησης και ευθύνεται για τους οικονομικούς κινδύνους, το λεγόμενο επιχειρηματικό ρίσκο, που συνεπάγεται η λειτουργία της. Μερικοί οικονομολόγοι όμως ισχυρίζονται ότι η επιχειρηματικότητα είναι ένα είδος εργασίας, άρα συμπεριλαμβάνεται στον ορισμό του πρώτου παραγωγικού συντελεστή.

5.7 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΗΣ

Γενικά για τον ακριβή καθορισμό της οικονομικής έννοιας της επιχείρησης οι απόψεις των οικονομολόγων μάλλον έρχονται σε αντιπαράθεση. Σαν κύριο χαρακτηριστικό γνώρισμα μιας επιχείρησης άλλοι προτείνουν τη συγκέντρωση των παραγωγικών μέσων και την τεχνο-παραγωγική διαρρύθμιση αυτών, άλλοι την αναδοχή του κινδύνου. Άλλοι το μέγεθος και την έκταση των εργασιών, άλλοι το οικονομικό κίνητρο, ενώ κάποιοι άλλοι ακόμη, προσθέτουν ως απαραίτητους όρους την παραγωγή για άγνωστους καταναλωτές και την αυτοτέλειά της. Συνοψίζοντας τα παραπάνω ορίζουμε ότι, επιχείρηση χαρακτηρίζεται η ποριστική οικονομική μονάδα που αποτελεί αυτοτελή και υπεύθυνη οργάνωση παραγωγικών συντελεστών και διαχείρισης συναλλαγών με τις οποίες και επιδιώκει το μέγιστο δυνατό κέρδος. Το δε κέρδος κατά κανόνα θα πρέπει να υπερβαίνει την αντίστοιχη συνήθη αμοιβή (ως αντιμισθία) της διοικητικής ή εκτελεστικής εργασίας που επιτελείται σε αυτήν. Έτσι με τον παραπάνω ορισμό δίδεται σαφώς ως κύριο κριτήριο το κέρδος, δια του οποίου και ξεχωρίζει από κάποια άλλη οικονομική μονάδα, αφού όλα τα άλλα προαναφερόμενα χαρακτηριστικά είναι κοινά και αφηρημένα, με συνέπεια να μην λαμβάνονται ως κριτήρια διάκρισης μεταξύ των δύο εννοιών. Οι επιχειρήσεις με βάση το μέγεθος διακρίνονται σε μικρές, μεσαίες, μεγάλες και κολοσσούς. Με βάση το αντικείμενο των εργασιών τους σε επιχειρήσεις πρωτογενούς , δευτερογενούς, τριτογενούς παραγωγής, μεταποιητικές ή μετασχηματισμού (βιομηχανίες, βιοτεχνίες), γενικού εμπορίου (εμπορικές), ασφαλιστικές, επιχειρήσεις παροχής υπηρεσιών, τραπεζικές και εταιρείες μεταφορών οι οποίες διακρίνονται σε χερσαίες, θαλάσσιες και εναέριες. Με βάση τον φορέα όπου διακρίνονται σε ιδιωτικές, δημόσιες, δημοτικές και κοινοτικές και μικτές. Επίσης ως προς το σκοπό τους χωρίζονται σε κερδοσκοπικές και μη κερδοσκοπικές. Τέλος με κριτήριο με τη νομική τους μορφή εντάσσονται σε τρεις βασικές κατηγορίες, αυτές είναι:

1) Οι ατομικές,

2) Οι εταιρικές και οι

3) συλλογικές επιχειρήσεις.

Οι εταιρικές επιχειρήσεις χωρίζονται σε προσωπικές εταιρίες και σε εταιρείες κεφαλαίου. Οι προσωπικές εταιρείες διακρίνονται σε:

- Ομόρρυθμες,
- Ετερόρρυθμες,
- Εταιρείες συμπλοιοκτησίας,
- Συμμετοχικές η Αφανείς,
- Συνεταιρισμοί.

Στις εταιρείες κεφαλαίου (κεφαλαιουχικές) ανήκουν οι εξής μορφές εταιρείας:

- Ανώνυμη εταιρεία,
- Εταιρείες Περιορισμένης Ευθύνης (Ε.Π.Ε),
- Ανώνυμη Ναυτιλιακή Εταιρεία.

5.8 Η ΖΗΤΗΣΗ ΚΑΙ ΟΙ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΚΟΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΤΗΣ ΑΤΟΜΙΚΗΣ ΖΗΤΗΣΗΣ

Θα ξεκινήσουμε τη μελέτη των αγορών εξετάζοντας τη συμπεριφορά των καταναλωτών. Εδώ θα δούμε τι καθορίζει τη ζητούμενη ποσότητα ενός αγαθού, που είναι η ποσότητα του αγαθού την οποία οι καταναλωτές θέλουν και μπορούν να αγοράσουν. Για να είναι η σκέψη μας εστιασμένη, ας αναφερθούμε σε ένα συγκεκριμένο αγαθό, ένα παγωτό <<χωνάκι>>.

Ας εξετάσουμε τη δική σας ζήτηση για παγωτό <<χωνάκι>>. Πως αποφασίζετε εσείς πόσα παγωτά <<χωνάκι>> θα αγοράσετε κάθε μήνα; Σας παρουσιάζουμε κάποιες από τις απαντήσεις που θα μπορούσατε να δώσετε.

Τιμή: Αν η τιμή του παγωτού <<χωνάκι>> αυξηθεί 3 ευρώ το ένα, θα αγοράζετε λιγότερο παγωτό. Θα προτιμάτε, τότε, να αγοράζετε παγωμένο γιαούρτι. Αν, αντίθετα, η τιμή του παγωτού <χωνάκι>> μειωθεί κατά 0,50 λεπτά το ένα, θα αγοράζετε περισσότερο παγωτό. Επειδή η ζητούμενη ποσότητα μειώνεται όταν ανεβαίνει η τιμή του και αυξάνεται όταν η τιμή του μειώνεται, θα πούμε ότι η ζητούμενη ποσότητα συνδέεται αρνητικά με την τιμή. Η σχέση αυτή μεταξύ τιμής και ζητούμενης ποσότητας ισχύει, πράγματι, για τα περισσότερα αγαθά στην οικονομία και είναι τόσο γενική που οι οικονομολόγοι την ονομάζουν νόμο της ζήτησης. Υπό την προϋπόθεση ότι οι λοιποί παράγοντες μένουν αμετάβλητοι, όταν αυξάνεται η τιμή ενός αγαθού, η ζητούμενη ποσότητα του μειώνεται.

Τι θα συμβεί στην ατομική σας ζήτηση για παγωτό αν χάσετε τη δουλειά σας κάποιο καλοκαίρι; Το πιθανότερο είναι η ζήτηση σας θα μειωθεί. Χαμηλότερο εισόδημα σημαίνει ότι έχετε λιγότερα χρήματα να ξοδέψετε συνολικά, και επομένως θα αναγκαστείτε να δαπανήσετε λιγότερα σε κάποιο, τουλάχιστον, αγαθό και κατά πάσα πιθανότητα στα πιο πολλά αγαθά. Αν η ζήτησή σας για ένα αγαθό μειώνεται όταν μειώνεται το εισόδημα, το αγαθό αυτό ονομάζεται κανονικό αγαθό (normal good). Επίσης τα κανονικά αγαθά έχουν εισοδηματική ελαστικότητα ζήτησης μεγαλύτερη από τη μονάδα. Αυτά τα αγαθά είναι συνήθως αγαθά τα οποία οι καταναλωτές δεν αγοράζουν καθημερινά, αλλά μάλλον περιστασιακά, δίνοντας ένα σχετικά μεγάλο ποσοστό του εισοδήματος τους (είδη με υψηλή τιμή). Μερικά από αυτά είναι οι οικιακές συσκευές, τα έπιπλα, τα αυτοκίνητα, οι μηχανές του δρόμου, τα κινητά τηλέφωνα, τα προϊόντα υγιεινής διατροφή, οι ιατρικές θεραπείες κ.α.

Δεν είναι, όμως, όλα τα αγαθά κανονικά. Αν αυξηθεί η ζήτηση για ένα αγαθό όταν μειωθεί το εισόδημα σας, το αγαθό αυτό λέγεται κατώτερο αγαθό (inferior good).Τα κατώτερα αγαθά έχουν εισοδηματική ελαστικότητα μικρότερη από τη μονάδα. Κατώτερα αγαθά είναι εκείνα που αγοράζονται συνήθως από χαμηλές εισοδηματικές τάξεις. Τα μεταχειρισμένα αυτοκίνητα, οι μηχανές και τα είδη που δε διαθέτουν περιττές πολυτέλειες είναι τα κατώτερα αγαθά. Ένα παράδειγμα κατώτερο αγαθού θα μπορούσε να είναι οι διαδρομές του λεωφορείου. Όταν το εισόδημα σας μειώνεται, είναι λιγότερο πιθανόν να αγοράσετε ιδιωτικό αυτοκίνητο και περισσότερο πιθανό να χρησιμοποιήσετε το λεωφορείο της γραμμής.

Ουδέτερα αγαθά είναι τα αγαθά που η εισοδηματική ελαστικότητα τους είναι ίση με τη μονάδα. Η ζήτηση για ουδέτερα αγαθά μεταβάλλεται με τον ίδιο ρυθμό όπως το εισόδημα. Αν το εισόδημα αυξηθεί κατά 10%, η ζήτηση για ένα ουδέτερο αγαθό αυξάνεται ακριβώς κατά το ίδιο ποσοστό.

Ας υποθέσουμε ότι η τιμή του παγωμένου γιαουρτιού μειώνεται. Ο νόμος της ζήτησης λέει ότι θα αγοράζεται περισσότερο παγωμένο γιαούρτι. Ταυτόχρονα, θα αγοράζετε, κατά πάσα πιθανότητα, λιγότερο παγωτό. Επειδή το παγωτό και το παγωμένο γιαούρτι είναι και τα δύο παγωμένα, εύγευστα, γλυκά εδέσματα, ικανοποιούν παρόμοιες ανάγκες. Όταν η μείωση της τιμής ενός αγαθού μειώνει τη ζήτηση ενός άλλου, τα δύο αυτά αγαθά ονομάζονται υποκατάστατα (substitutes). Τα υποκατάστατα αγαθά έχουν θετική σταυροειδής ελαστικότητα. Άλλα ζεύγη υποκατάστατων αγαθών είναι, μεταξύ άλλων, τα σάντουιτς με λουκάνικο και τα χάμπουργκερ, οι μάλλινες μπλούζες και τα αθλητικά μπουφάν, το εισιτήριο του κινηματογράφου και το ενοίκιο ταινίας για το βίντεο, το ελαιόλαδο με το αραβοσιτέλαιο ή το βούτυρο, ο καφές με το τσάι, οι λουκουμάδες και τα κρουασάν, το στυλό και τα μολύβια, τα μήλα και τα πορτοκάλια.

Ας υποθέσουμε ότι η τιμή ενός σάντουιτς με λουκάνικο μειώνεται. Σύμφωνα με το νόμο της ζήτησης, θα αγοράζετε περισσότερα σάντουιτς με λουκάνικο. Αλλά, στην περίπτωση αυτή, θα αγοράζετε και περισσότερο παγωτό, επειδή συχνά μας αρέσει μετά από ένα σάντουιτς με λουκάνικο να τρώμε και λίγο παγωτό. Όταν η μείωση της τιμής ενός αγαθού αυξάνει τη ζήτηση ενός άλλου αγαθού, τα δύο αγαθά λέγονται συμπληρωματικά (complements). Τα συμπληρωματικά αγαθά έχουν αρνητική σταυροειδής ελαστικότητα. Άλλα ζεύγη συμπληρωματικών αγαθών είναι η βενζίνη και τα αυτοκίνητα, οι ηλεκτρονική υπολογιστές και το λογισμικό με τα υπόλοιπα εξαρτήματα του υπολογιστή που είναι απαραίτητα για τη λειτουργία του, οι χιονοδρομίες και τα εισιτήρια για τη χρήση του τελεφερίκ που οδηγεί σε χιονοδρομικές πίστες, τα αυγά και το μπέικον, ο καφές και η ζάχαρη.

Ασυσχέτιστα είναι τα αγαθά που έχουν μηδενική σταυροειδής ελαστικότητα. Για παράδειγμα, τα είδη παντοπωλείου και οι υπολογιστές. Μια αύξηση στην τιμή των υπολογιστών δε θα έχει καμία επίπτωση και επίδραση στη ζητούμενη ποσότητα των ειδών παντοπωλείου.

Προτιμήσεις, ο πιο προφανής καθοριστικός παράγοντας της ζήτησής σας είναι οι προτιμήσεις. Αν σας αρέσει το παγωτό, θα αγοράζεται πιο πολύ ποσότητα. Οι οικονομολόγοι, κατά κανόνα, δεν προσπαθούν να εξηγήσουν τις προτιμήσεις των ανθρώπων, επειδή αυτές πλάθονται από ιστορικές και ψυχολογικές δυνάμεις οι οποίες βρίσκονται έξω από το αντικείμενο της οικονομικής. Οι οικονομολόγοι, όμως, εξετάζουν τι συμβαίνει όταν οι προτιμήσεις μεταβάλλονται.

Προσδοκίες, οι προσδοκίες σας για το μέλλον μπορούν να επηρεάσουν σήμερα της ζήτησή σας για ένα αγαθό ή μια υπηρεσία. Αν, για παραδείγματος χάρη, προσδοκάτε ότι θα κερδίσετε περισσότερο εισόδημα τον επόμενο μήνα, μπορεί να χρησιμοποιήσετε μέρος από τις τρέχουσες αποταμιεύσεις σας για να αγοράσετε παγωτό. Ένα άλλο παράδειγμα: αν προσδοκάτε ότι η τιμή του παγωτού θα πέσει αύριο, πιθανόν να είστε λιγότερο πρόθυμοι να αγοράσετε παγωτό στη σημερινή τιμή του.

5.9 Ο ΠΙΝΑΚΑΣ ΖΗΤΗΣΗΣ ΚΑΙ Η ΚΑΜΠΥΛΗ ΖΗΤΗΣΗΣ

Είδαμε λοιπόν ότι υπάρχουν πολλές μεταβλητές που καθορίζουν την ποσότητα του παγωτού που επιθυμεί ένας άνθρωπος. Φανταστείτε, προς στιγμήν, ότι όλες οι άλλες μεταβλητές, εκτός της τιμής, παραμένουν σταθερές. Ας δούμε με ποιο τρόπο η τιμή θα επηρεάσει τη ζητούμενη ποσότητα.

Ο πίνακας 2.1 μας λέει ότι η Λυδία αγοράζει κάθε μήνα παγωτό σε διαφορετικές τιμές. Αν το παγωτό προσφερόταν δωρεάν, η Λυδία θα έτρωγε 20 παγωτά <<χωνάκι>>. Αν το παγωτό <<χωνάκι>> τιμάται 1,00 ευρώ, η Λυδία θα αγοράζει 15 παγωτά <<χωνάκι>>. Αν η τιμή του αρχίζει να αυξάνεται και να αυξάνεται, η Λυδία θα αρχίσει να αγοράζει όλο και λιγότερα παγωτά <<χωνάκι>>. Και όταν η τιμή θα φτάσει στα 4,00 ευρώ το παγωτό <<χωνάκι>>, θα σταματήσει τελείως να αγοράζει παγωτό.

Ο πίνακας 2.1 είναι ένας πίνακας ζήτησης (demand schedule), που δείχνει τη σχέση ανάμεσα στην τιμή ενός αγαθού και στη ζητούμενη ποσότητά του. (Οι οικονομολόγοι χρησιμοποιούν τον όρο schedule, και όχι table, επειδή ο πίνακας, με τις παράλληλες στήλες του από αριθμούς, μοιάζει με πρόγραμμα δρομολογίων τρένου).

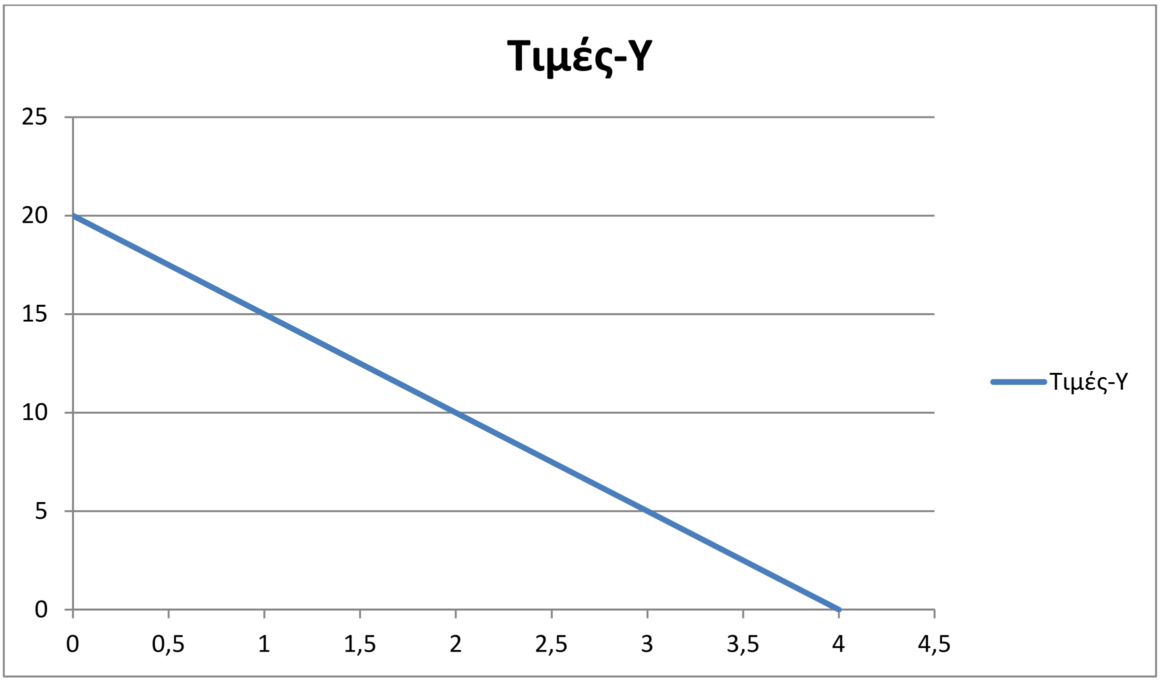
Στο σχήμα 2.1 απεικονίζονται οι αριθμοί του πίνακα. Κατά σύμβαση, η τιμή του παγωτού μετριέται στον κατακόρυφο άξονα και η ζητούμενη ποσότητα του παγωτού <<χωνάκι>> στον οριζόντιο άξονα. Η κατερχόμενη γραμμή, που συσχετίζει την τιμή με τη ζητούμενη ποσότητα, ονομάζεται καμπύλη ζήτησης.

Πίνακας 2.1

Τιμή Παγωτού <<Χωνάκι>>	Ζητούμενη Ποσότητα
0,00 ευρώ	20
1,00 ευρώ	15
2,00 ευρώ	10
3,00 ευρώ	5
4,00 ευρώ	0

Σχήμα 2.1

ΚΑΜΠΥΛΗ ΖΗΤΗΣΗΣ



Όταν βλέπετε μια καμπύλη ζήτησης, θα πρέπει να θυμάστε ότι έχει σχεδιαστεί με την υπόθεση ότι οι λοιποί παράγοντες μένουν αμετάβλητοι. Η καμπύλη ζήτησης της Λυδίας στο σχήμα 2.1, δείχνει τι συμβαίνει με την ποσότητα παγωτού <<χωνάκι>> που ζητεί η Λυδία όταν μεταβάλλεται η τιμή του. Σύραμε την καμπύλη ζήτησης αφού πρώτα υποθέσαμε ότι το εισόδημα, οι προτιμήσεις και οι προσδοκίες της Λυδίας, καθώς και οι τιμές των συνδεόμενων αγαθών παραμένουν αμετάβλητα.

Οι οικονομολόγοι χρησιμοποιούν τον όρο ceteris paribus για να δηλώσουν ότι όλες οι σχετικές μεταβλητές, εκτός από εκείνες που μελετώνται, παραμένουν αμετάβλητες. Η λατινική φράση ceteris paribus σημαίνει τα <<άλλα πράγματα παραμένουν αμετάβλητα>>. Η κλίση της καμπύλης ζήτησης είναι κατερχόμενη, επειδή, ceteris paribus, όσο χαμηλότερη είναι η τιμή ενός αγαθού τόσο περισσότερη ποσότητα του αγαθού αυτού θα ζητείται.

Μολονότι ο όρος ceteris paribus αναφέρεται σε μια υποθετική κατάσταση στην οποία ορισμένες μεταβλητές υποτίθεται ότι είναι σταθερές, στον πραγματικό κόσμο μεταβάλλονται ταυτόχρονα πολλά πράγματα. Για το λόγο αυτόν, όταν χρησιμοποιούμε τα εργαλεία της προσφοράς και της ζήτησης για να αναλύσουμε γεγονότα ή πολιτικές, είναι σημαντικό να μη λησμονούμε ποιοι παράγοντες μένουν αμετάβλητοι και ποιοι όχι.

5.10 ΑΓΟΡΑΙΑ ΖΗΤΗΣΗ ΕΝΑΝΤΙ ΑΤΟΜΙΚΗΣ ΖΗΤΗΣΗΣ

Μέχρι τώρα συζητούσαμε για τη ζήτηση που ένα άτομο παρουσιάζει για ένα προϊόν. Για να αναλύσουμε πως λειτουργούν οι αγορές, είναι ανάγκη να προσδιορίσουμε την αγοραία ζήτηση (market demand), που είναι το άθροισμα όλων των ατομικών ζητήσεων για ένα συγκεκριμένο αγαθό ή υπηρεσία.

Ο πίνακας 2.2 δείχνει τους πίνακες ζήτησης για παγωτό <<χωνάκι>> δύο ατόμων, της Λυδίας και του Κωνσταντίνου. Σε κάθε τιμή, ο πίνακας 2.2 ζήτησης της Λυδίας μας λέει πόσο παγωτό <<χωνάκι>> αγοράζει η Λυδία, και ο πίνακας 2.2 ζήτησης του Κωνσταντίνου μας λέει πόσο παγωτό <<χωνάκι>> αγοράζει ο Κωνσταντίνος. Η ζήτηση της αγοράς είναι το άθροισμα των δύο ατομικών ζητήσεων.

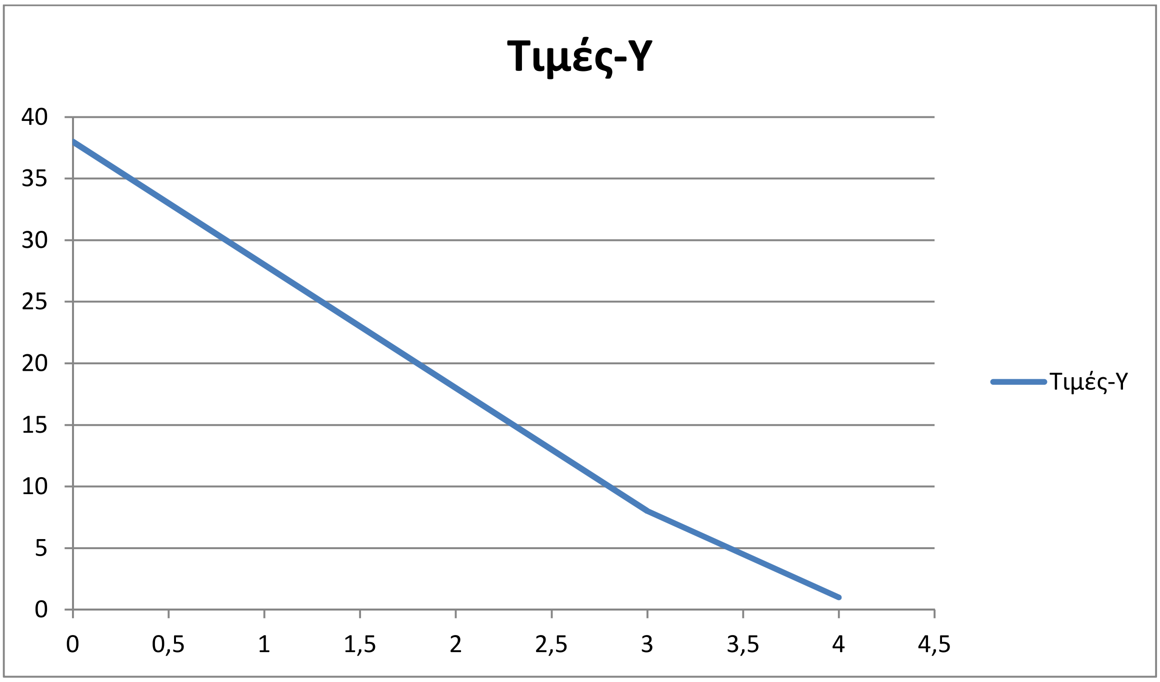
Επειδή η ζήτηση της αγοράς προκύπτει από ατομικές ζητήσεις, η ζητούμενη ποσότητα στις αγορές εξαρτάται από εκείνους τους παράγοντες που προσδιορίζουν τη ζητούμενη ποσότητα από τους ατομικούς αγοραστές. Έτσι, η ζητούμενη ποσότητα σε μια αγορά, εξαρτάται όχι μόνο από την τιμή του αγαθού, αλλά και από τα εισοδήματα των αγοραστών, τις προτιμήσεις και τις προσδοκίες τους, αλλά και από τα συνδεόμενα αγαθά. Εξαρτάται, επίσης, από τον αριθμό των αγοραστών. (Αν εκτός της Λυδίας και του Κωνσταντίνου υπήρχαν και άλλοι καταναλωτές παγωτού, η ζητούμενη ποσότητα θα ήταν μεγαλύτερη για κάθε τιμή). Ο πίνακας της ζήτησης, στον πίνακα 2.2 , μας λέει τι συμβαίνει με τη ζητούμενη ποσότητα όταν αλλάζουν οι τιμές, ενώ οι υπόλοιποι παράγοντες, που καθορίζουν τη ζητούμενη ποσότητα, μένουν σταθεροί.

Πίνακας 2.2

Τιμή Παγωτού <<Χωνάκι>>	Λυδία	Κωνσταντίνος	Αγορά
0,00 ευρώ	20	18	38
1,00 ευρώ	15	13	28
2,00 ευρώ	10	8	18
3,00 ευρώ	5	3	8
4,00 ευρώ	0	1	1

Σχήμα 2.2

ΑΓΟΡΑΙΑ ΚΑΜΠΥΛΗ ΖΗΤΗΣΗΣ



Το σχήμα 2.2 δείχνει τις καμπύλες ζήτησης που αντιστοιχούν σε αυτούς τους πίνακες ζήτησης. Σημειώστε ότι αθροίζουμε τις ατομικές καμπύλες ζήτησης οριζόντια για να πάρουμε την καμπύλη ζήτησης της αγοράς ή την αγοραία καμπύλη ζήτησης. Δηλαδή, για να βρούμε τη συνολική ζητούμενη ποσότητα σε κάθε τιμή, προσθέτουμε τις ατομικές ποσότητες που βρίσκουμε στον οριζόντιο άξονα των ατομικών καμπυλών ζήτησης. Δεδομένου ότι το ενδιαφέρον μας εστιάζεται στο πως λειτουργούν οι αγορές, θα εργαζόμαστε συχνά με την καμπύλη ζήτησης της αγοράς. Η αγοραία καμπύλη ζήτησης δείχνει πως μεταβάλλεται η συνολικά ζητούμενη ποσότητα από ένα αγαθό, όταν μεταβάλλεται η τιμή του αγαθού.

Ας υποθέσουμε ότι η Αμερικάνικη Ιατρική Εταιρεία ανακοινώνει ξαφνικά μια νέα ανακάλυψη, ότι οι άνθρωποι που καταναλώνουν πολύ παγωτό ζουν περισσότερα χρόνια και με περισσότερη ευεξία. Η ανακάλυψη αυτή επηρεάζει πολύ την αγορά του παγωτού. Μεταβάλλει τις προτιμήσεις των ανθρώπων και αυξάνει τη ζήτηση του παγωτού. Σε κάθε τιμή, οι καταναλωτές θέλουν τώρα να αγοράζουν περισσότερη ποσότητα παγωτού, και η καμπύλη ζήτησης παγωτού μετατοπίζεται προς τα δεξιά.

Κάθε φορά που ένας προσδιοριστικός παράγοντας της ζήτησης μεταβάλλεται, εκτός της τιμής, η καμπύλη ζήτησης μετατοπίζεται. Κάθε μεταβολή που αυξάνει τη ζητούμενη ποσότητα σε κάθε τιμή, μετατοπίζει την καμπύλη ζήτησης προς τα δεξιά. Ομοίως, κάθε μεταβολή που μειώνει τη ζητούμενη ποσότητα σε κάθε τιμή, μετατοπίζει την καμπύλη ζήτησης προς τα αριστερά. Γενικά, η καμπύλη ζήτησης δείχνει τι συμβαίνει στη ζητούμενη ποσότητα ενός αγαθού, όταν η τιμή του αλλάζει, ενώ παραμένουν σταθεροί οι άλλοι προσδιοριστικοί παράγοντες της ζήτησης. Όταν ένας από αυτούς τους άλλους προσδιοριστικούς παράγοντες της μεταβάλλεται, η καμπύλη ζήτησης μετατοπίζεται.

5.11 ΠΡΟΣΦΟΡΑ ΚΑΙ ΟΙ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΚΟΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΤΗΣ

Θα δώσουμε έμφαση τώρα στην άλλη πλευρά της αγοράς για να εξετάσουμε τη συμπεριφορά των πωλητών. Η προσφερόμενη ποσότητα κάθε αγαθού ή υπηρεσίας είναι η ποσότητα που οι πωλητές είναι διατεθειμένοι και ικανοί να βγάλουν προς πώληση στην αγορά. Και πάλι, για να είναι η σκέψη μας εστιασμένη, ας εξετάσουμε την αγορά παγωτού και ας δούμε τους παράγοντες που ορίζουν την προσφερόμενη ποσότητα.

Ας υποθέσουμε ότι ο Κύριος Παναγιώτης είναι διευθυντής της εταιρείας παγωτού, της Algida. Τι προσδιορίζει την ποσότητα του παγωτού που είναι σε θέση να παράγει και να προσφέρει προς πώληση; Εδώ παραθέτουμε μερικές πιθανές απαντήσεις:

Η τιμή ενός αγαθού είναι ένας προσδιοριστικός παράγοντας της προσφερόμενης ποσότητας. Όταν η τιμή του παγωτού είναι υψηλή, το να πωλεί κανείς παγωτό είναι επικερδής δουλειά, και έτσι η προσφερόμενη ποσότητα θα είναι ικανοποιητικά μεγάλη. Ως πωλητής παγωτού, εργάζεται κανείς πολλές ώρες, αγοράζει πολλές μηχανές παγωτού και απασχολεί πολλούς εργάτες. Αντίθετα, όταν η τιμή του παγωτού είναι χαμηλή, η δουλειά θα είναι λιγότερο επικερδής και θα παράγεται λιγότερο παγωτό. Και σε κάποια ακόμη χαμηλότερη τιμή, μπορεί να αποφασίσει κάποιος πωλητής να κλείσει την επιχείρηση λόγω πιθανής ζημιάς ή ακόμα και λόγω κέρδους ίσου με το κόστος. Το κλείσιμο της επιχείρησης σημαίνει μηδενική προσφερόμενη ποσότητα.

Για το λόγω του ότι η προσφερόμενη ποσότητα αυξάνεται όταν οι τιμές ανέρχονται και μειώνεται καθώς μειώνονται οι τιμές, λέμε ότι η προσφερόμενη ποσότητα συνδέεται θετικά με την τιμή του αγαθού. Η σχέση αυτή μεταξύ τιμής και προσφερόμενης ποσότητα ονομάζεται νόμος της προσφοράς. Υπό την προϋπόθεση ότι οι λοιποί παράγοντες μένουν αμετάβλητοι, όταν η τιμή του αγαθού ανεβαίνει, αυξάνεται και η προσφερόμενη ποσότητά του.

Για να παράγει παγωτό η Algida πρέπει να χρησιμοποιήσει διάφορες εισροές όπως: κρέμα, ζάχαρη, μηχανές παγωτού, τα κτήρια όπου παρασκευάζεται το παγωτό και τους εργάτες, οι οποίοι αναμιγνύουν τα υλικά και λειτουργούν τις μηχανές. Όταν η τιμή μιας ή περισσοτέρων από τις εισροές αυτές αυξηθεί, η παραγωγή του παγωτού γίνεται λιγότερο επικερδής και η επιχείρηση θα προσφέρει λιγότερο παγωτό. Αν οι τιμές των εισροών αυξηθούν σημαντικά, ίσως κριθεί προτιμότερο να διακόψει τη δραστηριότητά της η επιχείρηση και να σταματήσει η προσφορά του παγωτού. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα, η προσφερόμενη ποσότητα ενός αγαθού ή προϊόντος να συνδέεται αρνητικά με την τιμή των εισροών που είναι αναγκαίες για την παραγωγή του αγαθού.

Η τεχνολογία μετατροπής των εισροών σε παγωτό είναι απλώς ένας ακόμη παράγοντας που προσδιορίζει την προσφερόμενη ποσότητα. Η εφεύρεση και κατασκευή αυτοματοποιημένων μηχανών παραγωγής παγωτού μειώνει την ποσότητα της αναγκαίας εργασίας για την Παρασκευή παγωτού. Έτσι μειώνονται τα εργατικά χέρια, αντικαθιστώνται με τις εξελιγμένες μηχανές με αποτέλεσμα να μειώνεται το κόστος παραγωγής. Συμπερασματικά, φαίνεται η τεχνολογία ελαχιστοποιεί σε μεγάλο βαθμό το κόστος παραγωγής και έτσι αυξάνεται η προσφερόμενη ποσότητα παγωτού.

Η ποσότητα του παγωτού που προσφέρεται σήμερα μπορεί να εξαρτάται και από τις μελλοντικές προσδοκίες. Αν αναμένεται κάτι, παραδείγματος χάριν όταν η τιμή του παγωτού αυξηθεί στο μέλλον , μπορεί να αποθηκεύσει κάποιος, μέρος της σημερινής παραγωγής σε καταψύκτες και να προσφέρει μικρότερη ποσότητα παγωτού σήμερα.

5.12 Ο ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΡΟΣΦΟΡΑΣ ΚΑΙ Η ΚΑΜΠΥΛΗ ΠΡΟΣΦΟΡΑΣ

Ας εξετάσουμε πως μεταβάλλεται η προσφερόμενη ποσότητα ενός αγαθού σε συνάρτηση με την τιμή του, όταν οι τιμές των συντελεστών, η τεχνολογία και οι προσδοκίες παραμένουν σταθερές. Ο πίνακας 2.3 δείχνει την προσφερόμενη ποσότητα από τον Ορέστη, πωλητή παγωτού, στις διάφορες τιμές παγωτού. Σε τιμή κάτω του ενός ευρώ, ο Ορέστης δεν προσφέρει καθόλου παγωτό. Καθώς οι τιμές αυξάνονται, ο Ορέστης προσφέρει ολοένα και περισσότερη ποσότητα παγωτού. Ο πίνακας αυτός ονομάζεται πίνακας προσφοράς (supply schedule).

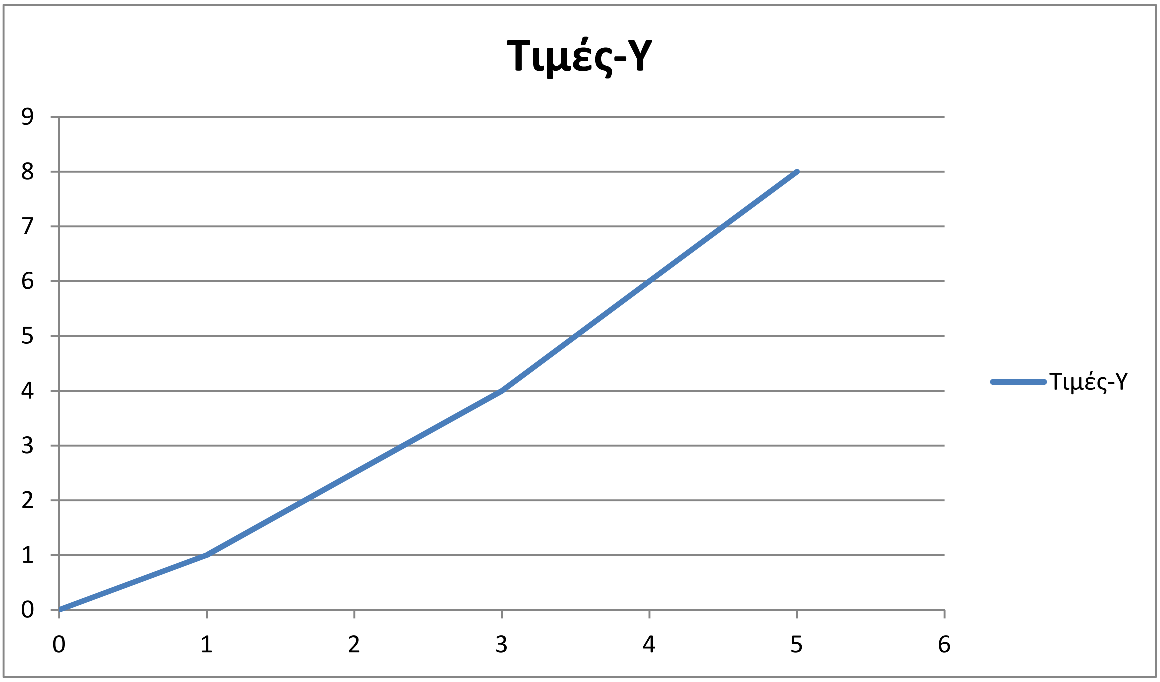
Στο σχήμα 2.3 εμφανίζεται η σχέση ανάμεσα στην ποσότητα του προσφερόμενου παγωτού και την τιμή του. Η καμπύλη που συνδέει την τιμή ενός αγαθού με την προσφερόμενη ποσότητα ονομάζεται καμπύλη προσφοράς (supply curve). Η καμπύλη προσφοράς κλίνει προς τα πάνω (έχει δηλαδή θετική κλίση) επειδή, ceteris paribus, μια μεγαλύτερη τιμή σημαίνει πιο μεγάλη προσφερόμενη ποσότητα.

Πίνακας 2.3

Τιμή Παγωτού	Προσφερόμενη Ποσότητα
0,00 ευρώ	0
0,50 ευρώ	0
1 ευρώ	1
2 ευρώ	3
3 ευρώ	4
4 ευρώ	6
5 ευρώ	8

Σχήμα 2.3

ΚΑΜΠΥΛΗ ΠΡΟΣΦΟΡΑΣ



5.13 ΑΓΟΡΑΙΑ ΠΡΟΣΦΟΡΑ ΕΝΑΝΤΙ ΤΗΣ ΑΤΟΜΙΚΗΣ ΠΡΟΣΦΟΡΑΣ

Η προσφορά της αγοράς είναι το άθροισμα των προσφορών όλων των πωλητών. Για παράδειγμα εάν ο Ορέστης και ο Γιάννης είναι δύο παραγωγοί παγωτού, και έχουμε δύο πίνακες 2.4 με την προσφορά παγωτού από τον καθένα ξεχωριστά, αν αθροίσουμε τις ποσότητες που προσφέρει ο καθένας τότε θα έχουμε την αγοραία προφορά. Γενικότερα η αγοραία καμπύλη προσφοράς είναι καμπύλη που δείχνει τις τιμές και τις προσφερόμενες ποσότητες ενός αγαθού από πολλούς παραγωγούς όπως φαίνεται στο σχήμα 2.4.

Η προσφερόμενη ποσότητα στην αγορά εξαρτάται από τους παράγοντες εκείνους που ορίζουν την προσφερόμενη ποσότητα από τους ατομικούς πωλητές: η τιμή του αγαθού, οι τιμές των εισροών που λειτουργούν στην παραγωγή του αγαθού, η διαθέσιμη τεχνολογία και οι προσδοκίες. Επιπροσθέτως, η προσφερόμενη ποσότητα στην αγορά εξαρτάται από τον αριθμό των πωλητών. (Αν ο Ορέστης ή ο Γιάννης σταματούσαν να πωλούν παγωτό, η προσφερόμενη ποσότητα στην αγορά θα μειωνόταν).

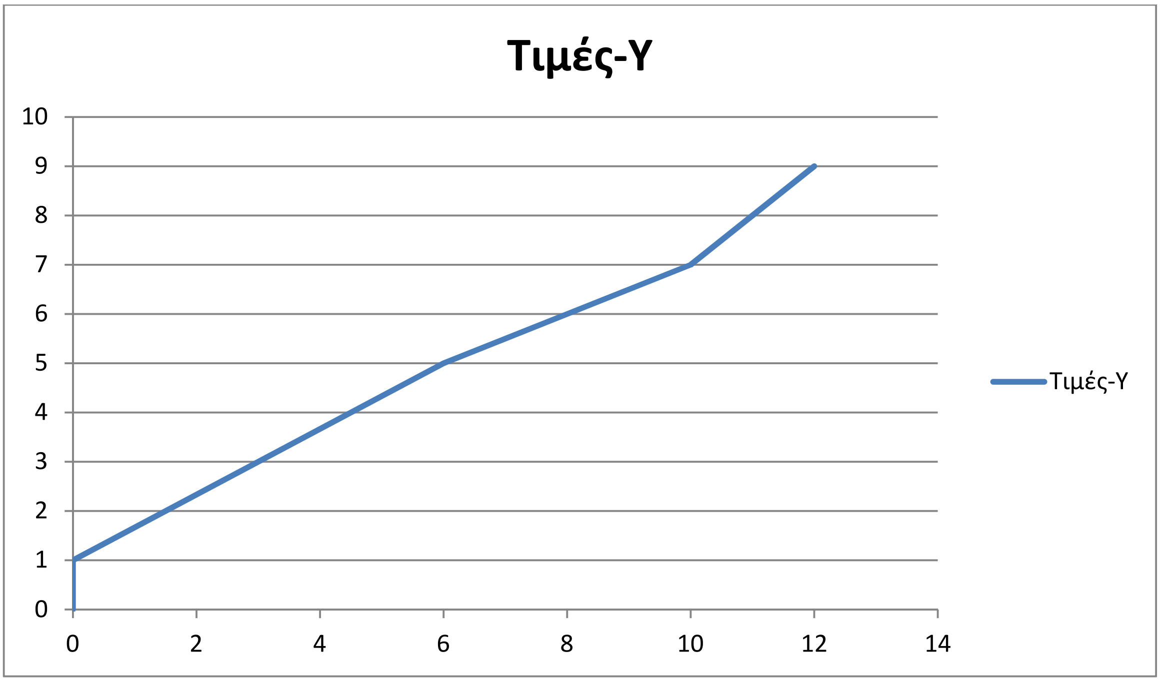
Για να βρούμε τη συνολική ποσότητα που προσφέρεται σε κάθε τιμή, προσθέτουμε τις ατομικές ποσότητες που βρίσκουμε στον οριζόντιο άξονα των ατομικών καμπυλών προσφοράς. Η αγοραία καμπύλη προσφοράς απεικονίζει το πώς μεταβάλλεται η προσφερόμενη ποσότητα όταν μεταβάλλεται η τιμή του αγαθού.

Πίνακας 2.4

Τιμή Παγωτού	Ορέστη	Γιάννης	Αγορά
0,00	0	0	0
1	0	0	0
3	1	2	3
5	2	4	5
7	4	6	10
9	5	7	12

Σχήμα 2.4

ΑΓΟΡΑΙΑ ΚΑΜΠΥΛΗ ΠΡΟΣΦΟΡΑΣ



Ας υποθέσουμε ότι μειώνεται η τιμή του γάλατος. Η αλλαγή αυτή θα επηρεάσει την προσφορά του παγωτού. Επειδή το γάλα είναι μια εισροή στην παραγωγή του παγωτού, δηλαδή ένα από τα βασικά συστατικά του, η μείωση της τιμής στο γάλα κάνει την πώληση του πιο επικερδής την πώληση του παγωτού. Η μεταβολή αυτή αυξάνει την προσφερόμενη ποσότητα του παγωτού: Σε κάθε τιμή, οι πωλητές είναι τώρα πρόθυμοι να παράγουν περισσότερη ποσότητα. Έτσι η καμπύλη προσφοράς μετατοπίζεται προς τα δεξιά.

Κάθε φορά που ένας από τους προσδιοριστικούς παράγοντες της προσφοράς, εκτός της τιμής, μεταβάλλεται, η καμπύλη προσφοράς μετατοπίζεται. Κάθε μεταβολή που αυξάνει την προσφερόμενη ποσότητα σε κάθε τιμή μετατοπίζει την καμπύλη προσφοράς προς τα δεξιά. Ομοίως, κάθε μεταβολή που μειώνει την προσφερόμενη ποσότητα σε κάθε τιμή, μετατοπίζει την καμπύλη προσφοράς προς τα αριστερά.

Γενικά, η καμπύλη προσφοράς δείχνει τι συμβαίνει στην προσφερόμενη ποσότητα ενός αγαθού όταν μεταβάλλεται η τιμή του, υπό τον όρο ότι οι άλλοι προσδιοριστικοί παράγοντες παραμένουν σταθεροί. Όταν μεταβληθεί ένας από αυτούς τους προσδιοριστικούς παράγοντες, η καμπύλη προσφοράς μετατοπίζεται.

5.14 Η ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΖΗΤΗΣΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΠΡΟΣΦΟΡΑΣ

Όπως είδαμε, όταν μεταβάλλεται η τιμή ενός προϊόντος μεταβάλλεται και η ποσότητά του που ζητείται και προσφέρεται. Το μέγεθος όμως της μεταβολής αυτής σε σχέση με τη μεταβολή της τιμής δεν είναι το ίδιο για όλα τα προϊόντα ή ακόμη και για το ίδιο το προϊόν σε διαφορετικά επίπεδα τιμής. Η ανταπόκριση της ζητούμενης ή της προσφερόμενης ποσότητας στις μεταβολές της τιμής εξαρτάται αντίστοιχα από την ελαστικότητα της ζήτησης ή της προσφοράς (elasticity of demand-elasticity of supply). Τις έννοιες αυτές θα εξετάσουμε εκτενέστερα παρακάτω.

Ελαστικότητα της ζήτησης ως προς την τιμή του προϊόντος:

1

Σύμφωνα με το νόμο της ζήτησης, όταν αυξάνεται η μειώνεται η τιμή ενός προϊόντος μειώνεται ή αυξάνεται αντίστοιχα η ζητούμενη ποσότητα. Το μέγεθος της μεταβολής της ποσότητας που προκαλείται από ορισμένη μεταβολή της τιμής δεν είναι το ίδιο σε όλο το μήκος της καμπύλης ζήτησης και, επιπλέον, διαφέρει από προϊόν σε προϊόν. Για να μετρήσουμε το βαθμό ανταπόκρισης της ζητούμενης ποσότητας στις μεταβολές της τιμής ενός προϊόντος, χρησιμοποιούμε την ελαστικότητα της ζήτησης ως προς την τιμή (price elasticity of demand).

Συντελεστής της ελαστικότητας της ζήτησης:[1]

Για τη μέτρηση της ελαστικότητας είναι αναγκαίος ο συντελεστής ελαστικότητας (elasticity coefficient), ο οποίος δείχνει τη σχέση της ποσοστιαίας μεταβολής της ζητούμενης ποσότητας προς την ποσοστιαία μεταβολή της τιμής ενός προϊόντος. Για την εκτίμηση της τιμής του συντελεστή ελαστικότητας υπάρχει ο ακόλουθος βασικός τύπος:

$$E_Z = \frac{\%\ \text{μεταβολή της ζητούμενης ποσότητας}}{\%\ \text{μεταβολή της τιμής}} \text{ ή}$$

$$E_Z = \frac{ΔΠ/Π}{ΔΤ/Τ} = \frac{ΔΠ}{ΔΤ} * \frac{Τ}{Π}$$

όπου,

[1] Ελαστικότητα είναι ο ρυθμός μεταβολής μιας συνάρτησης $y = f(x)$ που είναι ανεξάρτητος των μονάδων μέτρησης των μεταβλητών x και y. Η **ελαστικότητα** μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης y = f(x) ορίζεται ως ο λόγος της ποσοστιαίας μεταβολής $\frac{dy}{y}$ της y προς την ποσοστιαία μεταβολή $\frac{dx}{x}$ της x:

$$ε(x) = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{y}{x}} = \frac{f'(x)}{\frac{y}{x}} = \frac{x}{y} \cdot f'(x)$$

Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση y = f(x) καλείται **ελαστική** (αντίστοιχα, **ανελαστική**) σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, εάν $|ε(x_0)| > 1$ (αντίστοιχα, $|ε(x_0)| < 1$).

$E_Z =$ συντελεστής ελαστικότητας,

$\Delta\Pi =$ μεταβολή της ποσότητας,

$\Pi =$ αρχική ποσότητα,

$\Delta T =$ μεταβολή της τιμή,

$T =$ αρχική τιμή.

Ο συντελεστής ελαστικότητας της ζήτησης έχει αρνητικό πρόσημο, γιατί όταν αυξάνεται η τιμή (όταν δηλαδή το ΔΤ είναι θετικό) μειώνεται η ποσότητα (το ΔΠ είναι αρνητικό) και, αντίστροφα, όταν μειώνεται η τιμή (όταν το ΔΤ είναι αρνητικό) αυξάνεται η ποσότητα (το ΔΠ είναι θετικό). Αν η ποσοστιαία μεταβολή της ποσότητας είναι μεγαλύτερη από την ποσοστιαία μεταβολή της τιμής, η απόλυτη τιμή του συντελεστή ελαστικότητας είναι μεγαλύτερη από τη μονάδα και η ζήτηση είναι ελαστική (elastic demand). Αν, αντίθετα, η ποσοστιαία μεταβολή της ποσότητας είναι μικρότερη από την ποσοστιαία μεταβολή της τιμής, η ζήτηση θεωρείται ανελαστική (inelastic demand) και η απόλυτη τιμή του συντελεστή είναι μικρότερη από τη μονάδα. Αν, τέλος, η απόλυτη τιμή του συντελεστή ισούται με τη μονάδα, καταλαβαίνουμε ότι η ποσότητα και η τιμή μεταβάλλονται κατά το ίδιο ποσοστό και έχουμε μοναδιαία ελαστικότητα της ζήτησης (unitary elasticity). Σε μια ακραία περίπτωση ο συντελεστής ελαστικότητας είναι ίσος με το μηδέν και έτσι η ζήτηση είναι πλήρως ανελαστική (perfectly inelastic), οπότε μια ορισμένη μεταβολή της τιμής δεν επιφέρει καμία μεταβολή στη ζητούμενη ποσότητα. Τότε η καμπύλη ζήτησης θα είναι κατακόρυφη προς τον οριζόντιο άξονα. Σε άλλη ειδική περίπτωση, η ζήτηση μπορεί να είναι απείρως ελαστική (infinitely elastic), οπότε η απόλυτη τιμή του συντελεστή ελαστικότητας τείνει προς το άπειρο και η καμπύλη ζήτησης είναι παράλληλη προς τον οριζόντιο άξονα. Σε ένα τέτοιο ενδεχόμενο η ζητούμενη ποσότητα μεταβάλλεται και χωρίς μεταβολή της τιμής.

<u>Τοξοειδής ελαστικότητα:</u>

Όταν θέλουμε να εκτιμήσουμε την τιμή του συντελεστή ελαστικότητας, εμφανίζεται ένα πρόβλημα σχετικά με τη βάση που θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των ποσοστιαίων μεταβολών της ποσότητας και της τιμής. Επειδή ο συντελεστής ελαστικότητας μετράει την ελαστικότητα της ζήτησης μεταξύ δύο σημείων, προκύπτει το θέμα ποιο από αυτά θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί ως βάση για τον υπολογισμό των ποσοστιαίων μεταβολών.

Πίνακας 2.5

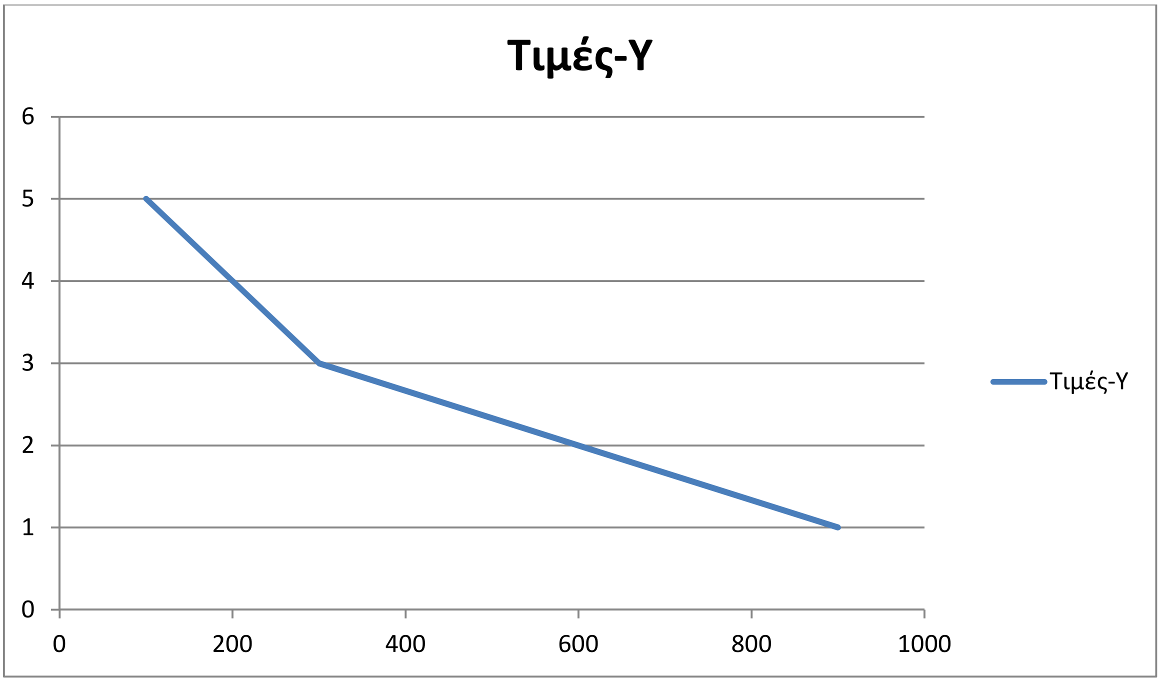
Ζήτηση για ένα προϊόν

	Τιμή (ευρώ)	Ζητούμενη ποσότητα (μονάδες προϊόντος)
Α	5	100
Β	4	200
Γ	3	300
Δ	2	600
Ε	1	900

Σχήμα 2.5

Καμπύλη ζήτησης για ένα προϊόν

Τιμή



Ποσότητα

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τη ζήτηση για ένα προϊόν που βλέπουμε στον πίνακα 2.5 και θέλουμε να εκτιμήσουμε την ελαστικότητα της ζήτησης μεταξύ των σημείων Β και Γ, όπου η μεταβολή της τιμή είναι 1 ευρώ και της ποσότητας είναι 100 μονάδες. Ποιο σημείο, το Β ή το Γ, θα πρέπει να ληφθεί υπόψη ως βάση για τον υπολογισμό των ποσοστιαίων μεταβολών; Αν ληφθεί το Β, η τιμή του συντελεστή ελαστικότητας μεταξύ των σημείων Β και Γ θα είναι ίση με -2, όπως παρατηρούμε παρακάτω:

$$E_Z = -\frac{100}{1} * \frac{4}{200} = -2.$$

Αν ληφθεί όμως το Γ, η τιμή του συντελεστή ελαστικότητας μεταξύ Β και Γ θα ισούται με -1:

$$E_Z = -\frac{100}{1} * \frac{3}{300} = -1.$$

Η τιμή του συντελεστή ελαστικότητας μεταξύ Β και Γ διαφέρει επομένως ανάλογα με το σημείο που λαμβάνεται ως βάση. Για να λυθεί το πρόβλημα αυτό μπορεί για τον υπολογισμό της ελαστικότητας να χρησιμοποιηθεί το ενδιάμεσο του διαστήματος μεταξύ των δύο σημείων ή, με διαφορετική διατύπωση, ο μέσος όρος των δύο ποσοτήτων και ο μέσος όρος των δύο τιμών. Με τον τρόπο αυτό, ο τύπος για τον υπολογισμό της ελαστικότητας της ζήτησης λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$E_Z = \frac{\text{Μεταβολή της ποσότητας}}{\substack{\text{Μέσος όρος της αρχικής} \\ \text{και της τελικής ποσότητας}}} : \frac{\text{Μεταβολή της τιμής}}{\substack{\text{Μέσος όρος της αρχικής και} \\ \text{της τελικής τιμής}}},$$

$$E_Z = \frac{\Delta\Pi}{(\Pi_1+\Pi_2)/2} : \frac{\Delta\Pi}{(T_1+T_2)/2} = -\frac{\Delta\Pi}{\Delta T} * \frac{(T_1+T_2)/2}{(\Pi_1+\Pi_2)/2} = \frac{\Delta\Pi}{\Delta T} * \frac{T_1+T_2}{\Pi_1+\Pi_2}$$

όπου,

$\Delta\Pi =$ μεταβολή της ποσότητας,

$\Delta T =$ μεταβολή της τιμής,

$T_1 =$ τιμή πριν τη μεταβολή,

$T_2 =$ τιμή μετά τη μεταβολή,

$\Pi_1 =$ ποσότητα πριν τη μεταβολή,

$\Pi_2 =$ ποσότητα μετά τη μεταβολή.

Με το σωστό μετασχηματισμό, ο παραπάνω τύπος μπορεί να γραφτεί και αλλιώς:

$$E_Z = \frac{\Pi_2 - \Pi_1}{\Pi_2 + \Pi_1} : \frac{T_2 - T_1}{T_2 + T_1}.$$

Η ελαστικότητα που εκτιμάται με βάση το μέσο όρο των ποσοτήτων και των τιμών ονομάζεται τοξοειδής ελαστικότητα (arc elasticity), γιατί αφορά ένα τόξο της καμπύλης ζήτησης.

<u>Ελαστικότητα σημείου:</u>

Η ελαστικότητα σημείου (point elasticity) αναφέρεται σε απειροελάχιστη αλλαγή της τιμής, ώστε είναι σα να παραμένει κανείς στο ίδιο σημείο της καμπύλης ζήτησης. Σε αυτήν την περίπτωση δεν υφίσταται το πρόβλημα της επιλογής μεταξύ της πριν και μετά την αλλαγή τιμής και ποσότητας γιατί οι διαφορές του είναι υπερβολικά μικρές. Η τιμή της ελαστικότητας εκτιμάται με τον εξής τύπο:

$$E_Z = \frac{\delta\Pi/\Pi}{\delta T/T} = -\frac{\delta\Pi}{\delta T} * \frac{T}{\Pi}$$

όπου,

$\delta T =$ απειροελάχιστη αλλαγή της τιμής σε ένα σημειο,

$\delta\Pi =$ απειροελάχιστη αλλαγή της ποσότητας.

<u>Ελαστικότητα της ζήτησης και συνολικό έσοδο:</u>

Ένας εύκολος τρόπος για να βρεθεί αν η ζήτηση για ένα προϊόν είναι ελαστική ή ανελαστική, είναι να γίνει σύγκριση μεταξύ του συνολικού εσόδου (total revenue) πριν και μετά από μια μεταβολή της τιμής του προϊόντος. Αν η ζήτηση για ένα προϊόν είναι ελαστική και μειωθεί η τιμή του, το συνολικό έσοδο, δηλαδή το γινόμενο της τιμής επί την ποσότητα, θα αυξηθεί. Αυτό οφείλεται στο ότι η ποσοστιαία αύξηση της ποσότητας είναι μεγαλύτερη από την ποσοστιαία μείωση της τιμής, με αποτέλεσμα το γινόμενό τους να αυξάνεται. Αν η ζήτηση είναι ελαστική και αυξηθεί η τιμή, το συνολικό έσοδο θα μειωθεί γιατί η ποσοστιαία μείωση της ποσότητας θα είναι μεγαλύτερη από την ποσοστιαία αύξηση της τιμής.

Αν, αντίθετα, η ζήτηση είναι ανελαστική και αυξηθεί η τιμή, το συνολικό έσοδο θα αυξηθεί γιατί η ποσοστιαία μείωση της ποσότητας θα είναι μικρότερη από την ποσοστιαία αύξηση της τιμής, ενώ αν μειωθεί η τιμή το συνολικό έσοδο θα μειωθεί διότι η ποσοστιαία αύξηση της ποσότητας θα είναι μικρότερη από την ποσοστιαία μείωση της τιμής. Επίσης, όταν η ελαστικότητα της ζήτησης είναι ίση με τη μονάδα, οποιαδήποτε μεταβολή της τιμής και αν επέλθει δεν επιφέρει μεταβολή στο συνολικό έσοδο επειδή η ποσοστιαία μεταβολή της τιμής είναι ακριβώς ίση, αλλά με αντίθετο σημείο, με την ποσοστιαία μεταβολή της ποσότητας.

Συμπερασματικά, καταλήγουμε ότι οι μεταβολές του συνολικού εσόδου μετά από μεταβολή της τιμής, είναι ικανές να δείξουν αν η ζήτηση είναι ελαστική ή ανελαστική. Ή, με βάση τη σχέση μεταξύ ελαστικότητας της ζήτησης και συνολικού εσόδου μπορεί να προβλεφθεί τι θα συμβεί στο συνολικό έσοδο όταν αλλάξει η τιμή ενός προϊόντος που η ζήτηση του είναι ελαστική ή ανελαστική.

<u>Ελαστικότητα της ζήτησης για το προϊόν μιας επιχείρησης και ολόκληρου του κλάδου:</u>

Ο βαθμός ελαστικότητας της ζήτησης ως προς την τιμή διαφέρει ανάλογα με το αν αναφέρεται στο προϊόν μιας μόνον επιχείρησης ή ολόκληρου του κλάδου. Είναι δυνατόν η ζήτηση για το προϊόν του κλάδου να είναι ανελαστική, αλλά για το προϊόν μιας μόνον επιχείρησης να είναι πολύ ελαστική ή και να τείνει στο άπειρο.

Όταν υπάρχει μεγάλος αριθμός μικρών επιχειρήσεων σε έναν κλάδο, από τις οποίες η κάθε μία παράγει τόσο μικρό ποσοστό της συνολική προσφοράς ώστε να μην επηρεάζει την τιμή του προϊόντος, η ζήτηση για το προϊόν κάθε επιχείρησης είναι απείρως ελαστική, ενώ για ολόκληρου του κλάδου μπορεί να είναι και ανελαστική. Για παράδειγμα η ζήτηση προϊόντων ορισμένων κτηνοτροφικών κλάδων είναι ανελαστική, ενώ για τα παραγόμενα από επιμέρους κτηνοτρόφους είναι πολύ ελαστική, φθάνοντας και στο άπειρο. Η ελαστικότητα της ζήτησης για το προϊόν ολόκληρου του κλάδου ταυτίζεται με εκείνην για το προϊόν μιας επιχείρησης μόνο όταν ο κλάδος αποτελείται αποκλειστικά από αυτήν την επιχείρηση, δηλαδή στην περίπτωση μονοπωλίου.

<u>Προσδιοριστικοί παράγοντες της ελαστικότητας της ζήτησης:</u>

1. Αριθμός και συγγένεια υποκατάστατων προϊόντων.
2. Σπουδαιότητα του προϊόντος στους οικογενειακούς προϋπολογισμούς.
3. Σπουδαιότητα της ανάγκης που ικανοποιεί το προϊόν.
4. Διάρκεια χρονικής περιόδου.
5. Διάρκεια ζωής των προϊόντων.
6. Ο βαθμός κορεσμού της αγοράς ως προς το συγκεκριμένο προϊόν.
7. Διανομή του εισοδήματος και εισοδηματική ομάδα που αγοράζει το προϊόν.

<u>Σταυροειδής ελαστικότητα της ζήτησης:</u>

Επίδραση στη ζητούμενη ποσότητα ενός αγαθού Α μιας μεταβολής της τιμής ενός άλλου αγαθού Β που συνδέεται μαζί του μετριέται με τη σταυροειδή ελαστικότητα της ζήτησης (cross elasticity of demand). Αυτή υπολογίζεται με τον τύπο:

$$\text{Σταυροειδής ελαστικότητα ζήτησης}$$

$$\text{του Α σε σχέση με τη μεταβολή της τιμής του Β} = \frac{\text{\% μεταβολή στην ποσότητα του Α}}{\text{\% μεταβολή στην τιμή του Β}} =$$

$$= \frac{\Delta\Pi_A/\Pi_A}{\Delta T_B/T_B} = \frac{\Delta\Pi_A}{\Delta T_B} * \frac{T_B}{\Pi_A}$$

όπου,

$\Delta\Pi_A =$ μεταβολή στη ζητούμενη ποσότητα του αγαθού Α,

$\Pi_A =$ αρχική ζητούμενη ποσότητα του αγαθού Α,

$\Delta T_B =$ μεταβολή στην τιμή του αγαθού Β,

$T_B =$ αρχική τιμή του αγαθού Β.

Αν δύο αγαθά είναι υποκατάστατα, η σταυροειδής ελαστικότητα έχει θετικό πρόσημο, δηλαδή είναι θετική, γιατί οι μεταβολές στην ποσότητα του ενός αγαθού και στην τιμή του άλλου έχουν όμοια κατεύθυνση. Αν όμως δύο αγαθά είναι συμπληρωματικά, η σταυροειδή ελαστικότητα έχει αρνητικό πρόσημο, δηλαδή είναι αρνητική, γιατί οι μεταβολές στην τιμή του ενός επιφέρουν αντίθετες μεταβολές στη ζητούμενη ποσότητα του άλλου.

Συνοψίζοντας, αν η σταυροειδής ελαστικότητα μεταξύ δύο αγαθών είναι θετική, αυτά λέγονται υποκατάστατα, ενώ αν είναι αρνητική μπορούν να χαρακτηριστούν ως συμπληρωματικά. Αν η σταυροειδής ελαστικότητα είναι μηδέν, τα δύο αγαθά είναι ανεξάρτητα.

Για μια επιχείρηση είναι πολύ χρήσιμο να ξέρει τις σταυροειδής ελαστικότητες της ζήτησης για τα προϊόντα της σε σχέση με τις τιμές ανταγωνιστικών ή συμπληρωματικών τους προϊόντων. Αν οι ελαστικότητες είναι υψηλές και μειωθούν οι τιμές των ανταγωνιστικών προϊόντων θα έχει πρόβλημα με τις δικές τις πωλήσεις, ενώ αν αυξηθούν οι τιμές των εν λόγω προϊόντων θα αυξηθούν οι δικές της πωλήσεις. Επιπλέον αν οι σταυροειδής ελαστικότητες σε σχέση με τις τιμές συμπληρωματικών προϊόντων είναι υψηλές, τότε οι πωλήσεις της επηρεάζονται σε μεγάλο βαθμό από τις αυξομειώσεις των τιμών προϊόντων που είναι εκτός του ελέγχου της.

<u>Εισοδηματική ελαστικότητα της ζήτησης:</u>

Όπως ξέρουμε, η ζήτηση προϊόντων επηρεάζεται και από το ύψος του εισοδήματος των καταναλωτών. Μια αύξηση του εισοδήματος οδηγεί σε αύξηση της ζήτησης για τα κανονικά αγαθά, που διαφέρει όμως ανάλογα με την εισοδηματική ελαστικότητα της ζήτησης (income elasticity of demand) του κάθε προϊόντος. Αύτη εκφράζεται με τον λόγο της ποσοστιαίας μεταβολής της ποσότητας προς την ποσοστιαία μεταβολή του εισοδήματος. Δηλαδή:

$$\begin{gathered}\text{Εισοδηματική ελαστικότητα} \\ \text{ζήτησης για ένα προϊόν Α} = \frac{\text{\% μεταβολή στην ποσότητα του Α}}{\text{\% μεταβολή του εισοδήματος}} = \frac{\Delta\Pi/\Pi}{\Delta E/E} = \frac{\Delta\Pi}{\Delta E} * \frac{E}{\Pi}\end{gathered}$$

όπου,

ΔΠ= μεταβολή στη ζητούμενη ποσότητα του αγαθού Α,

Π= αρχική ζητούμενη ποσότητα του αγαθού Α,

ΔΕ= μεταβολή του εισοδήματος,

Ε= εισόδημα πριν από τη μεταβολή του.

Αν $\%\Delta\Pi > \%\Delta E$ η ζήτηση για το προϊόν είναι ελαστική ως προς τις μεταβολές του εισοδήματος, ενώ αν $\%\Delta\Pi < \%\Delta E$, η ζήτηση χαρακτηρίζεται ανελαστική. Αν η εισοδηματική ελαστικότητα είναι μικρότερη από το μηδέν, το προϊόν θεωρείται κατώτερο.

Πρέπει να γίνει αντιληπτό ότι η εισοδηματική ελαστικότητα αντανακλάει όχι το βαθμό μετατόπισης πάνω στην ίδια καμπύλη ζήτησης, αλλά το βαθμό μετατόπισης ολόκληρης της εν λόγω καμπύλης ως αποτέλεσμα της μεταβολής του εισοδήματος. Αν ένα προϊόν είναι κανονικό (<<φυσιολογικό>>) και αυξηθεί το εισόδημα, αυξάνεται και η ζήτηση γι' αυτό (μετατοπίζεται προς τα δεξιά ολόκληρη η σχετική καμπύλη), ενώ αν μειωθεί το εισόδημα, μειώνεται η ζήτηση. Στο ενδεχόμενο αυτό η εισοδηματική ελαστικότητα θα έχει θετικό πρόσημο, γιατί οι ποσοστιαίες μεταβολές στα δύο μεγέθη (εισόδημα και ποσότητα προϊόντος) είναι προς την ίδια κατεύθυνση (και οι δύο θετικές ή και οι δύο αρνητικές). Αντίθετα, όταν ένα προϊόν είναι κατώτερο, η αύξηση του εισοδήματος έχει σαν αποτέλεσμα μείωση της ζήτησης και η μείωση του εισοδήματος αύξηση της ζήτησης. Επειδή οι δύο μεταβολές είναι προς αντίθετες κατευθύνσεις, η εισοδηματική ελαστικότητα έχει αρνητικό πρόσημο. Συνεπώς από το πρόσημο της εισοδηματικής ελαστικότητας μπορούμε να συμπεράνουμε αν ένα προϊόν είναι κανονικό ή κατώτερο.

Προϊόντα που θεωρούνται είδη πρώτης ανάγκης έχουν μικρή εισοδηματική ελαστικότητα γιατί χρειάζεται να αγοραστούν ακόμη και όταν το εισόδημα είναι χαμηλό, οπότε δεν αυξάνεται πολύ η ζήτηση τους όταν αυξηθεί το εισόδημα επειδή μεγάλο μέρος των βασικών αναγκών έχει ήδη ικανοποιηθεί. Αντιθέτως, προϊόντα που χαρακτηρίζονται ως είδη πολυτελείας έχουν σχετικά μεγάλη εισοδηματική ελαστικότητα γιατί υπάρχουν ανάγκες οι οποίες δεν έχουν καλυφθεί και που μπορούν να πραγματοποιηθούν με αύξηση του εισοδήματος.

Η εισοδηματική ελαστικότητα της ζήτησης είναι πολύ σημαντική για τις επιχειρήσεις όταν προγραμματίζουν την μελλοντική πορεία και ανάπτυξή τους, γιατί δείχνει την επίδραση της αύξησης του εισοδήματος στη συνολική ζήτηση για τα προϊόντα τους. Εκτός από αυτά, προσφέρει μια ένδειξη του βαθμού ευαισθησίας των πωλήσεων στις οικονομικές διακυμάνσεις. Επιχειρήσεις που παράγουν προϊόντα με σχετικά υψηλή εισοδηματική ελαστικότητα επηρεάζονται πολύ περισσότερο από τις οικονομικές διακυμάνσεις από ότι άλλες που παράγουν προϊόντα με σχετικά χαμηλή εισοδηματική ελαστικότητα. Για το λόγο αυτό είναι χρήσιμο για τα επιχειρηματικά μέλη να γνωρίζουν την εισοδηματική ελαστικότητα των προϊόντων που παράγουν οι επιχειρήσεις τους.

Αν η μετατόπιση της καμπύλης ζήτησης λόγω μεταβολής του εισοδήματος είναι σημαντική, είναι καλύτερα να εκτιμάται η τοξοειδής ελαστικότητα, δηλαδή η ελαστικότητα του τόξου που αντιστοιχεί στην οριζόντια απόσταση μεταξύ της καμπύλης ζήτησης πριν τη μετατόπιση λόγω μεταβολής του εισοδήματος και στην καμπύλη ζήτησης μετά τη μετατόπιση, στο ύψος της τιμής του προϊόντος που ισχύει όταν αλλάζει το εισόδημα. Σε αυτήν την περίπτωση, για την εκτίμηση της εισοδηματικής ελαστικότητας, χρησιμοποιείται ο παρακάτω τύπος:

$$\text{Εισοδηματική ελαστικότητα} = \frac{\Pi_2 - \Pi_1}{\Pi_2 + \Pi_1} : \frac{E_2 - E_1}{E_2 + E_1}$$

όπου τα 1 και 2 αναφέρονται στα μεγέθη ποσότητας και εισοδήματος πριν την αλλαγή του εισοδήματος και μετά την αλλαγή.

Ελαστικότητα της προσφοράς:

Η ελαστικότητα της προσφοράς ενός προϊόντος δείχνει το βαθμό ανταπόκρισης της προσφερόμενης ποσότητας στις μεταβολές της τιμής του. Αν μια ορισμένη ποσοστιαία μεταβολή στην τιμή επιφέρει μεγαλύτερη ποσοστιαία μεταβολή στην προσφερόμενη ποσότητα, η προσφορά είναι ελαστική. Αν, αντίθετα, η ποσοστιαία μεταβολή της προσφερόμενης ποσότητας είναι μικρότερη από εκείνην της τιμής, η προσφορά είναι ανελαστική. Ο τύπος της ελαστικότητας της προσφοράς είναι αντίστοιχος του τύπου της ελαστικότητας της ζήτησης, με τη μόνη διαφορά ότι έχει θετικό πρόσημο, επειδή η προσφορά είναι καμπύλη με θετική κλήση, αφού μια μεταβολή της τιμής επιφέρει μεταβολή της προσφερόμενης ποσότητας προς την ίδια κατεύθυνση. Δηλαδή, μια αύξηση της τιμής θα έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση της ποσότητας και μια μείωση της τιμής μείωση της ποσότητας.

$$E_{\Pi} = \frac{\text{\% μεταβολή προσφερόμενης ποσότητας}}{\text{\% μεταβολή τιμής}} = \frac{\Delta\Pi/\Pi}{\Delta T/T} = \frac{\Delta\Pi}{\Delta T} * \frac{T}{\Pi}$$

όπου,

ΔΠ= μεταβολή της προσφερόμενης ποσότητας του αγαθού,

Π= αρχική ζητούμενη ποσότητα του αγαθού,

ΔΤ= μεταβολή της τιμής,

Τ= αρχική τιμή.

Επειδή στην προσφορά η τιμή και η ποσότητα μεταβάλλονται προς την ίδια κατεύθυνση, δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι αυξομειώσεις του συνολικού εσόδου για να διαπιστωθεί αν η προσφορά είναι ελαστική ή όχι.

Ο κύριος παράγοντας που επηρεάζει την προσφορά ενός προϊόντος είναι το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί από τη μεταβολή της τιμής του: όσο μεγαλύτερο είναι, τόσο περισσότερες ευκαιρίες έχουν οι παραγωγοί για να αντιδράσουν και τόσο μεγαλύτερη η ελαστικότητα της προσφοράς. Για παράδειγμα αν η τιμή των φρούτων σε μία αγορά αυξηθεί, οι παραγωγοί δε θα μπορέσουν να αυξήσουν την ίδια μέρα την ποσότητα που προσφέρουν, οπότε λόγω της αμετάβλητης ποσότητας η προσφορά θα είναι πλήρως ανελαστική. Τις επόμενες ημέρες θα αρχίσουν όμως να φέρνουν μεγαλύτερες ποσότητες φρούτων, αλλά αυτές δεν είναι δυνατό να αυξηθούν πέρα από ένα σημείο. Αν όμως συνεχίσει για αρκετό διάστημα να παραμένει η υψηλότερη τιμή, οι παραγωγοί θα έχουν την ευκαιρία να αυξήσουν την παραγωγή τους και η ποσότητα που θα προσφέρεται θα αυξηθεί πολύ περισσότερο. Με την πάροδο του χρόνου και εφόσον υπάρχει η υψηλότερη τιμή, η παραγωγή φρούτων θα απορροφά διαρκώς και πιο πολλούς παραγωγικούς συντελεστές και η προσφερόμενη ποσότητα θα εξακολουθεί να αυξάνεται. Γενικά, μέσα σε μικρό χρονικό διάστημα οι παραγωγοί δεν έχουν τον απαιτούμενο χρόνο να αντιδράσουν επαρκώς σε μια μεταβολή της τιμής και η προσφορά είναι συνήθως ανελαστική. Με το πέρασμα, όμως, του χρόνου, γίνεται δυνατή η προσαρμογή της παραγωγής και η προσφορά γίνεται πιο ελαστική.

Με βάση τη διαφορετική ελαστικότητα της προσφοράς που καθορίζεται από τον παράγοντα χρόνο, ο μεγάλος οικονομολόγος Alfred Marshall διέκρινε τρία τουλάχιστον είδη ισορροπίας στην αγορά ενός προϊόντος που δεν είναι δυνατό να αποθηκευθεί: τη στιγμιαία ισορροπία (momentary equilibrium), τη βραχυχρόνια ισορροπία (short-run equilibrium) και τη μακροχρόνια ισορροπία (long-run equilibrium). Στην περίπτωση της στιγμιαίας ισορροπίας η καμπύλη προσφορά είναι πλήρως ανελαστική οπότε, αν για κάποιο λόγο αυξηθεί η ζήτηση, θα αυξηθεί η τιμή αλλά δεν θα μεταβληθεί η ποσότητα ισορροπίας. Στο βραχυχρόνιο διάστημα η καμπύλη προσφοράς δεν είναι πλήρως ανελαστική, αλλά αρκετά ανελαστική. Όταν αυξηθεί η ζήτηση και αλλάξει το σημείο ισορροπίας, αυξάνεται η τιμή (λιγότερο από ότι στη στιγμιαία ισορροπία) αλλά αυξάνεται σε κάποιο βαθμό και η ποσότητα ισορροπίας. Τέλος, στο μακροχρόνιο διάστημα η προσφορά γίνεται αρκετά ή πολύ ελαστική (μπορεί να γίνει και απείρως ελαστική), οπότε μια αύξηση της ζήτησης επισύρει μικρή σχετικά (ή καμία) αύξηση της τιμής αλλά πολύ μεγαλύτερη αύξηση στην ποσότητα ισορροπίας.

Ένας άλλος παράγοντας που επηρεάζει την ελαστικότητας της προσφοράς ενός προϊόντος είναι ο βαθμός εξειδίκευσης των χρησιμοποιούμενων παραγωγικών συντελεστών. Όσο πιο εξελιγμένοι είναι οι συντελεστές, τόσο μικρότερη είναι η πιθανότητα αύξησης της παραγωγής του προϊόντος μετά από αύξηση της τιμής του και, κατά συνέπεια, τόσο μικρότερη η ελαστικότητα της προσφοράς του.

5.15 ΤΟ ΚΟΣΤΟΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

Για την ανάλυση της έννοιας του κόστους παραγωγής θα έχουμε ως παράδειγμα το εργοστάσιο σοκολάτας στο οποίο ιδιοκτήτρια είναι η Αλεξία. Η Αλεξία ως ιδιοκτήτρια του εργοστασίου, αγοράζει γάλα, αρωματικές ύλες, κακάο, ζάχαρη, βούτυρο, ξηρούς καρπούς και πρόσθετα άλλα υλικά που είναι χρήσιμα για την Παρασκευή διαφόρων ειδών σοκολάτας. Αγοράζει επίσης συσκευές ανάμειξης και ψύξης των υλικών, ειδικά ψυγεία και μισθώνει εργάτες που διαχειρίζονται αυτόν τον εξοπλισμό. Στη συνέχεια η Αλεξία πουλάει στους πελάτες της το προϊόν που παράγει. Ερευνώντας ορισμένα από τα ζητήματα που αντιμετωπίζει η Αλεξία στην επιχείρηση της, μπορούμε να μάθουμε τι ισχύει για όλες τις επιχειρήσεις στην οικονομία μας, ανεξάρτητα από τις συνθήκες αγοράς που αντιμετωπίζουν.

5.16 ΣΥΝΟΛΙΚΟ ΕΣΟΔΟ, ΣΥΝΟΛΙΚΟ ΚΟΣΤΟΣ, ΚΕΡΔΟΣ

Θα ξεκινήσουμε με το σκοπό της επιχείρησης. Για την εύκολη κατανόηση της λήψης των αποφάσεων μιας επιχείρησης, πρέπει να αναλύσουμε το τι προσπαθεί να κάνει. Ενδεχομένως, η Αλεξία να ξεκίνησε της επιχείρησης της κινούμενη από την αλτρουιστική επιθυμία να προσφέρει στον κόσμο σοκολάτες ή, ίσως, από αγάπη προς τη συγκεκριμένη επιχειρηματική δραστηριότητα. Το πιο πιθανό, όμως, είναι ότι η Αλεξία, άνοιξε την επιχείρηση αυτή με στόχο να κερδίσει χρήματα. Οι οικονομολόγοι υποστηρίζουν ότι ο σκοπός της επιχείρησης είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους και καταλήγουν ότι η υπόθεση αυτή αποδίδει την πραγματικότητα στις περισσότερες περιπτώσεις.

Το κέρδος για μια επιχείρηση είναι το ποσό που εισπράττει από την πώληση του προϊόντος της (στο δεδομένο παράδειγμα σοκολάτες) και το οποίο ονομάζεται συνολικό έσοδο (total revenue). Το ποσό που η επιχείρηση πληρώνει για να αγοράσει εισροές (στο συγκεκριμένο παράδειγμα: γάλα, αρωματικές ύλες, κακάο, ζάχαρη, βούτυρο, ξηρούς καρπούς και άλλες πρώτες ύλες) ονομάζεται συνολικό κόστος (total cost). Στην Αλεξία μένει το μέρος των εσόδων που δεν διατίθενται για την κάλυψη του κόστους. Ορίζουμε, λοιπόν, ως κέρδος (profit) μιας επιχείρησης τα συνολικά έσοδα μείον το συνολικό κόστος. Δηλαδή,

Κέρδος = Συνολικά Έσοδα-Συνολικά έξοδα.

Σκοπός της Αλεξίας είναι να πραγματοποιήσει όσο το δυνατόν μεγαλύτερο κέρδος από της επιχειρηματική της δραστηριότητα.

Για να καταλάβουμε πως μια επιχείρηση προσπαθεί να μεγιστοποιήσει τα κέρδη της, πρέπει να αποσαφηνίσουμε επαρκώς πως μπορεί κανείς να μετρήσει τα συνολικά της έσοδα και το συνολικό της κόστος. Η μέτρηση των συνολικών εσόδων είναι εύκολο έργο: τα συνολικά έσοδα είναι ίσα με την ποσότητα του προϊόντος που παράγει επί την τιμή στην οποία πωλεί το προϊόν της. Αν η παραγωγή της Αλεξίας είναι 30.000 σοκολάτες και τις πωλεί προς 1,70 ευρώ τη μία τότε, τα συνολικά της έσοδα είναι 51.000 ευρώ. Αντιθέτως, η μέτρηση του συνολικού κόστους της επιχείρησης είναι πιο δύσκολη.

5.17 ΤΟ ΚΟΣΤΟΣ ΩΣ ΚΟΣΤΟΣ ΕΥΚΑΙΡΙΑΣ

Το κόστος ενός πράγματος είναι ένα άλλο πράγμα από το οποίο θα πρέπει κανείς να παραιτηθεί, για να αποκτήσει το εν λόγω πράγμα-αγαθό. Να υπενθυμίσουμε ότι το κόστος ευκαιρίας ενός πράγματος είναι όλα εκείνα από τα οποία παραιτείται κανείς για να το αποκτήσει. Όταν οι οικονομολόγοι κάνουν λόγω για το κόστος παραγωγής της επιχείρησης, συμπεριλαμβάνουν όλα τα στοιχεία κόστους ευκαιρίας, προκειμένου να γίνει δυνατή η παραγωγή των αγαθών και υπηρεσιών στα οποία είναι ειδικεύεται η επιχείρηση.

Το κόστος ευκαιρίας για την παραγωγή αγαθών και υπηρεσιών από την επιχείρηση περιλαμβάνει στοιχεία που είναι προφανή και άλλα που είναι λιγότερα προφανή. Όταν η Αλεξία αποφάσισε να κάνει μια καινοτόμο ενέργεια και να αρχίσει να παράγει κέικ με τη χρήση της σοκολάτας που φτιάχνει, άρα θα αγοράσει αλεύρι με 1350,00 ευρώ , το ποσό αυτό είναι κόστος ευκαιρίας, επειδή η Αλεξία δεν μπορεί πλέον να χρησιμοποιήσει το ίδιο ποσό για να αγοράσει κάτι άλλο. Ακριβώς το ίδιο συμβαίνει όταν η Αλεξία διαθέτει προσωπικό και ως αμοιβή τους παρέχει ημερομίσθια, τα ημερομίσθια αυτά είναι στοιχείο του κόστους ευκαιρίας του εργοστασίου αυτού. Αυτά τα στοιχεία ανήκουν στην κατηγορία του φανερού ή άμεσου κόστους (explicit cost). Μερικά άλλα όμως, στοιχεία του κόστους ευκαιρίας της επιχείρησης είναι αφανή ή έμμεσα (implicit cost). Ας υποθέσουμε ότι η Αλεξία έχει σπουδάσει αρχιτέκτονας και έχει τη δυνατότητα να βρει εργασία αποκτώντας ωρομίσθιο 30 ευρώ. Για κάθε ώρα, που δουλεύει στο εργοστάσιο σοκολάτας χάνει 30 ευρώ εισοδήματος που θα μπορούσε να έχει εναλλακτικά- και το εισόδημα αυτό είναι, επίσης, μέρος του κόστους της.

Τώρα μπορούμε να διακρίνουμε με ευκολία τη διαφορά ανάμεσα στο άμεσο και το έμμεσο κόστος αλλά και τη μεγάλη διαφορά στον τρόπο αντίληψης του κόστους από έναν λογιστή και έναν οικονομολόγο. Οι οικονομολόγοι ασχολούνται περαιτέρω με τις αποφάσεις που καλείται να πάρει η επιχείρηση σε σχέση με την παραγωγής της και την τιμολόγηση των προϊόντων που διαθέτει στην αγορά, γι’ αυτό όταν μετρούν το κόστος, εμπεριέχουν καθ’ ολοκλήρου το κόστος ευκαιρίας. Σε αντίθεση, οι λογιστές περιεργάζονται το χρήμα που εισρέει στην επιχείρηση και εκρέει από αυτήν. Έτσι μετρούν το λεγόμενο φανερό ή αλλιώς άμεσο κόστος, με αποτέλεσμα συχνά να αψηφούν το κόστος της επιχείρησης που δεν φαίνεται.

Τη διαφορά μεταξύ λογιστών και οικονομολόγων μπορούμε να την καταλάβουμε καλύτερα αναλύοντας το παράδειγμα με το εργοστάσιο σοκολάτας της Αλεξίας. Όταν η Αλεξία δεν επιδιώκει να εργαστεί ως αρχιτέκτονας για να βγάλει ένα ορισμένο εισόδημα, ο λογιστής της δε θα υπολογίσει το εισόδημα αυτό, ως κόστος παραγωγής της επιχείρησης της. Αφού δεν υπάρχει εκροή χρήματος από την επιχείρηση για την πληρωμή αυτού του κόστους, δε θα υπάρχει ποτέ στις οικονομικές εκθέσεις του λογιστή. Ο οικονομολόγος, όμως, θα υπολογίσει ως κόστος το εισόδημα από το οποίο παραιτήθηκε η Αλεξία, επειδή επηρεάζει τις επιχειρηματικές αποφάσεις της. Αν για παράδειγμα η αμοιβή της Αλεξίας αυξηθεί από 30 ευρώ την ώρα σε 40 ευρώ την ώρα, μπορεί να αποφασίσει ότι η συνέχιση της επιχείρησής της έχει πολύ μεγάλο κόστος και να διαλέξει να διακόψει τη λειτουργία της, για να απασχοληθεί πλήρως ως αρχιτέκτονας.

5.18 ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΚΟΣΤΟΣ

Οι επιχειρήσεις επιβαρύνονται με κόστος όταν ξοδεύουν χρήματα για να αγοράσουν εισροές, για να παράγουν αγαθά και υπηρεσίες που σχεδιάζουν να πωλήσουν. Στο παρόν τμήμα θα διερευνήσουμε αυτόν τον δεσμό ανάμεσα στη διαδικασία παραγωγής της επιχείρησης και στο συνολικό της κόστος. Ας πάρουμε ως παράδειγμα το εργοστάσιο σοκολάτας της Αλεξίας.

Για λόγους ευκολίας της ανάλυσης μας, ας θεωρήσουμε ότι το μέγεθος του εργοστασίου της Αλεξίας είναι σταθερό και ότι η Αλεξία μπορεί να μεταβάλλει την ποσότητα της σοκολάτας που παράγει μόνον αυξάνοντας τον αριθμό των εργατών που χρησιμοποιεί. Η ποσότητα της σοκολάτας που παράγει ανά ώρα είναι άμεσα συνδεδεμένη με τον αριθμό των εργαζομένων του εργοστασίου. Αν η Αλεξία δεν έχει προσλάβει κανέναν εργάτη, προφανώς και η παραγωγή της θα είναι μηδέν. Αν προσλάβει έναν εργάτη, θα παράγει 50 σοκολάτες. Όταν προσλάβει δύο εργάτες, η παραγωγή της θα φτάσει στις 90 σοκολάτες.

Στο παρακάτω σχήμα 2.6 εμφανίζεται ένα γράφημα που δείχνει αυτές τις δύο στήλες αριθμών. Ο αριθμός των εργατών παρουσιάζεται στον οριζόντιο άξονα και ο αριθμός της παραγωγής της σοκολάτας φαίνεται στον κατακόρυφο άξονα. Η σχέση αυτή μεταξύ της ποσότητας των εισροών (εργατών) και εκροών (σοκολάτας) ονομάζεται συνάρτηση παραγωγής.

Μια από τις Δέκα Αρχές της Οικονομικής είναι ότι οι ορθολογικοί άνθρωποι σκέπτονται οριακά. Με τον τρόπο αυτό οι επιχειρήσεις αποφασίζουν πόσους εργαζομένους θα απασχολούν και πόσο προϊόν θα παράγουν. Στο παρακάτω πίνακα θα δούμε στην τρίτη στήλη δίνεται το οριακό προϊόν του εργάτη. Το οριακό προϊόν μιας εισροής στην παραγωγή είναι η αύξηση την οποία επιφέρει στην ποσότητα του παραγόμενου προϊόντος, η χρησιμοποίηση μιας πρόσθετης μονάδας της εισροής αυτής. Όταν ο αριθμός των εργαζομένων αυξηθεί από 1 σε 2, η παραγωγή σοκολάτας μεγαλώνει από 50 σε 90. Έτσι, το οριακό προϊόν του δεύτερου εργάτη είναι 40 σοκολάτες. Και όταν ο αριθμός των εργατών πολλαπλασιασθεί από 2 σε 3, η παραγωγή σοκολάτας μεγεθύνεται από 90 σε 120. Έτσι, το οριακό προϊόν για τον τρίτο εργάτη θα είναι 30 σοκολάτες.

Παρατηρούμε ότι με την αύξηση του αριθμού των εργαζομένων που έχει στη διάθεση του το εργοστάσιο, έχουμε μια μείωση του οριακού προϊόντος. Ο δεύτερος εργάτης έχει οριακό προϊόν 40 σοκολάτες, ο τρίτος εργάτης έχει οριακό προϊόν 30 σοκολάτες και ο τέταρτος εργάτης έχει οριακό προϊόν 20 σοκολάτες. Η ιδιότητα αυτή λέγεται φθίνον οριακό προϊόν (diminishiny marginal product). Πρώτα απ’ όλα, όταν απασχολούνται λίγοι μόνον εργάτες, έχουν εύκολη πρόσβαση στα μηχανήματα του εργοστασίου της Αλεξίας. Όταν, όμως, αρχίσει να αυξάνεται ο αριθμός των εργαζομένων, οι νέο-προσληφθέντες εργάτες πρέπει να μοιράζονται τον ίδιο εξοπλισμό και να εργάζονται σε συνθήκες όπου υπάρχει συνωστισμός. Επομένως, όσο πιο πολλοί εργάτες δουλεύουν στο εργοστάσιο, τόσο μικρότερη είναι η προσφορά και η εργασία κάθε πρόσθετου εργάτη στην παραγωγή σοκολάτας.

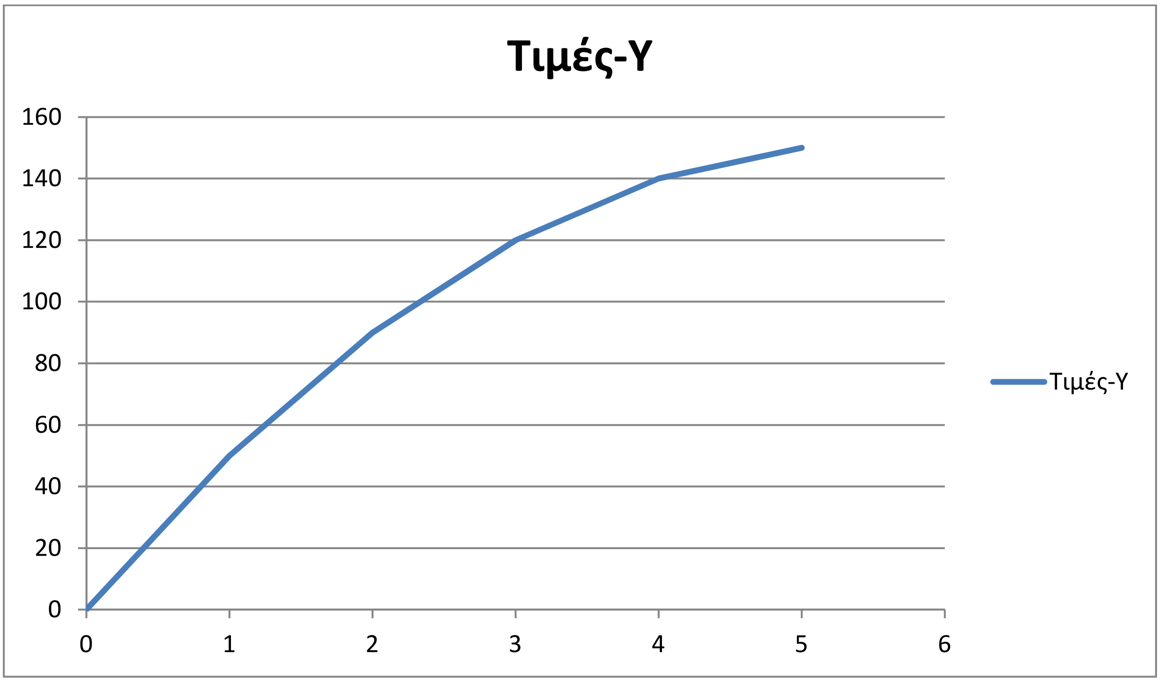
Την έννοια του φθίνοντος οριακού προϊόντος μπορούμε να αντιληφθούμε και από το παρακάτω σχήμα 2.6. Η κλίση της συνάρτησης παραγωγής (<<ανέρχεται καθώς κινούμαστε προς τα δεξιά>>) μας παρουσιάζει την παραγωγή σοκολάτας της Αλεξίας (<<άνοδος>>) για κάθε πρόσθετο εργάτη που απασχολείται (<<κίνηση προς τα δεξιά>>). Δηλαδή, η κλίση της συνάρτησης παραγωγής μετρά το συνολικό προϊόν του εργάτη. Καθώς αυξάνεται ο αριθμός των εργατών, το οριακό προϊόν μειώνεται και η συνάρτηση παραγωγής τείνει να γίνει οριζόντια.

Πίνακας 2.6

Αριθμός εργατών	Παραγωγή (Ποσότητα σοκολάτας που παράγεται ανά ώρα)	Οριακό προϊόν της εργασίας	Κόστος του εργοστασίου	Κόστος των εργατών	Συνολικό κόστος εισροών (Κόστος εργοστασίου +Κόστος εργατών)
0	0	-	30 ευρώ	0 ευρώ	30 ευρώ
1	50	50	30	10	40
2	90	40	30	20	50
3	120	30	30	30	60
4	140	20	30	40	70
5	150	10	30	50	80

Σχήμα 2.6

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ



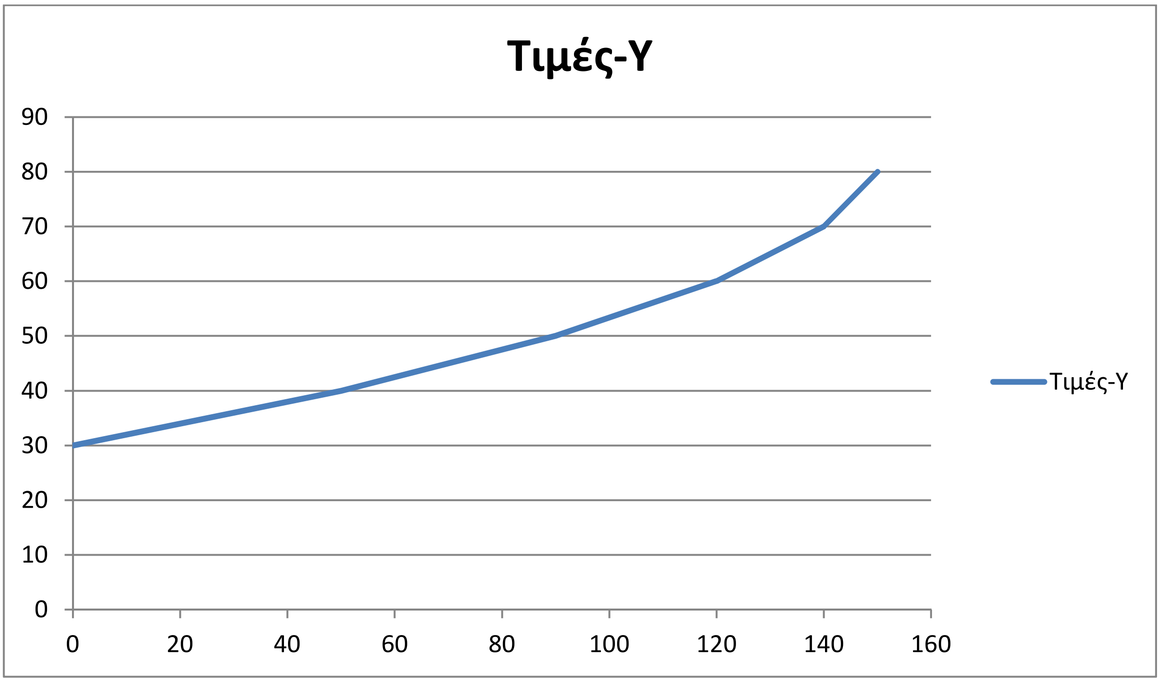
Οι τρείς τελευταίες στήλες του πίνακα 2.6 εμφανίζουν το κόστος παραγωγής σοκολάτας της Αλεξίας. Στο παράδειγμα αυτό, το κόστος του εργοστασίου της Αλεξίας είναι 30 ευρώ την ώρα και το κόστος του εργάτη είναι 10 ευρώ την ώρα. Αν διαθέτει έναν εργάτη το συνολικό κόστος της είναι 40 ευρώ. Αν πάρει έναν δεύτερο εργάτη, το συνολικό της κόστος θα φτάσει στα 50 ευρώ. Οι πληροφορίες που μας δίνει ο πίνακας 2.6 μας δείχνουν πως συνδέεται ο αριθμός των εργατών που έχει προσλάβει η Αλεξία με την ποσότητα της σοκολάτας που παράγει και το συνολικό κόστος παραγωγής της.

Το επόμενο σχήμα 2.7 απεικονίζει τη σχέση ανάμεσα στην παραγόμενη ποσότητα προϊόντος και το συνολικό κόστος της παραγωγής. Μετράει την παραγόμενη ποσότητα σοκολάτας στον οριζόντιο άξονα και το συνολικό κόστος στον κατακόρυφο άξονας. Το διάγραμμα αυτό ονομάζεται καμπύλη συνολικού κόστους.

Ας τονίσουμε ότι το συνολικό κόστος παίρνει πιο απότομη κλίση καθώς αυξάνεται η παραγόμενη ποσότητα. Η μορφή της καμπύλης συνολικού κόστους στο σχήμα αυτό εκφράζει τη μορφή συνάρτησης που απεικονίζεται στο σχήμα 2.7. Όταν ο χώρος παρασκευής σοκολάτας στο εργοστάσιο της Αλεξίας γεμίζει από κόσμο, κάθε πρόσθετος εργάτης προσθέτει λιγότερα στην παραγωγή σοκολάτας. Η ιδιότητα αυτή του φθίνοντος οριακού προϊόντος εκφράζεται με την τάση της κλίσης της συνάρτησης παραγωγής να γίνει πιο οριζόντια καθώς αυξάνεται ο αριθμός των απασχολούμενων εργατών. Ας αντιστρέψουμε τώρα αυτή τη λογική, όταν η Αλεξία παράγει μεγάλη ποσότητα σοκολάτας, πρέπει να έχει προσλάβει πολλούς εργάτες. Επειδή ο χώρος παραγωγής σοκολάτας στο εργοστάσιο είναι γεμάτος από εργάτες, η δημιουργία μιας πρόσθετης σοκολάτας έχει μεγάλο κόστος. Για το λόγω αυτό, καθώς αυξάνεται η παραγόμενη ποσότητα, η κλίση της καμπύλης του συνολικού κόστους, καθώς ανέρχεται, γίνεται πιο απότομη.

Σχήμα 2.7

ΚΑΜΠΥΛΗ ΣΥΝΟΛΙΚΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ



5.19 ΟΙ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΤΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ

Η ανάλυση του εργοστασίου σοκολάτας της Αλεξίας απέδειξε πως το συνολικό κόστος της επιχείρησης αντανακλά τη συνάρτηση παραγωγής της. Από τα στοιχεία για το συνολικό κόστος της επιχείρησης μπορούμε να εξάγουμε μερικά συναφή μέτρα του κόστους, που θα αποδειχθεί ότι είναι σημαντικά όταν επεξεργαζόμαστε τις αποφάσεις για την παραγωγή και την εργασία. Για να μπορέσουμε εξετάσουμε με ευκολία πως προκύπτουν οι διάφορες κατηγορίες κόστους, θα μελετήσουμε τον πίνακα 2.8. Ο πίνακας αυτός μας εμφανίζει στοιχεία για το κόστος μιας επιχείρησης που είναι εγκατεστημένο στη γειτονία της Αλεξίας, το εργοστάσιο παραγωγής και συσκευασίας αυγοτάραχου της Αφροδίτης.

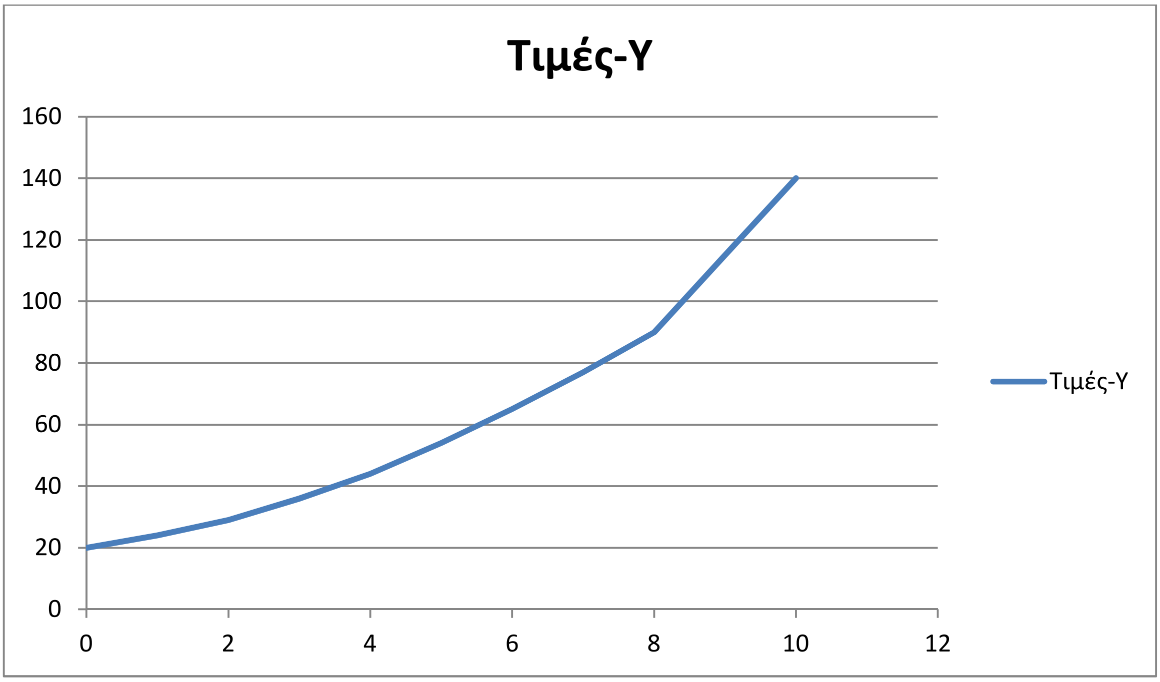
Η πρώτη στήλη του πίνακα απεικονίζει τον αριθμό των αυγοτάραχων που είναι δυνατό να παράγει η Αφροδίτη και τα οποία κυμαίνονται από 1 έως 10 κομμάτια την ώρα. Η δεύτερη στήλη δείχνει το συνολικό κόστος παραγωγής αυγοτάραχου για την Αφροδίτη. Στο σχήμα 2.8 διαγραμμίζεται η καμπύλη συνολικού κόστους της Αφροδίτης. Η ποσότητα αυγοτάραχου που μπορεί να παράγει (από την πρώτη στήλη) μετριέται στον οριζόντιο άξονα και το συνολικό κόστος (από τη δεύτερη στήλη) μετριέται στον κατακόρυφο άξονα. Η καμπύλη συνολικού κόστους της Αφροδίτης έχει μορφή παρόμοια με εκείνη της καμπύλης συνολικού κόστους της Αλεξίας. Πιο συγκεκριμένα, γίνεται περισσότερο απότομη καθώς μεγαλώνει η παραγόμενη ποσότητα, γεγονός που αντανακλά φθίνον οριακό προϊόν.

Πίνακας 2.8

Ποσότητα αυγοτάραχου (κομμάτια ανά ώρα)	Συνολικό κόστος (σε ευρώ)	Πάγιο κόστος (σε ευρώ)	Μεταβλητό κόστος (σε ευρώ)	Μέσο πάγιο κόστος (σε ευρώ)	Μέσο μεταβλητό κόστος (σε ευρώ)	Μέσο συνολικό κόστος (σε ευρώ)	Οριακό κόστος (σε ευρώ)
0	20,00	20,00	0,00	-	-	-	-
1	24,00	20,00	4,00	20,00	4,00	24,00	4,00
2	29,00	20,00	9,00	10,00	4,50	14,50	5,00
3	36,00	20,00	16,00	6,66	5,33	12,00	7,00
4	44,00	20,00	24,00	5,00	6,00	11,00	8,00
5	54,00	20,00	34,00	4,00	6,80	10,80	10,00
6	65,00	20,00	45,00	3,33	7,50	10,83	11,00
7	77,00	20,00	57,00	2,85	8,14	11,00	12,00
8	90,00	20,00	70,00	2,50	8,75	11,25	13,00
9	115,00	20,00	95,00	2,22	10,50	12,77	25,00
10	145,00	20,00	125,00	2,00	12,50	14,00	30,00

Σχήμα 2.8

ΚΑΜΠΥΛΗ ΣΥΝΟΛΙΚΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ



Το συνολικό κόστος της Αφροδίτης μπορεί να διαιρεθεί σε δύο τύπους. Ένα μέρος του συνολικού κόστους, το λεγόμενο σταθερό ή πάγιο κόστος (fixed cost), δε μεταβάλλεται όταν μεταβάλλεται η παραγωγή. Στο πάγιο κόστος της Αφροδίτης εμπεριέχεται και το ενοίκιο που πληρώνει, επειδή το κόστος αυτό παραμένει αμετάβλητο ανεξάρτητα από την ποσότητα του αυγοτάραχου που θα παράγει. Ομοίως, αν η Αφροδίτη κρίνει ότι είναι χρήσιμο να πάρει έναν τεχνικό υπολογιστών για να ελέγχει την αποδοτικότητα και τις ζημίες των υπολογιστών, ανεξάρτητα από το αυγοτάραχο που θα παράγει, ο μισθός του τεχνικού υπολογιστών θα παραμείνει ίδιος, άρα είναι στοιχείο του πάγιου κόστους. Η τρίτη στήλη του πίνακα 2.8

δείχνει το πάγιο κόστος της Αφροδίτης, το οποίο, στο παράδειγμα αυτό, είναι 5 ευρώ την ώρα.

Ένα μέρος, όμως, του συνολικού κόστους της επιχείρησης, που ονομάζεται μεταβλητό κόστος (variable cost), μεταβάλλεται όταν μεταβάλλεται η παραγόμενη ποσότητα. Το μεταβλητό κόστος της Αφροδίτης περιλαμβάνει το κόστος για κερί και υλικά συσκευασίας, όσο περισσότερο αυγοτάραχο παράγει τόσο περισσότερο κερί και ζελατίνες θα πρέπει να αγοράσει. Ομοίως, αν η Αφροδίτη πρέπει να προσλάβει περισσότερους εργάτες για να παράγει πιο πολύ αυγοτάραχο, οι μισθοί αυτών των εργατών είναι στοιχείο του μεταβλητού κόστους. Η τέταρτη στήλη του πίνακα δείχνει το μεταβλητό κόστος της Αφροδίτης.

Το συνολικό κόστος της επιχείρησης είναι το άθροισμα του πάγιου και του μεταβλητού κόστους. Στον πίνακα 2.8, το συνολικό κόστος, στη δεύτερη στήλη, ισούται με το πάγιο κόστος της τρίτης στήλης συν το μεταβλητό κόστος της τέταρτης στήλης.

Ως ιδιοκτήτρια του εργοστασίου της, η Αφροδίτη πρέπει να αποφασίσει πόση ποσότητα θα παράγει. Το κορυφαίο σημείο της απόφασης της, είναι το πώς μεταβάλλεται το κόστος της όταν μεταβάλλεται η παραγόμενη ποσότητα. Πριν πάρει την απόφασή της, η Αφροδίτη πρέπει να θέσει στον επόπτη παραγωγής, που απασχολεί, τα επόμενα δύο ερωτήματα σχετικά με το κόστος παραγωγής αυγοτάραχου:

1) Πόσο κοστίζει η παραγωγή μιας μπάρας αυγοτάραχου;
2) Πόσο κοστίζει η αύξηση της παραγωγής αυγοτάραχου κατά ένα κομμάτι;

Αν και εκ’ πρώτης όψεως, τα δύο αυτά ερωτήματα μπορεί να μοιάζουν, η εντύπωση όμως αυτή δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα. Είναι δύο εντελώς διαφορετικά ερωτήματα με διαφορετική απάντηση και έχουν εντελώς διαφορετική αξία για την επιχείρηση. Και οι δύο απαντήσεις είναι εξίσου σημαντικές για την κατανόηση του τρόπου με τον οποίο οι επιχειρήσεις καλούνται να πάρουν αποφάσεις.

Για να μετρήσουμε το κόστος μιας τυπικής παραγόμενης μονάδας, θα πρέπει να διαιρέσουμε το κόστος της επιχείρησης με την ποσότητα του προϊόντος που παράγει. Το συνολικό κόστος διαιρούμενο με το παραγόμενο προϊόν ονομάζεται μέσο συνολικό κόστος (average total cost). Επειδή το συνολικό κόστος είναι ακριβώς ίσο με το άθροισμα του πάγιου και του μεταβλητού κόστους, το μέσο συνολικό κόστος μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα του μέσου πάγιου κόστους συν το μέσο μεταβλητό κόστος. Το μέσο πάγιο κόστος (average fixed cost) είναι το κατά μονάδα προϊόντος σταθερό κόστος, είναι δηλαδή το πάγιο κόστος διαιρούμενο με την ποσότητα του προϊόντος και το μέσο μεταβλητό κόστος (average variable cost) είναι το κατά μονάδα προϊόντος μεταβλητό κόστος, δηλαδή το μεταβλητό κόστος διαιρούμενο με την ποσότητα του προϊόντος.

Μολονότι το μέσο συνολικό κόστος μας δείχνει το κόστος μιας τυπικής μονάδας, δε μας εμφανίζει όμως πολλά όσον αφορά τον τρόπο με τον οποίο θα μεταβάλλεται το συνολικό κόστος όταν η επιχείρηση αλλάζει την ποσότητα του προϊόντος που παράγει. Η τελευταία στήλη του πίνακα 2.8 δείχνει το ποσό κατά το οποίο αυξάνεται το συνολικό κόστος όταν η επιχείρηση αυξάνει την παραγωγή της κατά μία μονάδα. Το οριακό κόστος είναι το κόστος μιας επιπλέον μονάδας του προϊόντος και βρίσκεται από τη διαίρεση της μεταβολής του συνολικού κόστους με την μεταβολή της ποσότητας του προϊόντος (marginal cost).

Θα αποδειχθεί αρκετά χρήσιμο να εκφράσουμε αυτούς τους ορισμούς μαθηματικά. Αν Q είναι η ποσότητα, TC το συνολικό κόστος, ATC το μέσο συνολικό κόστος και MC το οριακό κόστος, έχουμε:

$$ATC = \frac{Συνολικό\ κόστος}{Ποσότητα} = \frac{TC}{Q}\ και$$

$$MC = \frac{(Μεταβολή\ του\ συνολικού\ κόστους)}{(Μεταβολή\ της\ ποσότητας)} = \frac{ΔTC}{ΔQ}.$$

Το ελληνικό δέλτα (Δ), αντιπροσωπεύει τη μεταβολή μιας μεταβλητής. Οι εξισώσεις δείχνουν πως από το συνολικό κόστος προκύπτουν το μέσο συνολικό κόστος και το οριακό κόστος.

Η Αφροδίτη, η εργοστασιάρχης του παραδείγματός μας, θα συμπεράνει ότι οι έννοιες του μέσου συνολικού κόστους και το οριακού κόστους είναι υπερβολικά σημαντικές όταν λαμβάνει αποφάσεις σχετικές με την ποσότητα αυγοτάραχου που θα παράγει. Όμως ας μην ξεχνάμε ότι οι έννοιες αυτές, στην πραγματικότητα, δε δίνουν στην Αφροδίτη νεοφερμένες πληροφορίες που αφορούν το κόστος παραγωγής στο εργοστάσιό της. Απλούστατα, το μέσο συνολικό κόστος και το οριακό κόστος εκφράζουν με νέο ελθών τρόπο πληροφορίες που ήδη υπάρχουν στο συνολικό κόστος της επιχείρησης της. Το μέσο συνολικό κόστος μας αποκαλύπτει το κόστος μιας τυπικής μονάδας προϊόντος αν το συνολικό κόστος διαμεριστεί ίσα σε όλες τις μονάδες που έχουν παραχθεί. Το οριακό κόστος μας δηλώνει την αύξηση του συνολικού κόστους που προκύπτει από την παραγωγή μιας πρόσθετης μονάδας προϊόντος.

5.20 ΟΙ ΜΟΡΦΕΣ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΤΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα δούμε πιο αναλυτικά τη συμπεριφορά των γραφικών απεικονίσεων του μέσου και του οριακού κόστους, όταν μελετάμε διεξοδικά τη συμπεριφορά των επιχειρήσεων. Στον οριζόντιο άξονα μετριέται η ποσότητα που παράγει η επιχείρηση και στον κατακόρυφο άξονα μετριούνται το οριακό και το μέσο κόστος. Στο σχήμα αυτό φαίνονται τέσσερις καμπύλες. Η πρώτη είναι η καμπύλου του μέσου συνολικού κόστους (ATC), η επόμενη είναι η καμπύλη του πάγιου κόστους (AFC), η τρίτη είναι η καμπύλη του μεταβλητού κόστους (AVC) και τέλος η καμπύλη του οριακού κόστους (MC).

Οι καμπύλες κόστους, για το εργαστήριο αυγοτάραχου της Αφροδίτης, έχουν μορφές που είναι πανομοιότυπες με τις μορφές των καμπυλών κόστους των περισσοτέρων επιχειρήσεων στην οικονομία. Ας διερευνήσουμε τα τρία χαρακτηριστικά αυτών των καμπυλών πιο συγκεκριμένα, τη μορφή του οριακού κόστους, τη μορφή του μέσου συνολικού κόστους και τη σχέση ανάμεσα στο οριακό και το μέσο συνολικό κόστος.

I. Αύξον οριακό κόστος. Το οριακό κόστος της Αφροδίτης ανέρχεται καθώς αυξάνεται η παραγόμενη ποσότητα αυγοτάραχου. Η σχέση αυτή αντικατοπτρίζει την ιδιότητα του φθίνοντος οριακού προϊόντος. Όταν η Αφροδίτη παράγει λίγη ποσότητα αυγοτάραχο, διαθέτει λίγους εργάτες και μεγάλο μέρος του εξοπλισμού της μένει αχρησιμοποίητο. Επειδή μπορεί εύκολα να χρησιμοποιήσει αυτούς του ανεκμετάλλευτους πόρους, η αύξηση της παραγωγής έχει σχετικά μικρό κόστος. Απεναντίας, όταν η Αφροδίτη παράγει μεγάλες ποσότητες αυγοτάραχο, το εργαστήριο της θα είναι γεμάτο από εργαζομένους και ο πιο πολύς εξοπλισμός θα είναι κατειλημμένος πλήρως. Για να αυξήσει η Αφροδίτη την παραγωγή της θα πρέπει να προσλάβει επιπλέον εργάτες, οι οποίοι θα είναι αναγκασμένοι να δουλεύουν σε δυσμενείς συνθήκες λόγω περιορισμένου χώρου από την πολυκοσμία, με αποτέλεσμα να περιμένουν στην ουρά για να λειτουργήσουν κάποιο μηχάνημα της παραγωγής. Αυτό συνεπάγει το κόστος του χρόνου, το οποίο μπορεί να προκαλέσει πρόβλημα στην παραγωγή. Έτσι, η παραγωγή ενός πρόσθετου αυγοτάραχου θα κοστίζει περισσότερο όταν η συνολικά παραγόμενη ποσότητα είναι ήδη στα ύψη.

II. Μέσο συνολικό κόστος σχήματος U. Η καμπύλη μέσου συνολικού κόστους της Αφροδίτης μοιάζει με το σχήμα U. Για να δούμε γιατί γίνεται αυτό, θα πρέπει να έρθει στο μυαλό μας το εξής, ότι το μέσο συνολικό κόστος είναι το άθροισμα του μέσου πάγιου κόστους και του μέσου μεταβλητού κόστους. Το μέσο πάγιο κόστος μειώνεται πάντοτε όταν αυξάνεται η παραγόμενη ποσότητα, επειδή το πάγιο κόστος επιμερίζεται σε μεγαλύτερο αριθμό μονάδων του προϊόντος. Το μέσο μεταβλητό κόστος πιο συχνά αυξάνεται όταν αυξάνεται η παραγωγή, εξαιτίας του φθίνοντος οριακού προϊόντος. Σε πολύ χαμηλά επίπεδα παραγωγής, όπως τα 3 με 4 αυγοτάραχα την ώρα, το μέσο συνολικό κόστος είναι υψηλό, επειδή το πάγιο κόστος επιμερίζεται σε ελάχιστες μόνο μονάδες. Το κατώτατο σημείο της καμπύλης σχήματος U εμφανίζεται στην ποσότητα που ελαχιστοποιεί το μέσο συνολικό κόστος. Η ποσότητα αυτή ονομάζεται αποτελεσματική κλίμακα (efficient scale) της επιχείρησης.

III. Η σχέση μεταξύ οριακού κόστους και μέσου συνολικού κόστους. Κάθε φορά που το οριακό κόστος είναι μικρότερο από το μέσο συνολικό κόστος, το μέσο συνολικό κόστος μειώνεται. Κάθε φορά που το οριακό κόστος είναι μεγαλύτερο από το μέσο συνολικό κόστος, το μέσο συνολικό κόστος αυξάνεται. Το γνώρισμα αυτό των καμπυλών κόστους της Αφροδίτης δεν είναι αποτέλεσμα σύμπτωσης, που εκπηγάζει από τα συγκεκριμένα νούμερα που χρησιμοποιούνται στο παράδειγμα, το παραπάνω συμπέρασμα ισχύει για όλες τις επιχειρήσεις. Ας δούμε για πιο λόγο συμβαίνει αυτό, ας πάρουμε ένα άλλο παράδειγμα. Το μέσο συνολικό κόστος είναι σας το μέσο βαθμό μας, στο λύκειο. Το οριακό κόστος είναι σαν το βαθμό που θα πάρουμε στο επόμενο τρίμηνο. Αν ο βαθμός που θα πάρουμε το επόμενο τρίμηνο θα είναι χαμηλότερος από το μέσο βαθμό που έχουμε μέχρι τώρα, ο μέσος βαθμός μας θα μειωθεί. Αντιθέτως, αν ο βαθμός που θα πάρουμε το επόμενο τρίμηνο είναι υψηλότερος από το μέσο βαθμό μας, ο μέσος βαθμός μας θα παρουσιάσει βελτίωση. Τα μαθηματικά του μέσου και του οριακού κόστους είναι τα ίδια ακριβώς μαθηματικά των μέσων και των οριακών βαθμών. Η σχέση αυτή ανάμεσα στο μέσο συνολικό κόστος και το οριακό κόστος δίνει ένα σοβαρό πόρισμα: η καμπύλη του οριακού κόστους τέμνει την καμπύλη του μέσου κόστους στην αποτελεσματική κλίμακα. Και αυτό γιατί σε χαμηλά επίπεδα παραγωγής, το οριακό κόστος είναι κάτω από το μέσο συνολικό κόστος και γι' αυτό το μέσο συνολικό κόστος μειώνεται. Όμως, μετά το σημείο τομής των δύο καμπυλών, το οριακό κόστος αυξάνεται πάνω από το μέσο συνολικό κόστος. Για το λόγο που μόλις είδαμε, το μέσο συνολικό κόστος πρέπει να αρχίσει να ανέρχεται από αυτό το επίπεδο παραγωγής. Έτσι, το σημείο αυτό τομής των δύο καμπυλών δείχνει το κατώτατο μέσο συνολικό κόστος. Αυτό παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην ανάλυση των ανταγωνιστικών επιχειρήσεων.

5.21 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΣΥΝΟΛΙΚΟΥ ΕΣΟΔΟΥ ΚΑΙ ΣΥΝΟΛΙΚΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ

Θα χρησιμοποιήσουμε αρχικά ένα εύκολο αριθμητικό παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι μια πλήρως ανταγωνιστική επιχείρηση που παράγει διαφόρων τυριά, των οποίων η αγοραία τιμή είναι 310 ευρώ, έχει τα στοιχεία κόστους και εσόδου που καταγράφονται στον πίνακα 2.9, για διάφορα επίπεδα παραγωγής του προϊόντος. Οι εναλλακτικές ποσότητες προϊόντος επισημαίνονται στη στήλη (1), το σταθερό, το μεταβλητό και το συνολικό κόστος γράφονται, αντίστοιχα, στις στήλες (2), (3) και (4), το συνολικό έσοδο στη στήλη (5) και τα κέρδη ή οι ζημιές στη στήλη (6). Με γνώμονα τα στοιχεία αυτά η επιχείρηση μεγιστοποιεί τα κέρδη της όταν παράγει έξι μονάδες προϊόντος.

Το επίπεδο προϊόντος που μεγιστοποιεί το κέρδος της επιχείρησης μπορεί να βρεθεί και από το σχήμα 2.9. Στο σχήμα αυτό, το διάστημα μεταξύ των καμπυλών συνολικού εσόδου και συνολικού κόστους αντιπροσωπεύει το συνολικό κέρδος. Το διάστημα αυτό μεγιστοποιείται όταν η κλίση της καμπύλης συνολικού κόστους γίνει ίση με την κλίση της ευθείας του συνολικού εσόδου, όταν δηλαδή οι δύο γραμμές είναι παράλληλες. Στο σχήμα, αυτό συμβαίνει όταν η επιχείρηση παράγει έξι μονάδες προϊόντος . Σε αυτό το σχήματα φαίνονται και τα αδρανή ή νεκρά σημεία (break-even points), σε κάθε ένα από αυτά το συνολικό έσοδο και το συνολικό κόστος είναι ίσα, οπότε το συνολικό κέρδος είναι μηδέν. Τα κέρδη αντιστοιχούν σε κατακόρυφες αποστάσεις πάνω στον οριζόντιο άξονα ενώ οι ζημιές σε αντίστοιχες αποστάσεις κάτω από αυτόν.

Η κλίση της καμπύλης συνολικού εσόδου καθορίζεται από την τιμή του προϊόντος, αφού το συνολικό έσοδο δεν είναι παρά το γινόμενο της ποσότητας του προϊόντος επί την τιμή του. Σε κάθε διαφορετική τιμή και διαφορετική καμπύλη συνολικού εσόδου αντιστοιχεί διαφορετικό συνολικό κέρδος και διαφορετική ποσότητα προϊόντος στην οποία το κέρδος μεγιστοποιείται. Για παράδειγμα, εάν η τιμή ήταν 150 ευρώ αντί για 310 ευρώ, η ποσότητα προϊόντος που θα είχε συμφέρον να παράγει η επιχείρηση θα ήταν διαφορετική. Ο πίνακας 2.10 καταγράφει στις στήλες (1), (2), (3) και (4) τα δεδομένα προϊόντος και κόστους του πίνακα 2.9 και στις στήλες (5) και (6), αντίστοιχα, το συνολικό κέρδος ή τη συνολική ζημιά με τιμή προϊόντος 150 ευρώ. Από τη στήλη (6) είναι εμφανές ότι η επιχείρηση έχει ζημιές σε όλα τα επίπεδα παραγωγής. Ακόμα και αν διακόψει την παραγωγή θα έχει ζημιά ίση με 400 ευρώ, ίση με το συνολικό σταθερό κόστος που πρέπει να πληρώσει στο βραχυχρόνιο διάστημα ανεξαρτήτως της ποσότητας παραγωγής, ενώ αν παράγει μερικές μονάδες η ζημιά της γίνεται μικρότερη. Αφού το συνολικό έσοδο καλύπτει το συνολικό μεταβλητό κόστος και αφήνει και ένα πλεονασματικό ποσό για την κάλυψη μέρους του συνολικού σταθερού κόστους, η επιχείρηση έχει συμφέρον να συνεχίσει την παραγωγή για να ελαχιστοποιήσει τη ζημιά. Τα στοιχεία του πίνακα 2.10 δείχνουν ότι αυτό θα επιτευχθεί όταν παράγονται 4 μονάδες προϊόντος.

Πίνακας 2.9

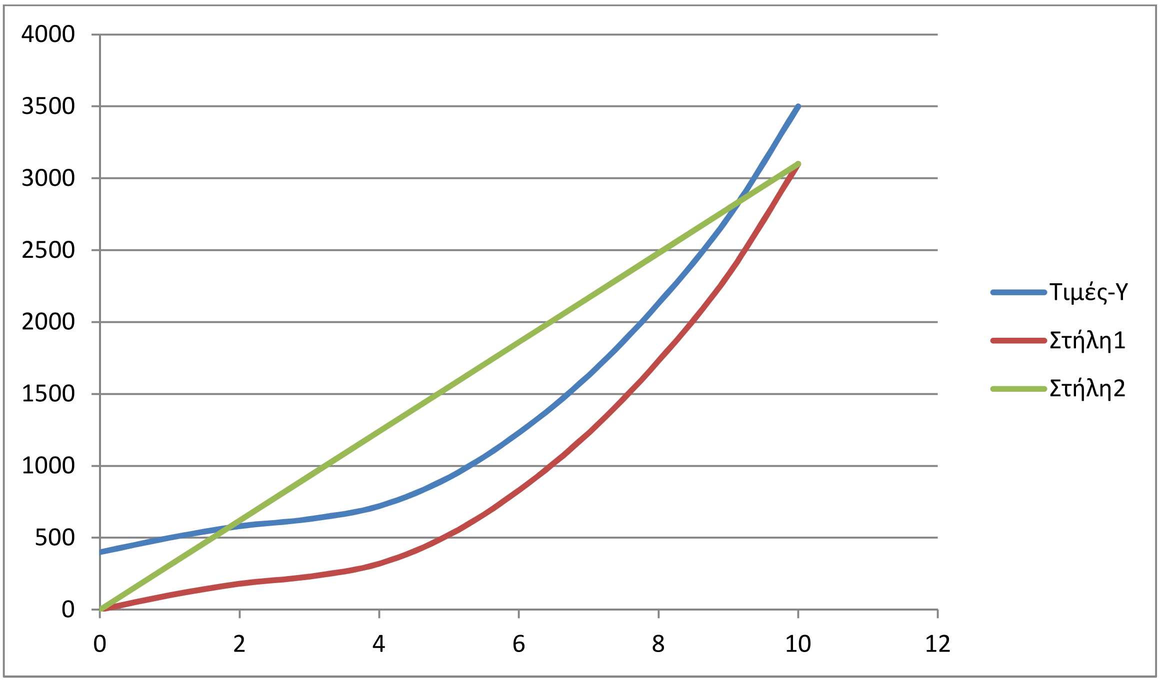
Προϊόν	Συνολικό σταθερό κόστος (ευρώ)	Συνολικό μεταβλητό κόστος (ευρώ)	Συνολικό κόστος (ευρώ)	Συνολικό έσοδο (τιμή προϊόντος =310 ευρώ)	Κέρδος (+) ή ζημιά (-) (ευρώ)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
0	400	0	400	0	-400
1	400	100	500	310	-190
2	400	180	580	620	+40
3	400	230	630	930	+300
4	400	320	720	1240	+520
5	400	520	920	1550	+630
6	400	830	1230	1860	+630
7	400	1230	1630	2170	+540
8	400	1730	2130	2480	+350
9	400	2330	2730	2790	+60
10	400	3100	3500	3100	-400

Σχήμα 2.9

ΜΠΛΕ: ΚΑΜΠΥΛΗΣ ΣΥΝΟΛΙΚΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ

ΡΟΖ: ΚΑΜΠΥΛΗ ΣΥΝΟΛΙΚΟΥ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ

ΠΡΑΣΙΝΗ: ΚΑΜΠΥΛΗΣ ΣΥΝΟΛΙΚΟΥ ΕΣΟΔΟΥ



Πίνακας 2.10

Προϊόν (τυριά)	Συνολικό σταθερό κόστος (ευρώ)	Συνολικό μεταβλητό κόστος (ευρώ)	Συνολικό κόστος (ευρώ)	Τιμή προϊόντος 150 Συνολικό έσοδο (ευρώ)	Τιμή προϊόντος 150 Κέρδος (+) ή ζημιά (-) (ευρώ)	Τιμή προϊόντος 70 Συνολικό έσοδο (ευρώ)	Τιμή προϊόντος 70 Κέρδος (+) ή ζημιά (-) (ευρώ)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
0	400	0	400	0	-400	0	-400
1	400	100	500	150	-350	70	-430
2	400	180	580	300	-280	140	-440
3	400	230	630	450	-180	210	-420
4	400	320	720	600	-120	280	-440
5	400	520	920	750	-170	350	-570
6	400	830	1230	900	-330	420	-810
7	400	1230	1630	1050	-580	490	-1140
8	400	1730	2130	1200	-930	560	-1570
9	400	2330	2730	1350	-1380	630	-2100

Αν η τιμή αντί για 150 ευρώ ήταν 70 ευρώ, τα σχετικά στοιχεία συνολικού εσόδου και καθαρού οικονομικού αποτελέσματος θα ήταν που αναφέρονται στις στήλες (7) και (8), και δείχνουν ότι η ζημιά θα μειωνόταν όταν θα ‘’έκλεινε’’ η παραγωγή. Με τόσο χαμηλή τιμή, το συνολικό έσοδο θα ήταν μικρότερο από το συνολικό μεταβλητό κόστος και σε όλα τα επίπεδα προϊόντος. Αν συνέχιζε η παραγωγή, η ζημιά θα ήταν ίση με το συνολικό σταθερό κόστος συν μέρος του συνολικού μεταβλητού κόστους που δε θα καλυπτόταν από το συνολικό έσοδο. Θα συνέφερε, επομένως, να αδρανοποιηθεί μόνιμα η παραγωγή για να μην επεκταθεί η ζημιά στο ύψος του συνολικού σταθερού κόστους.

Στο παραπάνω διάγραμμα η σχετική γραμμή συνολικού εσόδου θα βρίσκεται κάτω από τη γραμμή που αντιστοιχεί στην τιμή των 310 ευρώ. Με τη μεταβολή της θέσης της γραμμής θα αλλάζει η κλίση της. Το νέο σημείο ισορροπίας στο οποίο θα μεγιστοποιείται το κέρδος ή θα ελαχιστοποιείται η ζημιά αντιστοιχεί σε ποσότητα 6 μονάδων και κόστος 1000 ευρώ.

Αν η τιμή είναι 150 ευρώ, η καμπύλη του συνολικού εσόδου θα βρίσκεται κάτω από την καμπύλη του συνολικού κόστους σε όλο το μήκος της, η δε κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των δύο καμπυλών θα αντιστοιχεί στη ζημιά που θα έχει η επιχείρηση ανάλογα με την ποσότητα που θα πουλάει. Αφού, η γραμμή του συνολικού εσόδου τέμνει την καμπύλη του συνολικού μεταβλητού κόστους σε κάποια σημεία της, η επιχείρηση θα πρέπει να συνεχίσει τη λειτουργία της στο βραχυχρόνιο διάστημα ακόμη και με εμφάνιση ζημιάς. Θα μειώνει δε τη ζημιά όταν παράγει την ποσότητα προϊόντος στην οποία η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ του συνολικού κόστους και του συνολικού εσόδου είναι όσο γίνεται πιο μικρή, αυτό δεν συμβαίνει όταν η κλίση των δύο γραμμών είναι ίση.

Στο διάγραμμα αυτό, η διακεκομμένη γραμμή συνολικού εσόδου $ΣE_1$ αντιστοιχεί σε τιμή τόσο χαμηλή που δεν είναι δυνατή η πραγματοποίηση κερδών, όποια ποσότητα προϊόντος και αν πουληθεί. Η επιχείρηση θα ελαχιστοποιεί τη ζημιά παράγοντας 4 μονάδες προϊόντος, γιατί τότε ελαχιστοποιείται η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των καμπυλών $ΣE_1$

και $ΣΚ$ και η κλίση των καμπυλών είναι ίδια. Η καμπύλη κερδών-ζημιών θα βρίσκεται ολόκληρη κάτω από τον οριζόντιο άξονα, αφού όποια ποσότητα και αν πουληθεί στην τιμή των 150 ευρώ το αποτέλεσμα θα είναι ζημιογόνο. Η ζημιά αρχικά μειώνεται με την αύξηση της παραγωγής ενώ στη συνέχεια εμφανίζει μια άνοδο.

Στην ακόμη χαμηλότερη τιμή των 70 ευρώ η γραμμή του συνολικού εσόδου θα βρίσκεται σε όλο το μήκος της κάτω από την καμπύλη του συνολικού μεταβλητού κόστους, όπως συμβαίνει με τη γραμμή $ΣΕ_2$. Τότε οποιαδήποτε ποσότητα και αν παράγει η επιχείρηση δε θα είναι σε θέση να καλύψει εντελώς το συνολικό μεταβλητό κόστος ούτε μέρος του συνολικού σταθερού κόστους, άρα θα είναι πιο συμφέρον γι' αυτήν να κάνει παύση της παραγωγής. Στην εν λόγω περίπτωση η ζημιά της στο βραχυχρόνιο διάστημα θα περιοριστεί στο συνολικό σταθερό της κόστος. Και πάλι η καμπύλη κερδών-ζημιών θα βρίσκεται κάτω από τον οριζόντιο άξονα. Η ζημιά μεγαλώνει συνεχώς αμέσως με την παραγωγή της πρώτης μονάδας.

5.22 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΟΡΙΑΚΟΥ ΕΣΟΔΟΥ ΚΑΙ ΟΡΙΑΚΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ ΚΑΙ ΚΑΝΟΝΑΣ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΤΟΥ ΚΕΡΔΟΥΣ ΜΙΑΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΗΣ

Ένας άλλος τρόπος εύρεσης του επιπέδου του προϊόντος που μεγιστοποιεί το κέρδος ή ελαχιστοποιεί τη ζημιά μιας επιχείρησης είναι με σύγκριση του οριακού εσόδου και του οριακού κόστους του προϊόντος. Αν το οριακό έσοδο είναι μεγαλύτερο από το οριακό κόστος, η επιχείρηση θα έχει συμφέρον να παράγει μια επιπρόσθετη μονάδα γιατί έτσι θα έχει κάποιο επιπλέον κέρδος. Θα μεγιστοποιήσει το κέρδος της όταν παράγει όλες τις μονάδες που έχουν οριακό έσοδο μεγαλύτερο από το οριακό κόστος τους, θα σταματήσει δε να αυξάνει την παραγωγή της στην ποσότητα στην οποία το οριακό έσοδο της τελευταίας μονάδας εξισώνεται με το οριακό της κόστος.

Στα πρώτα στάδια της παραγωγής το οριακό έσοδο είναι συνήθως μεγαλύτερο από το οριακό κόστος και η παραγωγή περισσότερων μονάδων αυξάνει το κέρδος της επιχείρησης. Μετά όμως από ένα σημείο το οριακό κόστος, που έχει ήδη αρχίσει να αυξάνεται με την άνοδο της παραγωγής, θα γίνει μεγαλύτερο από το οριακό έσοδο και κάθε πρόσθετη παραγόμενη μονάδα θα βοηθάει στη μείωση του συνολικού κέρδους. Πριν ξεκινήσει το οριακό κόστος να γίνει μεγαλύτερο από το οριακό έσοδο, υπάρχει ένα σημείο στο οποίο αυτά τα δύο είναι ίσα μεταξύ τους. Αν η επιχείρηση διακόψει την παραγωγή στο σημείο στο οποίο το αυξανόμενο οριακό κόστος ισούται με το οριακό έσοδο (το οποίο είναι σταθερό), τότε θα μεγιστοποιεί τα κέρδη της επειδή θα έχει παράγει όλες τις μονάδες που έχουν οριακό έσοδο μεγαλύτερο από οριακό κόστος και δε θα υπάρχει δυνατότητα περαιτέρω άνοδο του κέρδους.

Η ανάγκη για ισότητα του οριακού εσόδου και του οριακού κόστους αποτελεί τον κανόνα μεγιστοποίησης του κέρδους μιας επιχείρησης. Σχετικά με τον κανόνα αυτόν, κρίνεται αναγκαίο να τονιστούν τρία σημεία:

- Πρώτον, επειδή το οριακό κόστος στην αρχή μειώνεται καθώς αυξάνεται η παραγωγή, ύστερα όμως από κάποιο επίπεδο αυξάνεται, αυτό είναι δυνατό να είναι ίσο με το οριακό έσοδο σε δύο σημεία: στην πρώτη φάση της παραγωγής όταν είναι φθίνον το οριακό κόστος αλλά και στη δεύτερη φάση όταν αυτό αυξάνεται. Για τη μεγιστοποίηση του κέρδους δεν φτάνει, το οριακό έσοδο και το οριακό κόστος να είναι ίσα, αλλά χρειάζεται επιπλέον το οριακό κόστος να είναι αυξανόμενο. Αν αυτό είναι φθίνον, συμφέρει να αυξηθεί η παραγωγή, γιατί με κάθε νέα παραγόμενη μονάδα προϊόντος θα ελαττώνεται το οριακό κόστος και θα δημιουργείται με αυτόν τον τρόπο επιπρόσθετο κέρδος.

- Δεύτερον, ο κανόνας της μεγιστοποίησης του κέρδους, με βάση την ισότητα του οριακού εσόδου και του οριακού κόστους, ισχύει όχι μόνο για πλήρως ανταγωνιστικές επιχειρήσεις αλλά για όλες τις επιχειρήσεις. Όταν υπάρχει πλήρως ανταγωνισμός, η τιμή του προϊόντος είναι καθορισμένη για τις επιχειρήσεις και, κατά συνέπεια, το οριακό έσοδο ισούται με την τιμή του προϊόντος. Ενώ, στις άλλες μορφές αγοράς το οριακό έσοδο είναι μικρότερο από την τιμή. Συμπερασματικά, καταλαβαίνουμε ότι στον πλήρη ανταγωνισμό η ισότητα μεταξύ οριακού εσόδου και οριακού κόστους ως συνθήκη μεγιστοποίησης του κέρδους μπορεί να εκφραστεί και ως ισότητα μεταξύ της τιμής του προϊόντος και του οριακού κόστους.

- Τρίτον, για να συμφέρει μια επιχείρηση η συνέχιση της παραγωγής, δεν αρκεί η ισότητα του οριακού εσόδου και του οριακού κόστους αλλά, επιπλέον, πρέπει η τιμή του προϊόντος να υπερβαίνει το μέσο μεταβλητό κόστος ώστε το συνολικό έσοδο να καλύπτει καθ' ολοκλήρου το μεταβλητό κόστος και μέρος τουλάχιστον του πάγιου κόστους. Αν η τιμή δεν καλύπτει το μέσο συνολικό κόστος (άθροισμα μέσου σταθερού και μέσου μεταβλητού κόστους), η επιχείρηση θα υφίσταται ζημιά με την παραγωγή του προϊόντος. Αν όμως η τιμή καλύπτει τουλάχιστον το μέσο μεταβλητό κόστος και μέρος του μέσου σταθερού κόστους, η ζημιά θα είναι μικρότερη από ότι αν η παραγωγή γίνει μηδέν. Οπότε η επιχείρηση θα ελαχιστοποιεί τη ζημιά της παράγοντας την ποσότητα στην οποία το οριακό έσοδο και το οριακό κόστος είναι ίσα.

Αν η τιμή του προϊόντος είναι μικρότερη από το μέσο μεταβλητό κόστος, το συνολικό έσοδο δεν καλύπτει το συνολικό μεταβλητό κόστος. Σε αυτήν την περίπτωση, η ζημιά θα ισούται με το συνολικό σταθερό κόστος συν το μέρος του συνολικού μεταβλητού κόστους που δεν καλύπτεται από το συνολικό έσοδο. Συνεπώς θα συμφέρει την επιχείρηση να κάνει παύση της παραγωγής ώστε να περιοριστεί η ζημιά στο συνολικό σταθερό κόστος, οπότε θα προσπεραστεί ο κανόνας της ισότητας οριακού εσόδου και κόστους.

Από τα ανωτέρω φαίνεται ότι ο κανόνας της ισότητας μεταξύ του οριακού εσόδου και του οριακού κόστους εξασφαλίζει μεγιστοποίηση των κερδών ή ελαχιστοποίηση της ζημιάς και εφαρμόζεται μόνον όταν η επιχείρηση έχει πλεονεκτήματα να συνεχίσει την παραγωγή, κάτι που εξαρτάται από τη σχέση ανάμεσα στην τιμή του προϊόντος και του μέσου μεταβλητού κόστους.

5.23 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΟΡΙΑΚΟΥ ΕΣΟΔΟΥ ΚΑΙ ΟΡΙΑΚΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ ΜΕ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΦΗ

Ο πίνακας 2.11 στις στήλες (1), (2), (3) και (4) εμφανίζει τα στοιχεία κόστους και εσόδου μιας επιχείρησης, όχι όμως για τα συνολικά αλλά για τα μέσα και τα οριακά μεγέθη. Η στήλη (1) αναφέρεται στην ποσότητα του προϊόντος και οι στήλες (2), (3) και (4) στο μέσο σταθερό, στο μέσο μεταβλητό και στο μέσο συνολικό κόστος, αντίστοιχα. Η στήλη (5) δείχνει το οριακό κόστος. Η στήλη (6) παρουσιάζει το οριακό έσοδο από κάθε πρόσθετη μονάδα προϊόντος, το οποίο στον πλήρη ανταγωνισμό ισούται με την τιμή, που στην περίπτωση αυτή ισούται με 620 ευρώ.

Πίνακας 2.11

Μέσο και οριακό κόστος και έσοδο μια πλήρως ανταγωνιστικής επιχείρησης

Προϊόν	Μέσο σταθερό κόστος (ευρώ)	Μέσο μεταβλητό κόστος (ευρώ)	Μέσο κόστος (ευρώ)	Οριακό κόστος (ευρώ)	Οριακό έσοδο: Τιμή προϊόντος 310 ευρώ	Οριακό έσοδο: Τιμή προϊόντος 150 ευρώ	Οριακό έσοδο: Τιμή προϊόντος 70 ευρώ
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
0	∞	0	∞		310	150	70
1	400,0	100,0	500,0	100	310	150	70
2	200,0	90,0	290,0	80	310	150	70
3	133,3	76,7	210,0	50	310	150	70
4	100,0	80,0	180,0	90	310	150	70
5	80,0	104,0	184,0	200	310	150	70
6	66,7	138,3	205,0	310	310	150	70
7	57,1	175,7	232,8	400	310	150	70
8	50,0	216,2	266,2	500	310	150	70
9	44,4	258,9	303,3	600	310	150	70

Από τη σύγκριση του οριακού εσόδου και του οριακού κόστους συμπεραίνουμε ότι η επιχείρηση γαλακτοκομικών πρέπει να παράγει μέχρι και την έκτη μονάδα προϊόντος, γιατί μέχρι αυτήν το οριακό έσοδο υπερβαίνει το οριακό κόστος, έτσι κάθε παραγόμενη μονάδα γαλακτοκομικών δίνει κάποιο κέρδος. Για παράδειγμα αν παράγει την τρίτη μονάδα θα προσθέσει στο συνολικό της κέρδος 260 ευρώ που είναι η διαφορά μεταξύ του οριακού εσόδου (310 ευρώ) και του οριακού κόστους (50 ευρώ) της εν λόγω μονάδας. Αν διακόψει την παραγωγή της εκεί δε μεγιστοποιεί το κέρδος της, επειδή μπορεί να παράγει και την τέταρτη μονάδα με επιπλέον κέρδος άλλα 220 ευρώ (310-90) καθώς και την πέμπτη μονάδα με επιπρόσθετο κέρδος 110 ευρώ (310-200). Επειδή όμως για την έβδομη μονάδα το οριακό κόστος είναι μεγαλύτερο από το οριακό έσοδο, αν την παράγει θα επέλθει ζημιά που θα της μειώσει τα συνολικά της κέρδη. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα, να μην μπορεί να παράγει την έβδομη μονάδα καθώς και όλες τις παραπάνω μονάδες για τις οποίες το οριακό κόστος είναι μεγαλύτερο από το οριακό έσοδο.

Αν υποθέσουμε ότι η τιμή του προϊόντος είναι 150 ευρώ και όχι 310 ευρώ, το οριακό έσοδο θα είναι 150 ευρώ, όπως παρατηρούμε στη στήλη (7) του πίνακα 2.11. Σε αυτό το ενδεχόμενο από τη σύγκριση του οριακού εσόδου και του οριακού κόστους διαφαίνεται ότι συμφέρει η παραγωγή μόνο τεσσάρων μονάδων προϊόντος (το οριακό κόστος και το οριακό έσοδο δεν εξισώνονται πλήρως, λόγω αδιαιρετότητας των παραγόμενων μονάδων, αλλά το οριακό έσοδο είναι μεγαλύτερο από το οριακό κόστος της τέταρτης μονάδας και μικρότερο από το οριακό κόστος της πέμπτης μονάδας). Στο επίπεδο όμως αυτό της παραγωγής το μέσο κόστος είναι 180 ευρώ ενώ η τιμή είναι 150 ευρώ. Επομένως, θα υπάρξει ζημιά 30 ευρώ ανά μονάδα προϊόντος δηλαδή συνολική ζημιά 120 ευρώ. Παρά τη ζημιά η επιχείρηση στο βραχυχρόνιο διάστημα θα συνεχίσει να παράγει εφόσον η τιμή (150 ευρώ) είναι μεγαλύτερη από το μέσο μεταβλητό κόστος (80 ευρώ), οπότε καλύπτεται ολόκληρο το συνολικό μεταβλητό κόστος αλλά και μέρος του συνολικού σταθερού κόστους. Έτσι, ενώ παράγοντας τέσσερις μονάδες γαλακτοκομικών προϊόντων η ζημιά είναι 120 ευρώ (400 ευρώ σταθερό συνολικό κόστος μείον το ποσό των 280 ευρώ), αν διακοπτόταν η παραγωγή η ζημιά θα ήταν ίση με 400 ευρώ, δηλαδή με ολόκληρο το συνολικό σταθερό κόστος.

Τέλος, αν η τιμή ήταν 70 ευρώ, το οριακό έσοδο θα ήταν επίσης 70 ευρώ, όπως βλέπουμε στη στήλη (8). Με αυτήν την τιμή η επιχείρηση εξισώνει οριακό έσοδο και οριακό κόστος όταν παράγει τρεις μονάδες προϊόντος (και στην περίπτωση αυτή το οριακό έσοδο δεν εξισώνεται ακριβώς με το οριακό κόστος αλλά είναι υψηλότερο από το οριακό κόστος της τρίτης μονάδας και χαμηλότερο από το οριακό κόστος της τέταρτης μονάδας). Αλλά τότε η τιμή είναι μικρότερη από το μέσο μεταβλητό κόστος κατά 6,7 ευρώ και συνεπώς η επιχείρηση πρέπει να τερματίσει την παραγωγή για να ελαχιστοποιήσει τη συνολική ζημιά της στο ύψος του συνολικού σταθερού κόστους της, δηλαδή των 400 ευρώ. Αν παρήγαγε τις τρεις μονάδες, η ζημιά θα ήταν 420 ευρώ.

5.24 ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΗΣ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΤΟΥ ΚΕΡΔΟΥΣ ΜΕ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥΣ ΟΡΟΥΣ

Ο κανόνας για τη μεγιστοποίηση του κέρδους μπορεί να εξεταστεί και μαθηματικά:

Έστω ότι λ αντιπροσωπεύει το συνολικό κέρδος, το οποίο είναι ίσο με τη διαφορά μεταξύ συνολικού εσόδου (ΣΕ) και συνολικού κόστους (ΣΚ). Λαμβάνοντας την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης ως προς την ποσότητα του προϊόντος (Π) και θέτοντας την ίση με μηδέν έχουμε

$$\frac{d\lambda}{d\Pi} = \frac{d\Sigma E}{d\Pi} - \frac{d(\Sigma K)}{d\Pi} = 0 \text{ (1).}$$

Η συνάρτηση (1) δείχνει τη συνθήκη που πρέπει να ισχύει για να μεγιστοποιηθεί η συνάρτηση του κέρδους.

Γνωρίζουμε ήδη ότι:

$$OE = \frac{d(\Sigma E)}{d\Pi} \text{ και}$$

$$OK = \frac{d(\Sigma K)}{d\Pi}.$$

Επομένως, από τη σχέση (1) προκύπτει ότι για να υπάρξει μεγιστοποίηση του κέρδους πρέπει να ισχύει η ισότητα $OE = OK$ (με την προϋπόθεση ότι $d^2\lambda/\delta\Pi^2 < 0$).

Στον πλήρη ανταγωνισμό η τιμή του προϊόντος είναι δεδομένη για την επιχείρηση και σταθερή. Οπότε

$$\frac{d(\Sigma E)}{d\Pi} = \frac{d(\Sigma K)}{d\Pi} = T = OE.$$

Ο κανόνας της μεγιστοποίησης του κέρδους μπορεί να εκφραστεί και με εναλλακτικό τρόπο: Το συνολικό κέρδος μεγιστοποιείται επίπεδο παραγωγής στο οποίο το οριακό κέρδος μετατρέπεται σε μηδέν. Το οριακό κέρδος (Ολ) είναι το κέρδος που προκύπτει από την πώληση μιας επιπλέον μονάδας προϊόντος. Δηλαδή $O\lambda = OE - OK$

$$\text{όπου } O\lambda = \frac{d\lambda}{d\Pi}.$$

Ας υποθέσουμε ότι η αγοραία τιμή του προϊόντος είναι 70 ευρώ. Το οριακό έσοδο θα είναι επίσης ίσο με 70 ευρώ εφόσον στον πλήρη ανταγωνισμό $T = OE$.

Έστω επίσης ότι η συνάρτηση του συνολικού κόστους σε σχέση με την ποσότητα του προϊόντος έχει τη μορφή

$$\Sigma K = 120 + 14\Pi - 6\Pi^2 + 4\Pi^3$$

Το οριακό κόστος ισούται με τη μεταβολή του συνολικού κόστους καθώς η ποσότητα του προϊόντος μεταβάλλεται, έτσι ισούται με την παράγωγο της συνάρτησης κόστους, δηλαδή

$$OK = \frac{d\Sigma K}{d\Pi} = 14 - 12\Pi + 12\Pi^2$$

Εξισώνοντας ΟΕ και ΟΚ έχουμε

$$70 = 14 - 12\Pi + 12\Pi^2$$

Λύνοντας ως προς Π εντοπίζουμε δύο ρίζες, $\Pi = -1{,}7$ και $\Pi = 2{,}7$.

Εφόσον η ποσότητα του προϊόντος δεν μπορεί να είναι αρνητική, η ποσότητα στην οποία μεγιστοποιείται το κέρδος είναι 2,7 μονάδες.

Τέλος, ο κανόνας μεγιστοποίησης του κέρδους μπορεί επίσης να εκφραστεί και με βάση ότι το συνολικό κέρδος μεγιστοποιείται όταν το οριακό κέρδος είναι ίσο με μηδέν. Λαμβάνοντας, όπως παραπάνω, $T = OE = 70$ και $\Sigma K = 120 + 14\Pi - 6\Pi^2 + 4\Pi^3$, και ορίζοντας το συνολικό κέρδος λ ως ίσο με $\Sigma E - \Sigma K$ και το συνολικό έσοδο ως $T.\Pi = 70\Pi$, αντικαθιστούμε στη συνάρτηση του συνολικού κέρδους και έχουμε

$$\lambda = 70\Pi - (120 + 14\Pi - 6\Pi^2 + 4\Pi^3)$$

Αφού το οριακό κέρδος ορίζεται ως η μεταβολή του συνολικού κέρδους καθώς μεταβάλλεται η ποσότητα του προϊόντος, η παραπάνω σχέση γίνεται

$$O\lambda = \frac{d\lambda}{d\Pi} = 70 - (14 - 12\Pi + 12\Pi^2)$$

Δεδομένου ότι το συνολικό κέρδος μεγιστοποιείται όταν $O\lambda = 0$, θέτουμε την παραπάνω παράσταση ίση με 0 και έχουμε

$$70 - (14 - 12\Pi + 12\Pi^2) = 0$$

$$70 - 14 + 12\Pi - 12\Pi^2 = 0$$

$$56 + 12\Pi - 12\Pi^2 = 0$$

Λύνοντας ως προς Π θα έχουμε τις ρίζες 2,7 και 1,7, που βέβαια θα είναι το ίδιο αποτέλεσμα που είχαμε βρει προηγουμένως.

5.25 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

Το κόστος παραγωγής ενός προϊόντος επηρεάζεται αποκλειστικά από τις τιμές των παραγωγικών συντελεστών και από τη σχέση των ποσοτήτων των συντελεστών αυτών προς την ποσότητα του προϊόντος που παράγεται. Η σχέση μεταξύ των συντελεστών παραγωγής και του προϊόντος, δηλαδή μεταξύ των εισροών και των εκροών της παραγωγικής διαδικασίας, ονομάζεται συνάρτηση παραγωγής (production function). Αυτή καθορίζει τις ποσότητες των παραγωγικών συντελεστών που απαιτούνται για την παραγωγή ορισμένης ποσότητας προϊόντος και για το λόγο αυτό επηρεάζει το κόστος παραγωγής. Αν το δούμε το θέμα λίγο διαφορετικά, η συνάρτηση παραγωγής ενός προϊόντος προσδιορίζει τη μέγιστη ποσότητα που είναι δυνατόν να παραχθεί με δεδομένες ποσότητες εισροών (παραγωγικούς πόρους) και με δεδομένο το επίπεδο της τεχνολογίας και τεχνογνωσίας που σχετίζεται με την παραγωγή. Η συνάρτηση παραγωγής είναι δυνατό να παρουσιασθεί με τη μορφή πίνακα, διαγράμματος ή μαθηματικής εξίσωσης.

Μια απλή μορφή της συνάρτησης παραγωγής είναι η παρακάτω:

$$\Pi = \varphi(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, \dots X_\nu)$$

όπου το Π, το οποίο συμβολίζει μια συγκεκριμένη ποσότητα προϊόντος, είναι συνάρτηση των ποσοτήτων των παραγωγικών συντελεστών $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, \dots X_\nu$. Από αυτούς το X_1 θα μπορούσε να είναι άμεση εργασία, το X_2 έμμεση εργασία, το X_3 μηχανικός εξοπλισμός, το X_4 πρώτες και βοηθητικές ύλες, το X_5 ενεργειακοί πόροι, το X_6 διοικητικές υπηρεσίες και λοιπά. Συνηθέστερα στη συνάρτηση παραγωγής αναφέρονται οι δύο πιο βασικοί παραγωγικοί συντελεστές, το κεφάλαιο (Κ) και η εργασία (Ε), οπότε αυτή παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\Pi = \varphi(K, E)$$

Στον πίνακα 2.12 εμπεριέχονται στοιχεία για μια υποθετική συνάρτηση παραγωγής με την οποία εργασία και κεφάλαιο χρησιμοποιούνται σε διάφορους συνδυασμούς για να παραχθούν εναλλακτικές ποσότητες ενός προϊόντος. Στην πρώτη στήλη του πίνακα αυτού αναφέρονται σε παρένθεση μονάδες εργασίας από 0 μέχρι 10, ενώ στην τελευταία σειρά, επίσης σε παρένθεση, μονάδες κεφαλαίου πάλι από 0 μέχρι 10. Στις άλλες στήλες και σειρές υπάρχουν υποθετικές ποσότητες του προϊόντος που μπορούν να παραχθούν με κάθε συνδυασμό ποσοτήτων Ε και Κ.

Πίνακας 2.12

Συνάρτηση Παραγωγής

Μονάδες εργασίας (Ε)

(10)	244	602	954	1204	1414	1588	1744	1840	1876	1900
(9)	252	606	946	1188	1386	1548	1692	1780	1814	1836
(8)	256	598	918	1144	1328	1476	1606	1684	1716	1736
(7)	252	578	876	1088	1256	1386	1502	1570	1598	1620
(6)	240	542	820	1016	1166	1280	1378	1434	1458	1480
(5)	220	486	750	926	1056	1150	1232	1276	1296	1310
(4)	184	410	620	770	876	946	992	1024	1040	1050
(3)	136	310	464	576	654	708	738	758	770	776
(2)	80	194	294	366	418	454	474	486	494	496
(1)	20	72	116	150	172	188	198	206	210	212
(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)

Μονάδες κεφαλαίου (Κ)

Γίνεται η υπόθεση ότι για να παραχθεί οποιαδήποτε ποσότητα προϊόντος είναι αναγκαία η χρησιμοποίηση και των δύο συντελεστών. Πιο συγκεκριμένα, αν η ποσότητα του ενός ή του άλλου συντελεστή είναι μηδέν, δεν μπορεί να παραχθεί προϊόν. Γι’ αυτό ακριβώς οι ποσότητες προϊόντος ξεκινούν από το συνδυασμό μιας μονάδας εργασίας και μιας μονάδας κεφαλαίου. Από τα στοιχεία του πίνακα 2.12 παρατηρούμε ότι η ποσότητα του παραγόμενου προϊόντος μπορεί να αυξηθεί είτε με προσθήκη επιπλέον μονάδων του ενός συντελεστή σε σταθερή ποσότητα του δεύτερου συντελεστή ή με ταυτόχρονη αύξηση των ποσοτήτων και των δύο συντελεστών. Σε κάποιες περιπτώσεις, όταν η ποσότητα του ενός συντελεστή διατηρείται σταθερή και αυξάνεται διαρκώς η ποσότητα του άλλου, η ποσότητα του παραγόμενου προϊόντος αυξάνεται μέχρι κάποιο σημείο, αργότερα όμως αρχίζει να μειώνεται.

Είδαμε πιο πάνω ότι η αναλογία των χρησιμοποιούμενων παραγωγικών εισροών ποικίλλει. Όταν μια τεχνική παραγωγής χρησιμοποιεί συγκριτικά μεγαλύτερο μέρος της εργασίας από το κεφάλαιο (παραδείγματος χάριν 10 μονάδες εργασίας και 2 κεφαλαίου), θεωρείται ως έντασης εργασίας (labour intensive) ενώ όταν ξοδεύει συγκριτικά περισσότερο κεφάλαιο από εργασία (για παράδειγμα 10 μονάδες κεφαλαίου και 2 εργασίας) θεωρείται ως έντασης κεφαλαίου (capital intensive). Ο βαθμός έντασης της χρήσης του κάθε συντελεστή εξαρτάται τόσο από την τεχνολογία παραγωγής όσο και από τις τιμές των συντελεστών.

Η παραγωγική διαδικασία μπορεί να κατηγοριοποιηθεί σε τέσσερα επίπεδα:

Η πρώτη κατηγορία είναι η συνεχής παραγωγική διαδικασία (process production), κατά την οποία εφαρμόζεται τεχνολογία που επιτρέπει τη διαρκή ροή παραγωγικών υλών για τη συνεχή παραγωγή προϊόντος. Στην κατηγορία αυτή μπορούμε να τοποθετήσουμε τη διαδικασία της παραγωγής χάλυβα. Τα εργοστάσια αυτά παραμένουν ανοικτά και λειτουργούν όλο το εικοσιτετράωρο, όλη την εβδομάδα, γιατί είναι πολυέξοδο να απενεργοποιούνται οι μηχανές και γενικότερα να διακόπτεται σε τακτά χρονικά διαστήματα η λειτουργία του. Επίσης, η συνεχής παραγωγική διαδικασία εφαρμόζεται στην διύλιση του πετρελαίου, στην παραγωγή χαρτιού, στην παραγωγή υαλοπινάκων και άλλα. Από αυτά κατανοούμε ότι γι' αυτήν την παραγωγική διαδικασία απαιτούνται υπέρογκες ποσότητες υλικού κεφαλαίου για εγκαταστάσεις και μηχανολογικό εξοπλισμό και μεγάλος αυτοματισμός ενώ, αντίθετα δεν χρειάζεται πολύ εργασία. Δεδομένου ότι όσο πιο πολύ αξιοποιούνται οι παραγωγικές εγκαταστάσεις τόσο μικρότερο τείνει να είναι το κόστος της παραγόμενης μονάδας προϊόντος, για να εξασφαλίζεται υψηλή παραγωγικότητα χρειάζεται συνήθως να λειτουργεί η παραγωγική μονάδα στο μέγιστο ή πλησίον στο μέγιστο επίπεδο παραγωγής της ολόκληρο το εικοσιτετράωρο και κάθε ημέρα. Στις διαδικασίες αυτού του είδους υπάρχει έλλειψη ευελιξίας καθώς δεν είναι δυνατή η αυξομείωση των παραγωγικών συντελεστών για την αυξομείωση του παραγόμενου προϊόντος.

Η δεύτερη κατηγορία είναι της παραγωγής κατά παραγγελία (custom-order production). Το προϊόν παράγεται κατά κανόνα για συγκεκριμένο αγοραστή. Για παράδειγμα μια βίλα κατασκευάζεται για ορισμένο πελάτη με βάση τα τις δικές του προδιαγραφές και τα δικά του γούστα. Κάποιο κότερο με εσωτερικά δωμάτια, φτιάχνεται για κάποιο πελάτη με τις δικές του προτιμήσεις. Με τον ίδιο τρόπο δημιουργείται και ο μηχανολογικός εξοπλισμός εργοστασίων χάλυβα, τσιμέντου, χημικών προϊόντων και πολλών άλλων ειδών, σύμφωνα με την κάλυψη αναγκών των εργοστασίων αυτών. Οι θαλάσσιοι μαχητικοί εξοπλισμοί ναυπηγούνται για την κυβέρνηση με βάση ειδικές προδιαγραφές. Δεδομένου ότι σε τέτοιες περιπτώσεις ένα προϊόν πρέπει κάθε φορά να σχεδιαστεί ειδικά για συγκεκριμένο αγοραστή και να παραχθεί βάση των δικών του απαιτήσεων, απαιτείται κατά κανόνα η απασχόληση επιστημονικού και εργατικού προσωπικού υψηλής κατάρτισης, εξειδίκευσης και τεχνογνωσίας. Με την εφαρμογή αυτού του τύπου παραγωγικής διαδικασίας είναι δυνατό να ευδοκιμήσει υψηλή παραγωγικότητα ακόμη και με μικρή σχετικά κλίμακα παραγωγής. Επιπροσθέτως, η παραγωγική μονάδα έχει ευελιξία για την αυξομείωση των ποσοτήτων των χρησιμοποιούμενων παραγωγικών συντελεστών και της ποσότητας του παραγόμενου προϊόντος.

Η τρίτη κατηγορία παραγωγικών διαδικασιών είναι της δύσκαμπτης μαζικής παραγωγής (rigid mass production), με την οποία υπάρχει τυποποίηση των χρησιμοποιούμενων πρώτων υλών, της τεχνολογίας, της διαδικασίας παραγωγής και του παραγόμενου προϊόντος. Η διαδικασία αυτή είναι κατά κανόνα μεγάλης έντασης κεφαλαίου και χρησιμοποιείται για την παραγωγή μεγάλης ποσότητας και σταθερής ποιότητας προϊόντος. Η επιχείρηση που εφαρμόζει τέτοια διαδικασία δεν έχει ευχέρεια να παραλλάσει το προϊόν της για να ικανοποιεί τις ιδιαίτερες απαιτήσεις επιμέρους πελατών της. Αντίθετα, αποβλέπει με διαφήμιση ή με άλλους τρόπους να κάνει αποδεκτές τις προτιμήσεις τους ώστε να τους αρέσουν τα προϊόντα της όπως τα παράγει.

Η τελευταία κατηγορία παραγωγικών διαδικασιών, η τέταρτη, είναι της ευέλικτης μαζικής παραγωγής (flexible mass production), με την οποία επιχειρείται να εξασφαλίζονται τα πλεονεκτήματα της μαζικής παραγωγής αλλά να υπάρχει και σχετική ευελιξία με την παράλληλη παραγωγή ποικιλίας προϊόντων με τη χρήση διαφορετικών συνδυασμών τυποποιημένων και μαζικά παραχθέντων τμημάτων τους. Με τη μέθοδο αυτή μπορούν να παράγονται διαφορετικά προϊόντα για διαφορετικά τμήματα της αγοράς και να υπάρχει έτσι διαφοροποίηση στην παραγωγή και ευρύτερη κάλυψη της συνολικής αγοράς. Για παράδειγμα, μπορεί στην κατασκευή αυτοκινήτων και φορτηγών σασί, τα σώματα, τα φρένα και άλλα μέρη διαφόρων τύπων αυτοκινήτων και φορτηγών, να είναι τυποποιημένα και να παράγονται μαζικά για να υπάρχουν οικονομίες στην παραγωγή, αλλά μετά να γίνεται διαφοροποίηση στο τελικό προϊόν από πλευράς ιπποδύναμης της μηχανής, ταπετσαρίας, χρώματος και άλλα.

5.26 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΕΣΟΔΩΝ

Η συνάρτηση ολικών εσόδων ονομάζεται το συνολικό ποσό που αποκτάται από την πώληση q μονάδων ενός αγαθού και ορίζεται ως $R(q) = ποσότητα * τιμή = p * q$. Συνήθως η τιμή εξαρτάται από την ποσότητα είναι δηλαδή συνάρτηση της ποσότητας και έτσι έχουμε $p = p(q)$ και $R(q) = p(q)q$.

Η συνάρτηση μέσων εσόδων ορίζεται ως $AR(q) = R(q)/q$. Είναι το έσοδο που έχουμε από κάθε μονάδα του αγαθού που πωλήσαμε.

5.27 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΗΣ

Στις σύγχρονες οικονομίες η ζήτηση για κατανάλωση αποτελεί το μεγαλύτερο μέρος της συνολικής ζήτησης.

Ο κυριότερος παράγοντας της κατανάλωσης είναι το διαθέσιμο εισόδημα. Δεν είναι όμως ο μόνος παράγοντας, υπάρχουν και άλλοι τους οποίους θα αναφέρουμε παρακάτω.

Ο Keynes διαπίστωσε πρώτος τη μεγάλη σημασία που έχει το ύψος του εισοδήματος μιας οικονομίας για τον προσδιορισμό του μεγέθους της κατανάλωσης και διατύπωσε μια ορισμένη σχέση μεταξύ του εισοδήματος και της κατανάλωσης. Η σχέση αυτή είναι η βάση της θεωρίας για τον προσδιορισμό του εισοδήματος στην οικονομία.

Η σχέση μεταξύ κατανάλωσης και εισοδήματος, δηλαδή η συνάρτηση κατανάλωσης, στην οικονομία μπορεί να είναι γραμμική ή μη γραμμική.

Η γραμμική συνάρτηση της κατανάλωσης έχει τις εξής δύο μορφές:

1) $C = \gamma * Y, \acute{o}\pi o \upsilon$:

C: δαπάνη κατανάλωσης,

Y: εισόδημα,
γ: ποσοστό του εισοδήματος που ξοδεύεται για κατανάλωση.

2) $C = \alpha + bY, \acute{o}\pi o \upsilon$:

C= δαπάνη κατανάλωσης,

Y= ακαθάριστο εισόδημα = διαθέσιμο εισόδημα (Yd), γιατί θεωρούμε προσωρινά για απλοποίηση της παρουσίασης ότι δεν υπάρχει δημόσιος τομέας (φόροι), αδιανέμητα κέρδη ανωνύμων εταιριών και εισφορές κοινωνικών ασφαλίσεων,

α: Αυτόνομη κατανάλωση, δηλαδή το σταθερό μέρος της κατανάλωσης που δεν εξαρτάται από το εισόδημα. Έχει την έννοια, ότι ακόμη στην ‘‘θεωρητική’’ περίπτωση που το εισόδημα των καταναλωτών είναι μηδέν, η κατανάλωση θα είναι $C = \alpha$, δηλαδή θετική. Σε αυτό το σημείο κατανοούμε ότι το εισόδημα δεν επαρκεί για την ικανοποίηση των καταναλωτικών αναγκών, τα άτομα χρησιμοποιούν αποταμιεύσεις προηγούμενων χρόνων ή καταλήγουν σε κάποιο δανεισμό.

b: Οριακή ροπή για κατανάλωση, δηλαδή ο λόγος της μεταβολής της κατανάλωσης προς τη μεταβολή του εισοδήματος (ΔC/ΔY) και δείχνει την ποσοστιαία μεταβολή της κατανάλωσης που θα προέλθει από τη μεταβολή του εισοδήματος κατά 1% ή πόσο θα μεταβληθεί η κατανάλωση από την αλλαγή του εισοδήματος κατά (1) νομισματική μονάδα. Η οριακή ροπή κατανάλωσης είναι μεγαλύτερη από το μηδέν και μικρότερη από τη μονάδα. Δηλαδή:

$$O.P.K = \frac{\Delta C}{\Delta Y}$$

και

$$O \leq \frac{\Delta C}{\Delta Y} \leq 1.$$

Οι εμπειρικές έρευνες κατέληξαν στο ότι η σχέση (συνάρτηση) κατανάλωσης και εισοδήματος στο βραχυχρόνιο διάστημα είναι γραμμική με την παραπάνω μορφή, δηλαδή,

$$Y = \alpha + bY.$$

Μια άλλη παράμετρος σχετική με τη συνάρτηση κατανάλωσης είναι η Μέση ροπή για κατανάλωση (M.P.K.), η οποία ισούται με το λόγο του επιπέδου κατανάλωσης προς το αντίστοιχο επίπεδο κατανάλωσης (C/Y) και εκφράζει το ποσοστό του συνολικού εισοδήματος που διατίθεται για κατανάλωση. Δηλαδή,

$$M.P.K. = \frac{C}{Y}.$$

5.28 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΑΠΟΤΑΜΙΕΥΣΗΣ

Η συνάρτηση αποταμίευσης μπορεί να προσδιοριστεί με μεγάλη ευκολία από την συνάρτηση κατανάλωσης, δεδομένου ότι, εξ' ορισμού έχουμε Y=C+S.

Η αποταμίευση, κατά συνέπεια, μπορεί να υπολογιστεί αν από το εισόδημα αφαιρεθεί η κατανάλωση: S=Y-C.

Γι' αυτό, η μορφή της συνάρτησης αποταμίευσης εξαρτάται από τη μορφή συνάρτησης κατανάλωσης. Εάν η συνάρτηση κατανάλωσης είναι της μορφής C=α+bY, η συνάρτηση της αποταμίευσης θα είναι:

$$S = Y - (a + bY) \text{ ή } S = -a + (1 - b)Y, όπου:$$

(-α): το μέγεθος μείωσης της αποταμίευσης (των προγενέστερων ετών) όταν το εισόδημα είναι μηδέν.

(1-b): Οριακή ροπή για αποταμίευση. Η Ο.Ρ.Α. είναι ίση με το λόγο της μεταβολής της αποταμίευσης προς τη μεταβολή του εισοδήματος (ΔS/ΔY) και δείχνει την ποσοστιαία μεταβολή της αποταμίευσης που θα προέλθει από τη μεταβολή του εισοδήματος κατά 1%, ή πόσο θα μεταβληθεί η αποταμίευση από τη μεταβολή του εισοδήματος κατά (1) νομισματική μονάδα.

Η οριακή ροπή προς αποταμίευση (Ο.Ρ.Α.) είναι μεγαλύτερη του μηδενός και μικρότερη της μονάδας.

$$O.P.A. = \frac{\Delta S}{\Delta Y},$$

$$0 \leq \frac{\Delta S}{\Delta Y}(O.P.A.) \leq 1.$$

Μια άλλη παράμετρος σχετική με την αποταμίευση είναι η Μέση Ροπή για Αποταμίευση (Μ.Ρ.Α.), η οποία είναι ίση με το λόγο της αποταμίευσης προς το εισόδημα:

$$M.P.A. = \frac{S}{Y}.$$

Το άθροισμα της μέσης ροπής προς κατανάλωση και της μέσης ροπής προς αποταμίευση είναι ίσο με τη μονάδα:

$$M.P.K. + M.P.A. = 1 \text{ ή}$$

$$\frac{C}{Y} + \frac{S}{Y} = 1.$$

Επιπλέον, το άθροισμα της οριακής ροπής για κατανάλωση και της οριακής ροπής προς αποταμίευσης ισούται με τη μονάδα:

$$O.P.K. + O.P.A. = 1 \text{ ή}$$

$$\frac{\Delta C}{\Delta Y} + \frac{\Delta S}{\Delta Y} = 1.$$

5.29 ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΟΡΙΑΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΕ ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Τα ολοκληρώματα χρησιμοποιούνται στην περίπτωση που έχουμε μια οριακή συνάρτηση (συνάρτηση οριακού κόστους) και χρειαζόμαστε να τη μετατρέψουμε σε συνολική συνάρτηση (συνάρτηση συνολικού κόστους). Από τη στιγμή που παραγωγίζοντας μια συνολική συνάρτηση παίρνουμε την οριακή της και δεδομένου ότι η παραγώγιση είναι η αντίθετη διαδικασία της ολοκλήρωσης, μπορούμε μέσω της δεύτερης να πάρουμε μια συνολική συνάρτηση από μια οριακή. Η συγκεκριμένη εφαρμογή χρησιμοποιείται συχνά στην οικονομία για να υπολογιστεί η συνάρτηση συνολικού κόστους ενώ διαθέτουμε τη συνάρτηση οριακού κόστους μιας επιχείρησης, η συνάρτηση συνολικού εσόδου ενώ έχουμε του οριακού, η συνάρτηση συνολικής κατανάλωσης ενώ έχουμε την οριακή της κ.λ.π..

5.30 ΕΠΕΝΔΥΣΗ ΚΑΙ ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Τα ολοκληρώματα χρησιμοποιούνται ευρέως στο να εκφράσουμε τον σχηματισμό κεφαλαίου και επένδυσης. Ως γνωστών, ο σχηματισμός κεφαλαίου (capital formation) αποτελεί μια διαδικασία που λαμβάνει χώρα μέσα στο χρόνο και μέσω αυτής επαυξάνεται το ενίοτε δεδομένο απόθεμα κεφαλαίου. Έτσι, μπορούμε εύκολα να εκφράσουμε το κεφάλαιο K σαν μια συνάρτηση του χρόνου και τον ρυθμό σχηματισμού του με τη χρήση παραγώγου $\frac{dK}{dt}$. Δεδομένου ότι ο ρυθμός ροής της καθαρής επένδυσης μέσα στο χρόνο ταυτίζεται με το ρυθμό σχηματισμού κεφαλαίου στο χρόνο, προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$\frac{dK}{dt} = I(t).$$

Επομένως,

$$K(t) = \int I(t)dt = \int \frac{dK}{dt}dt = \int dK.$$

Επίσης η έννοια της ακαθάριστης επένδυσης (gross investment) έχει πολλές φορές άμεση σχέση με την έννοια της καθαρής επένδυσης σε ένα μοντέλο, έτσι μπορούμε συσχετίσουμε τη μια με την άλλη μέσω της εξίσωσης:

$$I_g = I + \delta K.$$

Όπου I_g είναι η ακαθάριστη επένδυση, I είναι η καθαρή επένδυση, δ ο ρυθμός απαξίωσης του κεφαλαίου και δK το ρυθμό της προς αντικατάσταση επένδυσης (replacement investment).

5.31 ΠΑΡΟΥΣΑ ΑΞΙΑ ΜΙΑΣ ΧΡΗΜΑΤΙΚΗΣ ΡΟΗΣ

Στην περίπτωση μιας μοναδικής μελλοντικής αξίας M όταν αναφερόμαστε στην παρούσα αξία ισχύουν δύο τύποι προεξόφλησης, οι οποίοι διακρίνονται στη διακριτή περίπτωση και στη συνεχή.

$$A = M(1 + i)^{-t},$$

όταν αναφερόμαστε στη διακριτή περίπτωση και

$$A = Me^{-rt},$$

όταν αναφερόμαστε στη συνεχή περίπτωση.

Πιο συγκεκριμένα, εάν υποθέσουμε ότι έχουμε μια αδιάκοπη ροή ή μια ροή μελλοντικών αξιών, δηλαδή μια σειρά εισπρακτέων ανά διαφορετικά χρονικά διαστήματα εσόδων ή μια σειρά πληρωτέων ανά διαφορετικά χρονικά διαστήματα δαπανών, μπορούμε να υπολογίσουμε την παρούσα αξία ολόκληρης της χρηματικής ροής, στη διακριτή περίπτωση, υποθέτοντας τρία μελλοντικά μεγέθη εσόδων R_t $(t = 1,2,3)$ εισπρακτέων που θα εισπραχθούν στο τέλος του t-ιοστού έτους και ενός επιτοκίου t και αθροίζοντας τα. Δηλαδή, οι παρούσες αξίες του R_t θα είναι αντιστοίχως:

$$R_1(1+i)^{-1}, \qquad R_2(1+i)^{-2}, \qquad R_3(1+i)^{-3}.$$

Έτσι, θα υπολογίσουμε τη συνολική παρούσα αξία, Π, αθροίζοντας τις επιμέρους:

$$\varPi = R_1(1+i)^{-1} + R_2(1+i)^{-2} + R_3(1+i)^{-3} = \sum_{t=1}^{3} R_t\,(1+i)^{-t}.$$

Στη συνεχή περίπτωση μπορούμε να υπολογίσουμε με παρόμοιο τρόπο τη συνολική παρούσα αξία, αντικαθιστώντας τη διαδικασία της πρόσθεσης με τη διαδικασία της ολοκλήρωσης. Πιο αναλυτικά, θεωρούμε μια συνεχή ροή εσόδων με ρυθμό $R(t)$ ευρώ ανά έτος, πράγμα που σημαίνει ότι σε χρόνο $t = t_1$ ο ρυθμός ροής θα είναι $R(t_1)$, για $t = 2$ θα είναι $R(t_2)$. Στην περίπτωση, λοιπόν που στο χρονικό σημείο t έχει περάσει ένα απειροστικό διάστημα dt, το σύνολο των εσόδων που θα έχουμε για το χρονικό διάστημα $\{t, t+dt\}$ συμβολίζεται ως $R(t)dt$ και με συνεχή ροή προεξοφλείται με ποσοστό r ανά έτος, οπότε διαμορφώνει την παρούσα αξία του σε $R(t)e^{-rt}dt$.

Καταλήγοντας, θα υπολογίσουμε τη συνολική παρούσα αξία Π της συνεχούς ροής των τριών χρόνων ολοκληρώνοντας:

$$\varPi = \int_0^3 R(t)e^{-rt}dt.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^{ο}

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

Εφαρμογή 6.1

«Όταν το οριακό κόστος αυξάνεται, το μέσο κόστος επίσης αυξάνεται.» Συμφωνείτε με την πρόταση αυτή; Σε κάθε περίπτωση να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Αν $TC(Q)$ είναι η συνάρτηση κόστους, τότε η συνάρτηση οριακού κόστους είναι:

$$MC(Q) = \frac{dTC}{dQ}$$

Και η συνάρτηση μέσου κόστους είναι:

$$AC(Q) = \frac{TC(Q)}{Q}.$$

Επίσης είναι:

$$\frac{dAC}{dQ} = \frac{1}{Q}(MC - AC).$$

Επομένως, το μέσο κόστος αυξάνεται όταν το οριακό κόστος υπερβαίνει το μέσο κόστος $(MC > AC)$. Όταν το οριακό κόστος απλώς αυξάνεται, δεν αυξάνεται απαραίτητα και το μέσο κόστος. Για παράδειγμα, αν $TC(Q) = Q^2 + \alpha Q + \beta$, με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$ τότε $MC(Q) = 2Q + \alpha > 0$ και $AC(Q) = Q + \alpha + \frac{\beta}{Q}$, οπότε:

$$\frac{dAC}{dQ} = 1 - \frac{\beta}{Q^2}.$$

Αν το οριακό κόστος αυξάνεται για κάθε Q, το μέσο κόστος μειώνεται για $Q < \sqrt{\beta}$. Άρα, η πρόταση είναι λανθασμένη.

Εφαρμογή 6.2

Έστω η συνάρτηση ζήτησης $Q = 81 - P^2$.

α) Να βρείτε τις τιμές για τις οποίες η συνάρτηση ζήτησης είναι ελαστική, ανελαστική ή έχει μοναδιαία ελαστικότητα.

β) Να βρείτε την τιμή στην οποία μεγιστοποιούνται τα συνολικά έσοδα.

Λύση

α) Η ελαστικότητα ζήτησης είναι:

$$n = \frac{dQ}{dP} * \frac{P}{Q} = -\frac{2P^2}{81 - P^2}.$$

Η ζήτηση είναι ελαστική όταν $|n| > 1$ ή $2P^2 > 81 - P^2$ ή $P > \frac{9\sqrt{3}}{3}$. Παρόμοια, η ζήτηση είναι ανελαστική όταν $P < \frac{9\sqrt{3}}{3}$ και έχει μοναδιαία ελαστικότητα όταν $P = \frac{9\sqrt{3}}{3}$.

β) Τα συνολικά έσοδα μεγιστοποιούνται στο σημείο μοναδιαίας ελαστικότητας, δηλαδή όταν $P = \frac{9\sqrt{3}}{3}$.

<u>Εφαρμογή 6.3</u>

Έστω η συνάρτηση ζήτησης $Q = \frac{1000}{\sqrt{P}}$. Να βρείτε την ελαστικότητα ζήτησης όταν η τιμή είναι $P = 4$ και όταν είναι $P = 6$ και να εκτιμήσετε τη μεταβολή στα συνολικά έσοδα καθώς η τιμή μεταβάλλεται μεταξύ αυτών των δύο ορίων.

<u>Λύση</u>

Η ελαστικότητα ζήτησης είναι:

$$n = \frac{dQ}{dP} * \frac{P}{Q} = -\frac{1}{2} \text{ (σταθερή για κάθε } P\text{).}$$

Η παράγωγος των εσόδων ως προς την τιμή είναι:

$$\frac{dR}{dP} = \frac{d}{dP}(PQ) = \frac{d}{dP}\left(1000\sqrt{P}\right) = \frac{500}{\sqrt{P}}.$$

Καθώς η τιμή μεταβάλλεται από 4 σε 6, τα έσοδα μεταβάλλονται κατά

$$\Delta R \approx \frac{dR}{dP}dP = \frac{500}{\sqrt{4}} * 2 = 500 \text{ (χ.μ)}$$

χρηματικές μονάδες.

<u>Εφαρμογή 6.4</u>

Η κυβέρνηση φορολογεί το εισόδημα κάθε φορολογούμενου με συντελεστή 30% για ετήσιο εισόδημα μεγαλύτερο από 28000 ευρώ. Για να αυξήσει τα έσοδα από τη φορολογία χωρίς να επιβαρύνει του οικονομικά ασθενέστερους, η κυβέρνηση σκέφτεται να επιβάλλει πρόσθετη φορολογία ίση με 2500 ευρώ για όσους έχουν ετήσιο εισόδημα τουλάχιστον 45000 ευρώ. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση από την οποία προκύπτει το καθαρό εισόδημα κάθε φορολογούμενου, μετά την επιβολή του φόρου. Τι επιπτώσεις αναμένεται να έχει η επιβολή της πρόσθετης φορολογίας σε όσους έχουν υψηλά εισοδήματα.

<u>Λύση</u>

Έστω $N(x)$, το εισόδημα, μετά τη φορολογία, ενός φορολογούμενου με ετήσιο εισόδημα x ευρώ. Αν $x < 28000$, ο φορολογούμενος απαλλάσσεται του φόρου, οπότε $N(x) = x$. Αν $28000 \leq x < 45000$, το εισόδημα πάνω από 28000 ευρώ φορολογείται με συντελεστή 30%, οπότε

$$N(x) = 28000 + 0{,}7(x - 28000).$$

Τέλος, αν $x \geq 45000$, τότε επιβάλλεται επιπλέον φορολογία 2500 ευρώ, οπότε

$$N(x) = 28000 + 0,7(x - 28000) - 2500.$$

Έτσι η συνάρτηση του καθαρού εισοδήματος είναι:

$$N(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } 0 \le x < 28000 \\ 7500 + 0,7x, & \text{αν } 28000 \le x < 45000 \\ 5500 + 0,7x, & \text{αν } \ x \ge 45000 \end{cases}$$

Είναι φανερό ότι η συνάρτηση εμφανίζει ασυνέχεια στο $x = 45000$ γιατί

$$\lim_{x \to 45000^-} N(x) = 39000,$$

ενώ

$$\lim_{x \to 45000^+} N(x) = N(45000) = 37000.$$

Συνέπεια αυτής της ασυνέχειας είναι ότι οι φορολογούμενοι με ετήσιο εισόδημα που πλησιάζει τα 45000 ευρώ δεν έχουν ουσιαστικό κίνητρο να προσπαθήσουν να αυξήσουν το εισόδημά τους πάνω από 45000 ευρώ γιατί αυτό θα συνεπάγεται μείωση του καθαρού εισοδήματός τους κατά 2500 ευρώ.

Εφαρμογή 6.5

Το συνολικό κόστος παραγωγής q μονάδων από ένα προϊόν περιγράφεται από τη συνάρτηση:

$$C = 7000000 + 350q + 0,004q^2$$

όπου C είναι το συνολικό κόστος σε χρηματικές μονάδες.

Α) Πόσες μονάδες πρέπει να παραχθούν για να ελαχιστοποιηθεί το μέσο κόστος;

Β) Ποιο είναι το ελάχιστο μέσο κόστος;

Γ) Ποιο είναι το συνολικό κόστος σε αυτό το επίπεδο παραγωγής;

Λύση

Το μέσο κόστος είναι:

$$AC = \frac{C}{q} = \frac{7 * 10^6}{q} + 350 + 0,004q$$

Α) Είναι:

$$\frac{dAC}{dq} = -\frac{7 * 10^6}{q^2} + 0,004$$

που μηδενίζεται όταν $q_0 = 7 * 10^4$. Επειδή είναι

$$\frac{d^2AC}{dq} = \frac{10^7}{q^3} > 0,$$

το μέσο κόστος είναι ελάχιστο όταν $q_0 = 7 * 10^4$.

Β) Το ελάχιστο μέσο κόστος είναι $AC(q_0) = 452,8$ χρηματικές μονάδες.

Γ) Το αντίστοιχο συνολικό κόστος είναι $C(q_0) = AC(q_0) * q_0 = \frac{7*10^6}{7*10^4} + 350 + 0{,}004 * (7*10^4) * (7*10^4) = 100 + 350 + 280 * 70000 = 51.100.000.$

Εφαρμογή 6.6

Το σταθερό κόστος μιας επιχείρησης είναι 200 χρηματικές μονάδες, ενώ το μεταβλητό κόστος της δίνεται από τη συνάρτηση $VC(Q) = 2 + \frac{200}{Q}$, όπου Q είναι η ποσότητα του παραγόμενου προϊόντος.

α) Να βρείτε τη συνάρτηση συνολικού κόστους και τη συνάρτηση οριακού κόστους.

β) Να υπολογίσετε το οριακό κόστος που αντιστοιχεί σε ποσότητα $Q = 40$ μονάδων και να εκτιμήσετε τη μεταβολή του συνολικού κόστους όταν η παραγόμενη ποσότητα αυξάνεται κατά 2 μονάδες από το επίπεδο των 40 μονάδων.

Λύση

α) Το συνολικό κόστος είναι

$$TC = 200 + Q * VC(Q) = 400 + 2Q.$$

Το οριακό κόστος είναι $MC = 2$ (σταθερό)

β) Όταν η παραγόμενη ποσότητα μεταβάλλεται κατά 2 μονάδες από το επίπεδο των 40 μονάδων, το συνολικό κόστος μεταβάλλεται κατά $\Delta C = MC(40) * 2 = 4$ χρηματικές μονάδες.

Εφαρμογή 6.7

Έστω η συνάρτηση $Q(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, όπου Q είναι η παραγόμενη ποσότητα ενός προϊόντος και x η χρησιμοποιούμενη ποσότητα ενός παραγωγικού συντελεστή. Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν οι σταθερές α, β, γ, δ προκειμένου η συνάρτηση να είναι συνάρτηση παραγωγής μιας επιχείρησης;

Λύση

Κατ' αρχήν πρέπει $\delta = 0$, γιατί δεν μπορεί να υπάρξει παραγωγή, χωρίς χρήση του παραγωγικού συντελεστή. Η συνάρτηση οριακού προϊόντος είναι:

$$MP(x) = Q'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma.$$

Από την οικονομική θεωρία είναι γνωστό ότι το οριακό προϊόν μεγιστοποιείται όταν το συνολικό προϊόν παρουσιάζει σημείο καμπής. Στο σημείο αυτό είναι

$$\frac{dMP}{dx} = 0 \text{ ή } 6\alpha x + 2\beta = 0$$

απ' όπου προκύπτει $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$. Για να έχουμε μέγιστο στο σημείο αυτό πρέπει

$$\frac{d^2MP}{dx^2} = -6\alpha < 0 \; ή \; \alpha < 0,$$

οπότε για να είναι $x = -\frac{\beta}{2\alpha} > 0$ πρέπει $\beta > 0$. Τέλος, το οριακό προϊόν για $x = 0$ πρέπει να είναι μη αρνητικό, δηλαδή $MP(0) = \gamma \geq 0$.

Επομένως οι συνθήκες είναι $\alpha < 0, \beta > 0, \gamma \geq 0$.

<u>Εφαρμογή 6.8</u>

Το συνολικό κόστος (C) και έσοδα (R) για ένα προϊόν είναι:

$$C(Q) = 600 + 200Q + 0{,}5Q^2$$

$$R(Q) = 600Q$$

A) Να βρεθεί το επίπεδο του προϊόντος που μεγιστοποιεί το κέρδος;

B) Ποιο είναι το μέγιστο κέρδος;

<u>Λύση</u>

A) Η συνάρτηση κέρδους είναι:

$$\Pi = -0{,}5Q^2 + 400Q - 600.$$

Η πρώτη παράγωγος

$$\frac{d\Pi}{dQ} = -Q + 400$$

μηδενίζεται για $Q = 400$. Επειδή

$$\frac{d^2\Pi}{dQ^2} = -1 < 0,$$

το κέρδος μεγιστοποιείται στο σημείο αυτό.

B) Το μέγιστο κέρδος είναι $\Pi(400) = 79400$ ευρώ.

<u>Εφαρμογή 6.9</u>

Η συνάρτηση παραγωγής μιας επιχείρησης είναι $Q = AK^aL^{1-a}$ όπου K και L το χρησιμοποιούμενο κεφάλαιο και η εργασία αντίστοιχα και A, α σταθερές με $A > 0$ και $0 < \alpha < 1$. Να δείξετε ότι το οριακό προϊόν της εργασίας είναι θετικό και ότι είναι φθίνουσα συνάρτηση της εργασίας όταν το κεφάλαιο παραμένει σταθερό.

<u>Λύση</u>

Το οριακό προϊόν της εργασίας είναι

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = (1-a)A\frac{K^a}{L^a} > 0$$

γιατί $\alpha < 1$.

Η παράγωγός του ως προς την εργασία είναι

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = -a(1-a)A\frac{K^a}{L^{a+1}} < 0,$$

γιατί $0 < \alpha < 1$.

Επομένως, το οριακό προϊόν της εργασίας είναι φθίνουσα συνάρτηση της εργασίας όταν το κεφάλαιο διατηρείται σταθερό.

Εφαρμογή 6.10

Έστω η συνάρτηση παραγωγής $Q = f(K, L)$, όπου Q είναι το παραγόμενο προϊόν, K το κεφάλαιο και L η εργασία. Αν η συνάρτηση είναι ομογενής[2] πρώτου βαθμού να δείξετε ότι το οριακό προϊόν του κεφαλαίου και το οριακό προϊόν της εργασίας μπορούν να γραφούν ως συναρτήσεις του λόγου:

$$\frac{K}{L}.$$

Πως θα μεταβληθούν τα δύο αυτά οριακά μεγέθη αν τόσο το κεφάλαιο όσο και η εργασία αυξηθούν κατά 40%;

Λύση

Οι οριακές συναρτήσεις είναι ομογενείς μηδενικού βαθμού, οπότε μπορούν να γραφούν ως συναρτήσεις του λόγου K/L. Αν τόσο το κεφάλαιο όσο και η εργασία αυξηθούν κατά 40%, ο λόγος K/L και κατά συνέπεια τα οριακά μεγέθη θα παραμείνουν αμετάβλητα.

Εφαρμογή 6.11

Οι συναρτήσεις ζήτησης, προσφοράς και η συνθήκη ισορροπίας για ένα προϊόν είναι:

$$Q_D = D\left(P, Y_0, {P_1}^0, {P_2}^0\right), \partial D/\partial P < 0, \partial D/\partial Y_0 > 0, \partial D/\partial {P_1}^0 > 0, \partial D/\partial {P_2}^0 < 0$$

$$Q_S = S(P, W_0, T_0), \partial S/\partial P > 0, \partial S/\partial W_0 < 0, \partial S/\partial T_0 > 0$$

$$Q_D = Q_S = Q_e$$

όπου P τιμή προϊόντος, Y_0 εισόδημα, ${P_1}^0$ η τιμή του αγαθού 1, ${P_2}^0$ η τιμή του αγαθού 2, W_0 το κόστος της εισροής και T_0 ο δείκτης κλιματολογικών συνθηκών. Να προσδιορίσετε την επίπτωση στην τιμή και ποσότητα ισορροπίας P_e, Q_e από μεταβολή κάθε μιας από τις εξωγενείς μεταβλητές $Y_0, {P_1}^0, \mathrm{P_2}^0, \mathrm{W_0}, \mathrm{T_0}$.

[2] Ομογενής συνάρτηση: μία συνάρτηση $f = f(x, y)$ ορισμένη σε ένα υποσύνολο D του $\mathbb{R}$, καλείται ότι είναι ομογενής βαθμού α αν για κάθε (x, y) που ανήκει στο D και για κάθε $t > 0$ ισχύει ότι:

$$(tx, ty) \in D \text{ και}$$

$$f(tx, ty) = t^2 f(x, y)$$

Αν η συνάρτηση είναι ομογενής βαθμού 0, τότε εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από το λόγο y/x.

Λύση

Στο σημείο ισορροπίας είναι:

$$D\left[P\left(Y_0, W_0, {P_1}^0, {P_2}^0, T_0\right), Y_0, {P_1}^0, {P_2}^0\right] - Q\left(Y_0, W_0, {P_1}^0, {P_2}^0, T_0\right) = 0 \text{ και}$$

$$S\left[P\left(Y_0, W_0, {P_1}^0, {P_2}^0, T_0\right), W_0, T_0\right] - \mathrm{Q}\left(\mathrm{Y}_0, \mathrm{W}_0, {\mathrm{P}_1}^0, {\mathrm{P}_2}^0, \mathrm{T}_0\right) = 0$$

Παραγωγίζοντας ως προς $Y_0, {P_1}^0, {\mathrm{P}_2}^0, \mathrm{W}_0, \mathrm{T}_0$, με όλες τις μερικές παραγώγους υπολογισμένες στο σημείο ισορροπίας P^e, Q^e έχουμε:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial Y_0}\right)^e = \frac{\partial D/\partial Y_0}{\partial S/\partial P - \partial D/\partial P} > 0 \text{ για } \partial D/\partial Y_0 > 0$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial Y_0}\right)^e = \frac{(\partial S/\partial P)(\partial D/\partial Y_0)}{\partial S/\partial P - \partial D/\partial P} > 0$$

Επίσης,

$$\left(\frac{\partial P}{\partial W_0}\right)^e = \frac{-\partial S/\partial W_0}{\partial S/\partial P - \partial D/\partial P} > 0 \text{ για } \partial S/\partial W_0 < 0$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial W_0}\right)^e = \frac{-(\partial D/\partial P)(\partial S/\partial W_0)}{\partial S/\partial P - \partial D/\partial P} < 0$$

Επομένως, αύξηση του εισοδήματος αυξάνει την τιμή και την ποσότητα ισορροπίας ενώ αύξηση της τιμής της εισροής αυξάνει την τιμή αλλά μειώνει την ποσότητα ισορροπίας.

Ο ρυθμός μεταβολής ως προς τις εξωγενείς μεταβλητές ${P_1}^0, {\mathrm{P}_2}^0$ είναι:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial {P_1}^0}\right)^e = \frac{\partial \mathrm{D}/\, \partial {\mathrm{P}_1}^0}{\partial \mathrm{S}/\, \partial \mathrm{P} - \partial \mathrm{D}/\, \partial \mathrm{P}} > 0,$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial {P_1}^0}\right)^e = \frac{(\partial S/\partial P)\left(\partial D/\partial {P_1}^0\right)}{\partial S/\partial P - \partial D/\partial P} > 0$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial {P_2}^0}\right)^e = \frac{\partial D/\partial {P_2}^0}{\partial S/\partial P - \partial D/\partial P} < 0,$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial {P_2}^0}\right)^e = \frac{(\partial S/\partial P)\left(\partial D/\partial {P_2}^0\right)}{\partial S/\partial P - \partial D/\partial P} < 0$$

τέλος ο ρυθμός μεταβολής ως προς T_0 είναι:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T_0}\right)^e = \frac{-\,\partial \mathrm{S}/\, \partial \mathrm{T}_0}{\partial \mathrm{S}/\, \partial \mathrm{P} - \partial \mathrm{D}/\, \partial \mathrm{P}} < 0 \text{ και}$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial T_0}\right)^e = -\frac{(\partial D/\partial P)(\partial S/\partial W_0)}{\partial S/\partial P - \partial D/\partial P} > 0.$$

Εφαρμογή 6.12

Η ελαστικότητα ζήτησης στο σημείο (P, Q) είναι $m = -\frac{P}{200-P}$. Είναι γνωστό ότι όταν το προϊόν πωλείται σε τιμή 40 ευρώ, η ζητούμενη ποσότητα είναι 2000 μονάδες. Ποια είναι η συνάρτηση ζήτησης;

Λύση

Είναι:

$$\frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q} = -\frac{P}{200-P}, \text{οπότε}$$

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{200-P}dP.$$

Άρα:

$$\int \frac{1}{Q}dQ = -\int \frac{1}{200-P}dP \text{ ή}$$

$$\ln Q = \ln(200-P) + C_0 \text{ ή}$$

$$e^{\ln Q} = e^{\ln(200-p)+C_0},$$

οπότε,

$$Q = C_0 * (200-P).$$

Για $P = 40$ είναι $Q = 2000$, οπότε $C_0 = 12{,}5$.

Εφαρμογή 6.13

Μια επιχείρηση παράγει ένα προϊόν Α. Η συνάρτηση οριακού εσόδου είναι $MR = 40 - 6Q$ όπου q η ποσότητα παραγωγής.

Α) Να βρείτε τα έσοδα της επιχείρησης όταν παράγει 10 μονάδες προϊόντος.

Β) Να βρείτε τη συνάρτηση ζήτησης και να υπολογίσετε την ελαστικότητά της για $Q = 16$.

Γ) Να βρείτε τα μέσα έσοδα της επιχείρησης για το επίπεδο παραγωγής μεταξύ 6 και 16 μονάδων.

Λύση

Η συνάρτηση εσόδων είναι

$$R = \int MR * dQ = 40Q - 3Q^2.$$

Α) Για $Q = 10$ είναι $R = 40 * 10 - 3 * 10^2 = 400 - 300 = 100.$

Β) Είναι $MR = P * Q = 40Q - 3Q^2$, οπότε $MR = 40 - 6Q$. Η συνάρτηση ζήτησης είναι:

$$Q = 13{,}33 - \frac{1}{3}P$$

και η ελαστικότητα για Q=16 είναι:

$$m = \frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q} = -\frac{1}{3} * \frac{9}{16} = -\frac{9}{48} = -0{,}18.$$

Γ) Τα μέσα έσοδα στο διάστημα [6,16] είναι:

$$AR = \frac{1}{16-6}\int_{6}^{16} R * dQ = \frac{1}{10}\int_{6}^{16}(40Q - 3Q^2)dQ = \frac{1}{10}\left(20Q^2\Big|_{6}^{16} - \frac{3Q^3}{3}\Big|_{6}^{16}\right) =$$

Εφαρμογή 6.14

Η οριακή ροπή για αποταμίευση σε μια οικονομία είναι $MPS = 0{,}7 - 0{,}4 * Y^{-1/2}$όπου Y είναι το διαθέσιμο εισόδημα. Αν η αποταμίευση είναι μηδενική όταν το εισόδημα είναι Y=100 ευρώ, να βρείτε τη συνάρτηση αποταμίευσης.

Λύση

Είναι

$$S = \int MPSdY = \int \left(0{,}7 - 0{,}4Y^{-1/2}\right) dY = 0{,}7Y - 0{,}8Y^{1/2} + C.$$

Αν $Y = 100$, είναι $S = 0{,}7 * 100 - 0{,}8 * 100^{1/2} + C = 70 - 8 + C = 0$, οπότε $C = 62$.

Οπότε, η συνάρτηση αποταμίευσης είναι:

$$S = 0{,}7Y - 0{,}8Y^{1/2} + 62.$$

Εφαρμογή 6.15

Το οριακό προϊόν της εργασίας μιας επιχείρησης είναι $MP = 8L^{1/6}$, όπου L είναι η εργασία. Αν η εργασία είναι η μοναδική εισροή που χρησιμοποιεί η επιχείρηση, να βρείτε τη συνάρτηση παραγωγής της.

Λύση

Η συνάρτηση παραγωγής είναι:

$$P = \int MP * dL = \int 8L^{1/6} * dL = 8 * \frac{6}{8}L^{\frac{8}{6}} + C = 6L^{\frac{8}{6}} + C.$$

Επειδή η εργασία είναι η μοναδική εισροή που χρησιμοποιεί η επιχείρηση, η συνάρτηση παραγωγής της θα είναι:

$$P = 6L^{\frac{8}{6}}.$$

Εφαρμογή 6.16

Η Κυβέρνηση μιας αναπτυσσόμενης χώρας επιθυμεί να διατηρεί ρυθμό ανάπτυξης των επενδύσεων τουλάχιστον 4% ετησίως. Η οριακή ροπή για αποταμίευση εκτιμάται ότι είναι $s = 15\%$ και ο λόγος της παραγωγικής ικανότητας προς το απόθεμα κεφαλαίου $p = 0{,}25$.

(α) Να αποδείξετε ότι δεν είναι δυνατή η διατήρηση του επιθυμητού ρυθμού αύξησης των επενδύσεων με αυτές τις συνθήκες.

(β) Με δεδομένη την οριακή ροπή για αποταμίευση, ποιος πρέπει να είναι ο λόγος ρ προκειμένου να επιτευχθεί ο στόχος του 4%;

<u>Λύση</u>

(α) Είναι $ps = 0{,}25 * 0{,}15 = 0{,}0375$ που είναι μικρότερο από τον επιθυμητό ρυθμό $r = 0{,}04$. Άρα ο επιθυμητός ρυθμός δεν μπορεί να διατηρηθεί γιατί $ps < r$.

(β) Για να επιτευχθεί ο στόχος του 4% πρέπει να ισχύει:

$$p = \frac{r}{s} = \frac{0{,}04}{0{,}15} = 0{,}2666,$$

Δηλαδή ο λόγος της παραγωγικής ικανότητας προς το απόθεμα κεφαλαίου πρέπει να αυξηθεί.

<u>Εφαρμογή 6.17</u>

Έστω ότι κάποιος φανατικός παίκτης τυχερών παιχνιδιών κέρδισε στο JOKER το ποσό των δύο εκατομμυρίων ευρώ, το οποίο θα του καταβληθεί μέσα στα επόμενα 20 έτη με ρυθμό 100000 ευρώ ανά έτος. Ποια είναι η σημερινή αξία των πληρωμών αυτών με συνεχή ανατοκισμό και επιτόκιο προεξόφλησης $r = 0{,}10$; Τι παρατηρείτε;

<u>Λύση</u>.

Η παρούσα αξία των πληρωμών αυτών θα είναι:

$$PV = \int_0^{20} 100000\, e^{-0{,}1t} dt = \frac{100000}{0{,}1}(1 - e^{-0{,}1*20}) = 1.000.000 * (1 - 0{,}1353)$$
$$= 864700 \text{ ευρώ}.$$

Η παρούσα αξία είναι αρκετά μικρότερη από το ποσό που κέρδισε ο παίκτης.

<u>Εφαρμογή 6.18</u>

Ποια είναι η σημερινή αξία μιας διαρκούς σειράς πληρωμών 70000 ευρώ ανά έτος με συνεχή ανατοκισμό και επιτόκιο προεξόφλησης $r = 0{,}10$; Τι παρατηρείτε;

<u>Λύση</u>

Αν η σειρά πληρωμών είναι διαρκής, τότε η παρούσα αξία είναι:

$$PV = \int_0^{+\infty} 70000 e^{-0{,}1t}\, dt = \frac{70000}{0{,}1} \lim_{\beta \to +\infty} \int_0^{\beta} e^{-0{,}1t} dt = \frac{70000}{0{,}1} = 7000000 \text{ ευρώ}.$$

Η παρούσα αξία είναι δεκαπλάσια του ποσού.

<u>Εφαρμογή 6.19</u>

Ένας έμπορος κρασιών έχει στην κατοχή του μια κάσα σπάνιο Γαλλικό κρασί του οποίου η αξία τη χρονική στιγμή t είναι $V(t)$. Αν το κόστος αποθήκευσης του κρασιού είναι s χρηματικές μονάδες ανά έτος και το επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού είναι i, να βρείτε τη συνθήκη που πρέπει να ισχύει ώστε ο έμπορος να πουλήσει το κρασί.

<u>Λύση</u>

Αν ο έμπορος πουλήσει το κρασί τη χρονική στιγμή t, η παρούσα αξία των χρημάτων που θα εισπράξει μείον το κόστος αποθήκευσης είναι:

$$PV(t) = V(t)e^{-it} - \int_0^t se^{-iu}\,du = V(t)e^{-it} - \frac{s}{i}\left(1 - e^{-it}\right) = \left[V(t) + \frac{s}{i}\right]e^{-it} - \frac{s}{i}.$$

Ο έμπορος θα πουλήσει όταν μεγιστοποιείται η παρούσα αξία. Τότε θα ισχύει:

$$\frac{dPV(t)}{dt} = 0 \text{ ή}$$

$$e^{-it}\left[\frac{dV}{dt} - iV(t) - s\right] = 0 \text{ ή}$$

$$\frac{dV}{dt} = iV(t) + s.$$

<u>Εφαρμογή 6.20</u>

Έστω ότι ο ρυθμός απόσβεσης της αξίας ενός φορτηγού δίνεται από τη συνάρτηση:

$$400(20 - t),$$

όπου t η ηλικία του φορτηγού σε έτη. Αν κάποιος αγοράσει το φορτηγό μεταχειρισμένο ενώ είναι ήδη μοντέλο 3 ετών, πόση θα είναι η απώλεια της αξίας του τα επόμενα τρία έτη; Ποια ήταν η αρχική αξία του φορτηγού αν η αξία του εκμηδενίζεται μετά από τα 10 έτη;

<u>Λύση</u>

Αν $V(t)$ είναι η αξία του φορτηγού στο χρόνο t και $D(t)$ η απόσβεση, τότε είναι:

$$D(t) = -\frac{dV(t)}{dt} = 400(20 - t),$$

οπότε,

$$V(t) = \int 400(t - 20)dt = 200t^2 - 8000t + V_0,$$

όπου V_0 είναι η αρχική αξία του φορτηγού.

Η συσσωρευμένη απόσβεση $t = 3$ και $t = 6$ είναι:

$$\int_3^6 D(t) = \int_3^6 400(20 - t)\,dt = 8000t\Big|_3^6 - 200t^2\Big|_3^6 = 22200.$$

Αν η αξία εκμηδενίζεται μετά από 10 έτη, τότε:

$$V(10) = 0 \text{ ή } 20000 - 800000 + V_0 = 0 \text{ ή } V_0 = 780000 \text{ χμ.}$$

Εφαρμογή 6.21

Έστω η συνάρτηση ζήτησης $Q = D(P) = \frac{80}{P^2}$. Να βρείτε το πλεόνασμα του καταναλωτή που αντιστοιχεί στην τιμή $P = 8$.

Λύση

Αν $Q = D(P) = \frac{80}{P^2}$, τότε το πλεόνασμα καταναλωτή είναι:

$$CS = \lim_{P_0 \to +\infty} \int_8^{P_0} D(P)dP = \lim_{P_0 \to +\infty} \int_8^{P_0} 80P^{-2}\, dP = -80 * \lim_{P_0 \to +\infty} \frac{1}{P}\Big|_8^{P_0} = -80\left(\lim_{P_0 \to +\infty} \frac{1}{P_0} - \frac{1}{8}\right) = 10.$$

Εφαρμογή 6.22

Η συνάρτηση οριακού κόστους μιας πλήρως ανταγωνιστικής επιχείρησης είναι:

$$MC = 3Q + 8,$$

όπου Q είναι η παραγόμενη ποσότητα. Υποθέστε ότι υπάρχουν συνολικά 150 τέτοιες επιχειρήσεις, οι οποίες έχουν την ίδια συνάρτηση κόστους. Να βρείτε το πλεόνασμα του παραγωγού για κάθε επιχείρηση όταν η τιμή είναι 40 ευρώ, καθώς και το πλεόνασμα του παραγωγού για το σύνολο των επιχειρήσεων.

Λύση

Η παραγόμενη ποσότητα από κάθε επιχείρηση προσδιορίζεται από τη σχέση $P = MC(Q)$. Για $P = 40$ είναι $Q = \frac{18}{3}$.

Το πλεόνασμα του παραγωγού για κάθε επιχείρηση είναι:

$$PS = 40 * \frac{18}{3} - \int_0^{18/3} (3Q + 8)\, dQ = 40 * \frac{18}{3} - \frac{3}{2}Q^2 \Big|_0^{18/3} - 8Q\Big|_0^{18/3} = \frac{720}{3} - \frac{162}{3} - \frac{144}{3} = \frac{414}{3}.$$

Η καμπύλη προσφοράς για την κάθε επιχείρηση είναι:

$$P = MC = 3Q + 8 \text{ ή } Q = \frac{1}{3}P - \frac{8}{3}.$$

Για το σύνολο των 150 επιχειρήσεων είναι:

$$Q = \frac{150}{3}P - \frac{1200}{3}.$$

Για $P = 40$ είναι:

$$Q = \frac{4800}{3}$$

και το πλεόνασμα του παραγωγού για το σύνολο της αγοράς είναι:

$$PS = 40 * \frac{4800}{3} - \int_0^{4800/3} S(Q)dQ = 40 * \frac{4800}{3} - \int_0^{4800/3} (3Q+8)dQ = 40 * \frac{4800}{3}$$
$$- \frac{3Q^2}{2}\Bigg|_0^{4800/3} - 8Q\Bigg|_0^{4800/3} = 40 * \frac{4800}{3} - \frac{3Q^2}{2} - 8Q$$
$$= \frac{192.000}{3} - \frac{11.481,600}{3} = -\frac{11.289,600}{3} = -3.763,200.$$

<u>Εφαρμογή 6.23</u>

Μας δίνεται:

$$MC: C'(Q) = 4e^{0,4}Q.$$

Σταθερό κόστος: $C_f = 180$

Ποια είναι η συνάρτηση του συνολικού κόστους;

<u>Λύση</u>

Ψάχνουμε το συνολικό κόστος: $C(Q)$, ολοκληρώνουμε την $C'(Q)$ ως προς Q

$$\int 4e^{0,4Q}\,dq = 4\frac{1}{0,4}e^{0,4Q} + c = 10e^{0,4Q} + c.$$

Όμως αν και η παραπάνω λύση είναι χρήσιμη, μας λείπει η σταθερά c.

Σε αυτό μπορεί να μας βοηθήσει η C_f. Θέτοντας $Q = 0$, το C αποτελείται μόνο από την C_f και θα μας δώσει αποτέλεσμα $10e^0 = 180$ δηλαδή $C = 180 - 10 = 170$. Άρα η συνάρτηση γίνεται:

$$C(Q) = 10e^{0,4Q} + 170.$$

<u>Εφαρμογή 6.24</u>

Εάν η οριακή ροπή προς αποταμίευση (MPS) , είναι η ακόλουθη συνάρτηση του εισοδήματος:

$$S'(Y) = 0,6 - 0,2Y^{-1}$$

και εάν η συνολική αποταμίευση S είναι μηδενική όταν το εισόδημα $Y = 162$, να βρείτε τη συνάρτηση αποταμίευσης $S(Y)$.

<u>Λύση</u>

Καθώς το (MPS) είναι η παράγωγος της συνάρτησης S, το πρόβλημα μας οδηγεί να ολοκληρώσουμε την $S'(Y)$:

$$S(Y) = \int (0,6 - 0,2Y^{-1})\,dY = 0,6Y - 0,2Y + c.$$

Η συγκεκριμένη τιμή της σταθεράς c, μπορεί να βρεθεί από το ότι το $c = 0$, όταν $Y = 162$. Ακόμα και αν, με τη στενή έννοια, αυτό δεν είναι αρχική συνθήκη (δεν αφορά το $Y = 0$), η αντικατάσταση αυτής της πληροφορίας στο παραπάνω ολοκλήρωμα θα μας βοηθήσει να ορίσουμε το c . Εφόσον $0 = 0{,}6(162) - 0{,}2(9) + c$, άρα $c = -95{,}4$ και η επιθυμητή συνάρτηση ζήτησης είναι:

$$S(Y) = 0{,}6Y - 0{,}2Y - 95{,}4.$$

Εφαρμογή 6.25

Έχουμε μια καθαρή επένδυση η οποία είναι μια σταθερή ροή των $I(t) = 2000$ ευρώ ανά έτος. Ψάχνουμε να βρούμε τη συνολική καθαρή επένδυση κατά τη διάρκεια ενός έτους από $t = 0$ έως $t = 1$.

Λύση

$$\int_0^1 I(t)dt = \int_0^1 2000dt = 2000\Big|_0^1 = 2000 \text{ ευρώ}.$$

Εφαρμογή 6.26

Γνωρίζουμε από τη θεωρία της επιχείρησης ότι η μεγιστοποίηση του κέρδους επιτυγχάνεται στο επίπεδο παραγωγής όπου το οριακό έσοδο ισούται με το οριακό κόστος. Στην περίπτωσή μας το συνολικό κέρδος είναι η τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος το οποίο προσδιορίζεται από τη διαφορά ανάμεσα στο οριακό έσοδο και το οριακό κόστος από μηδέν επίπεδο παραγωγής μέχρι του σημείου που μεγιστοποιείται το κέρδος, έτσι έχουμε:

$$TP = \int_0^{x^*} [MR(x) - MC(x)]dx.$$

Όπου, $TP =$ συνολικό κέρδος, $MR(x) =$ συνάρτηση οριακού εσόδου, $MC(x) =$ συνάρτηση οριακού κόστους και $x^* =$ το επίπεδο παραγωγής που μεγιστοποιείται το κέρδος.

Στην εφαρμογή που ακολουθεί θέλουμε να υπολογίσουμε το μέγιστο συνολικό κέρδος μιας επιχείρησης, η οποία έχει τις παρακάτω καμπύλες οριακού εσόδου και οριακού κόστους.

$$MR(x) = 50 - 10x - 4x^2,$$

$$MC(x) = 30 - 4x - 2x^2.$$

Λύση

Το κέρδος μεγιστοποιείται στο σημείο:

$$MR(x) - MC(x) = 0 \leftrightarrow$$

$$50 - 10x - 4x^2 - (30 - 4x - 2x^2) = 0 \leftrightarrow$$

$$20 - 6x - 2x^2 = 0 \leftrightarrow$$

Βρίσκουμε τη διακρίνουσα η οποία είναι $\Delta = 196$, υπολογίζουμε το x_1, x_2, τα οποία είναι $x_1 = 2$ και $x_2 = -5$. Σαφέστατα καταλαβαίνουμε ότι το $x_2 = -5$ απορρίπτεται διότι δεν νοείται επίπεδο παραγωγής αρνητικό. Συμπεραίνουμε ότι η μεγιστοποίηση του κέρδους πραγματοποιείται στο $x_1 = 2$.

Το ζητούμενο συνολικό κέρδος θα είναι:

$$TP = \int_0^2 [MR(x) - MC(x)]\,dx = \int_0^2 20 - 6x - 2x^2\,dx = \left[20x - \frac{6x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{34}{3}.$$

Εφαρμογή 6.27

Έστω η συνάρτηση ζήτησης $y = 63 - 3x - x^2$. Να υπολογιστεί το πλεόνασμα του καταναλωτή αν αγοράσει ποσότητα $x = 6$.

Λύση

Χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$CS = \int_0^{x_0} f(x)dx - x_0 y_0 = \int_{y_0}^{m_0} g(y)dy.$$

Για $x_0 = 6$ έχουμε:

$$y_0 = 63 - 3 * 6 - 6^2 = 9.$$

Εξάλλου για $x = 0, y = 63$. Το ζητούμενο πλεόνασμα θα είναι:

$$ES = \int_0^6 63 - 3x - x^2\,dx - 6 * 9 = \left[63x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 54\right]\begin{matrix}6\\0\end{matrix} = 198.$$

Εφαρμογή 6.28

Έστω η συνάρτηση προσφοράς $y = f(x) = (x + 4)^2$. Να υπολογιστεί το πλεόνασμα του παραγωγού, όταν η τιμή είναι $y_0 = 25$.

Λύση

Ο τύπος που χρησιμοποιούμε είναι:

$$PS = x_0 y_0 - \int_0^{x_0} f(x)dx = \int_{m_1}^{y_0} g(y)dy.$$

Η ποσότητα που πωλείται στην τιμή y_0 είναι $25 = (x + 4)^2 \rightarrow x = 4$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε:

$$PS = x_0 y_0 - \int_0^4 (x + 4)^2 dx = (4)(25) - \left[\frac{(x + 4)^4}{4}\right]\begin{matrix}4\\0\end{matrix} = 100 - 32 = 68.$$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παραπάνω πτυχιακή εργασία με θέμα τις εφαρμογές του διαφορικού και του ολοκληρωτικού λογισμού στην οικονομία αναλύσαμε, ερμηνεύσαμε και επεξεργαστήκαμε γνώσεις που αφορούν το συνδυασμό των μαθηματικών με την οικονομία. Ασχοληθήκαμε με την έννοια του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού, την ιστορική αναδρομή και τα θεμέλια του, τα θεωρήματά του ,τους τύπους του, τις εφαρμογές του στον κλάδο της οικονομίας και τον τρόπο με τον οποίο εφαρμόζεται στην οικονομία. Στη συνέχεια, είδαμε συγκεκριμένες οικονομικές έννοιες, οικονομικά παραδείγματα, διαφόρων ειδών καμπύλες και τύπους πάνω στους οποίους εφαρμόζεται ο διαφορικός και ο ολοκληρωτικός λογισμός. Στο τελευταίο κεφάλαιο βλέπουμε ουσιαστικά την ένωση όλων των προηγούμενων κεφαλαίων, δηλαδή τις εφαρμογές που στηρίζονται στην αλληλένδετη σχέση του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού. Από όλα τα παραπάνω κατανοούμε ότι οι δύο αυτές επιστήμες είναι άπειρες και ότι αυτά που καταγράφηκαν στην εργασία αποτελούν απλά ένα μέρος τους. Αντιλαμβανόμαστε ότι αυτές οι επιστήμες απασχολούν ολόκληρο τον οικονομικό κύκλο κυρίως, διότι βοηθούν τις επιχειρήσεις να λάβουν αποφάσεις, όχι μόνο σε καθημερινή βάση αλλά και σε κρίσιμες στιγμές της παραγωγικής διαδικασίας. Οι επιχειρήσεις έχουν τη δυνατότητα πλέον να υπολογίσουν πιο εύκολα και με περισσότερη ευκρίνεια τα κόστη, τα κέρδη τους αλλά και την ποσότητα που θα επιλέξουν να παράγουν. Η σύνδεση των μαθηματικών με την οικονομία είναι σημαντική και πολλούς άλλους κλάδους όπως: στα νοικοκυριά, στους διάφορους φορείς, στις τράπεζες, στο κράτος, σε εργοστάσια. Για παράδειγμα, εάν κάποιος θέλει να αγοράσει μια αντίκα και θέλει να μάθει πόσο αλλάζει η τιμή της σε διάφορα χρονικά διαστήματα θα χρησιμοποιήσει τέτοιου είδους εφαρμογές.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

i. http://androulakis.bma.upatras.gr/mediawiki/index.php/%CE%95%CF%86%CE%B1%CF%81%CE%BC%CE%BF%CE%B3%CE%AD%CF%82 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ, Συγγραφέας Κος Ανδρουλάκης, Ημερομηνία και ώρα περιήγησης 31 Ιουλίου 2015 10:30 μμ, Ημερομηνία πρώτης συγγραφής 24 Δεκεμβρίου 2008 17:39, Τελευταία τροποποίηση 27 Νοεμβρίου 2013 19:05.

ii. http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%9B%CE%BF%CE%B3%CE%B9%CF%83%CE%BC%CF%8C%CF%82 ΛΟΓΙΣΜΟΣ, Ημερομηνία και ώρα περιήγησης 16 Μαΐου 2015 5:35 πμ, Ημερομηνία πρώτης συγγραφής 7 Φεβρουαρίου 2007 12:01, Τελευταία τροποποίηση 18 Αυγούστου 2015 21:40.

iii. http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%9F%CE%BB%CE%BF%CE%BA%CE%BB%CE%AE%CF%81%CF%89%CE%BC%CE%B1 ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ, Ημερομηνία και ώρα περιήγησης 20 Μαΐου 2015 2:21 μμ, Ημερομηνία πρώτης συγγραφής 23 Αυγούστου 2007 02:50, Τελευταία τροποποίηση 10 Απριλίου 2015 10:06.

iv. http://androulakis.bma.upatras.gr/mediawiki/index.php/%CE%9F%CF%81%CE%B9%CF%83%CE%BC%CE%AD%CE%BD%CE%B1_%CE%BF%CE%BB%CE%BF%CE%BA%CE%BB%CE%B7%CF%81%CF%8E%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B1 ΟΡΙΣΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ, Συγγραφείς Κος Ανδρουλάκης, Κος Κωσταράς Γεώργιος, Ημερομηνία και ώρα περιήγησης 25 Μαΐου 2015 11:00 πμ, Ημερομηνία πρώτης συγγραφής 10 Ιουνίου 2008 14:52, Τελευταία τροποποίηση 23 Νοεμβρίου 2013 18:44.

v. http://androulakis.bma.upatras.gr/mediawiki/index.php/%CE%91%CF%8C%CF%81%CE%B9%CF%83%CF%84%CE%B1_%CE%BF%CE%BB%CE%BF%CE%BA%CE%BB%CE%B7%CF%81%CF%8E%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B1 ΑΟΡΙΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ, Συγγραφέας Κος Ανδρουλάκης, Ημερομηνία και ώρα περιήγησης 30 Μαΐου 2015 6:50 μμ, Ημερομηνία πρώτης συγγραφής 6 Ιουνίου 2008 17:21, Τελευταία τροποποίηση 20 Νοεμβρίου 2013 20:01.

vi. http://androulakis.bma.upatras.gr/mediawiki/index.php/%CE%9F%CE%B9%CE%BA%CE%BF%CE%BD%CE%BF%CE%BC%CE%B9%CE%BA%CE%AD%CF%82_%CE%B5%CF%86%CE%B1%CF%81%CE%BC%CE%BF%CE%B3%CE%AD%CF%82 ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ, Συγγραφέας Κος Ανδρουλάκης, Ημερομηνία και ώρα περιήγησης 11 Αυγούστου 2015 9:14 μμ, Ημερομηνία πρώτης συγγραφής 18 Φεβρουαρίου 2009 21:29, Τελευταία τροποποίηση 10 Νοεμβρίου 2013 16:55.

vii. http://www.tsitsilianos.gr/userfiles/file/%CE%94%CE%99%CE%A0%CE%9B%CE%91%20%CE%9F%CE%9B%CE%9F%CE%9A%CE%9B%CE%97%CE%A1%CE%A9%CE%9C%CE%91%CE%A4%CE%91%20%CE%A42.pdf ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι, Συγγραφέας Τ. Δάρας, Ημερομηνία και ώρα περιήγησης 30 Μαΐου 2015 12:00 μμ.

viii. Πραγματική Ανάλυση, (Δημήτρης Γεωργίου, Σταύρος Ηλιάδης, Αθανάσιος Μεγαρίτης), χρονολογία έκδοσης 2010, τόπος έκδοσης Πάτρα

ix. Βιβλίο: Αρχές της Οικονομικής (N.Gregory Mankiw) Α’ Τόμος, χρονολογία έκδοσης 2001, τόπος έκδοσης Αθήνα

x. Βιβλίο: Μακροοικονομική ανάλυση Θεωρία-Εφαρμογές (Πέτρος Α. Κιόχος, Δρ, Γεώργιος Παπανικολάου, Απόστολος Κιόχος), χρονολογία έκδοσης 2011, τόπος έκδοσης Αθήνα

xi. Βιβλίο: Σύγχρονη μικροοικονομική (Γεωργίου Χριστ. Κώττη, Αθηνάς Πετράκη-Κώττη) Γ’ Έκδοση, χρονολογία έκδοσης 2008, τόπος έκδοσης Αθήνα

xii. http://www.euretirio.com/2010/07/paragogikoi-syntelestes.html ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΟΡΩΝ, ΠΑΡΑΓΩΓΙΚΟΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ, Ημερομηνία και ώρα περιήγησης 19 Ιουνίου 2015 10:00 πμ.

xiii. http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%95%CF%80%CE%B9%CF%87%CE%B5%CE%AF%CF%81%CE%B7%CF%83%CE%B7 ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΗ, Ημερομηνία και ώρα περιήγησης 25 Ιουνίου 2015 9:00 πμ, Ημερομηνία πρώτης συγγραφής 30 Ιουνίου 2005 14:03, Τελευταία τροποποίηση 20 Ιανουαρίου 2015 16:02.

xiv. https://el.wikipedia.org/w/index.php?title=%CE%9F%CE%B9%CE%BA%CE%BF%CE%BD%CE%BF%CE%BC%CE%AF%CE%B1&oldid=5029937 ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ, Ημερομηνία περιήγησης 2 Ιουλίου 2015 4:10 μμ. Ημερομηνία πρώτης συγγραφής 3 Ιουνίου 2005 00:12, Τελευταία τροποποίηση 16 Ιανουαρίου 2015 11:59.

xv. Ηλεκτρονικό βιβλίο, μαθηματικές μέθοδοι στα οικονομικά-Λύσεις ασκήσεων, Συγγραφείς Κος Αναστάσιος Π. Ξεπαπαδέας, Κος Ιωάννης Π. Γιαννικός, Χρονολογία έκδοσης 2007.