ΤΕΙ ΔΥΤΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ / ΜΕΣΟΛΟΓΓΙ

# Πτυχιακή εργασία

## ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΗΝ ΠΡΑΞΗ

Κουρκούλης Εμμανουήλ – Σπυρούλια Αργυρώ

Μεσολόγγι 2016

ΤΕΙ ΔΥΤΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ / ΜΕΣΟΛΟΓΓΙ

# Πτυχιακή εργασία

## ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΗΝ ΠΡΑΞΗ

Κουρκούλης Εμμανουήλ – Σπυρούλια Αργυρώ

Επιβλέπων καθηγητής

Γεώργιος Μουρκούσης

Μεσολόγγι 2016

Η έγκριση της πτυχιακής εργασίας από το Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων/Μεσολογγίου του ΤΕΙ Δυτικής Ελλάδας δεν υποδηλώνει απαραιτήτως και αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα εκ μέρους του Τμήματος.

**ΠΕΡΙΛΗΨΗ**

Για να φτάσουμε στην απόκτηση του πτυχίου μας αποφασίσαμε να αναλάβουμε την παρούσα πτυχιακή εργασία. Με την πολύτιμη βοήθεια του καθηγητή μας αναλύουμε το παρακάτω θέμα: Γραμμικός Προγραμματισμός από την Θεωρία στην Πράξη.

Βασικό αντικείμενο της παρούσας πτυχιακής εργασίας είναι ο εντοπισμός ορισμένων προβλημάτων που αφορούν τις επιχειρήσεις και μπορούν να εκφραστούν ως γραμμικά προγράμματα. Στα συγκεκριμένα προβλήματα για την καλύτερη επίλυση τους θα χρησιμοποιήσουμε κάποιο πρόγραμμα του Γραμμικού Προγραμματισμού το οποίο συνήθως καλούμε και «solver», όπου θα δώσουμε συγκεκριμένες τιμές και παραμέτρους που εμπλέκονται με το πρόβλημα, και τα αποτελέσματα που θα παραχθούν θα τα σχολιάσουμε.

Έτσι λοιπόν στο πρώτο μέρος της πτυχιακής εργασίας αναλύουμε την Επιχειρησιακή Έρευνα. Γνωρίζουμε την ιστορική αναδρομή της, σε ποιους τομείς δραστηριοποιείται και ποια προβλήματα αντιμετωπίζει. Μέσα από την Επιχειρησιακή Έρευνα ερχόμαστε σε μία πρώτη επαφή με τον Γραμμικό Προγραμματισμό, για να βρεθούμε στο δεύτερο κεφάλαιο και να εξηγήσουμε τι ακριβώς είναι ο Γραμμικός Προγραμματισμός, ποια η σημασία του και να δούμε τις μεθόδους που χρησιμοποιούνται για την επίλυση των προβλημάτων. Έχοντας λοιπόν μιλήσει για τον Γραμμικό Προγραμματισμό, στο τρίτο κεφάλαιο περιγράφουμε την μέθοδο Simplex και αναλύουμε τις μεθόδους της για να είμαστε σε θέση να κατανοήσουμε τα γραμμικά προβλήματα και πως αυτά επιλύονται. Τέλος στο τέταρτο κεφάλαιο παραθέτουμε πέντε από τα προβλήματα μαζί με την λύση τους και τους σχολιασμούς τους. Αυτά τα προβλήματα απασχολούν ορισμένες επιχειρήσεις και αντικατοπτρίζουν τα εμπόδια που μπορεί να αντιμετωπίζουν. Εμείς λοιπόν για την ανάγκη της πτυχιακής εργασίας μας πήραμε κάποια από αυτά τα προβλήματα. Τα λύσαμε με την βοήθεια του Solver που είναι ένα Γραμμικό Πρόγραμμα και μέσω των μεθόδων του φτάσαμε στις καλύτερες δυνατές λύσεις. Κάπως έτσι καταλήγουμε στον επίλογο της πτυχιακής μας εργασίας που έχοντας μιλήσει για όλα αυτά παραπάνω είμαστε στην θέση να αναγνωρίζουμε την χρησιμότητα του Γραμμικού Προγραμματισμού και να κατανοήσουμε τον σπουδαίο ρόλο που έχει ανάμεσα στις επιχειρήσεις.

# ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

# ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

# ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

# 1 ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

## 1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η Επιχειρησιακή Έρευνα κατέχει σπουδαίο ρόλο σε μία εποχή που συνεχώς μεταβάλλεται και εξελίσσεται με ραγδαίους ρυθμούς. Για να καταλάβουμε την ουσιαστική συμμετοχή της σε όλους τους τομείς, αρκεί να δούμε τον παρακάτω συλλογισμό. Οι επιχειρηματικές δραστηριότητες απαιτούν πόρους. Τα είδη των πόρων είναι το κεφάλαιο, τα μηχανήματα, οι πρώτες ύλες, το ανθρώπινο δυναμικό, ο εξοπλισμός, ακόμα και ο διαθέσιμος χρόνος κ.τ.λ. Όλα αυτά τα είδη πόρων με την σειρά τους υπόκεινται σε κάποιους περιορισμούς που προκύπτουν από την διεύθυνση και την διοίκηση μεγάλων συστημάτων και οργανισμών. Μέσα από αυτούς τους περιορισμούς δημιουργούνται τα προβλήματα. Σκοπός της Επιχειρησιακής Έρευνας λοιπόν, είναι να βελτιώνει την κατανομή των περιορισμένων πόρων για να εξασφαλίζει μια πιο ομαλή λειτουργία στην διεκπεραίωση διάφορων εργασιών της εκάστοτε επιχείρησης, χρησιμοποιώντας τις τεχνικές της Επιχειρησιακής Έρευνας.

## 1.2 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Εμφανίστηκε για πρώτη φορά στην δεκαετία του 1930. Προσπάθησε να λύσει λειτουργικά προβλήματα. Ήταν ένας τρόπος εύρεσης του πιο αποδοτικού τρόπου εξολόθρευσης ανθρώπων εν καιρώ πολέμου. Αναπτύχθηκε κυρίως στον Β΄ Παγκόσμιο Πόλεμο στην Αγγλία. Ο όρος ''επιχειρησιακή'' προέρχεται από τις πολεμικές επιχειρήσεις. Συμμετείχαν διαφορετικές ομάδες επιστημόνων, από πολλούς κλάδους (μαθηματικοί, φυσικοί, μηχανικοί). Μερικοί από αυτούς, βραβεύτηκαν κιόλας, με βραβείο Nobel για τις μετέπειτα εργασίες τους. Κύριες εφαρμογές που ασχολήθηκε τότε η Επιχειρησιακή Έρευνα ήταν η αεροάμυνα, ο ανθυποβρυχιακός πόλεμος, ο σχεδιασμός περιπολιών των αεροσκαφών και ο σχεδιασμός όπλων.

Δεν πρέπει να οδηγηθούμε στην εσφαλμένη εντύπωση ότι είναι μια μέθοδος επιστημονικής ανάλυσης, η οποία μπορεί να εφαρμοστεί μόνο σε προβλήματα στρατιωτικού περιεχομένου. Μετά τον Β΄ Παγκόσμιο Πόλεμο καθιερώθηκε ως νέο επιστημονικό πεδίο και αναπτύχθηκε ραγδαία κυρίως στις Η.Π.Α. Κατά την δεκαετία του 1950 έγιναν οι πρώτες εφαρμογές στον τομέα της βιομηχανίας και της διοίκησης. Τέλος το 1960 καθιερώθηκε ως μάθημα στα Πανεπιστήμια.

## 1.3 ΟΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Η ραγδαία εξέλιξη της Επιχειρησιακής Έρευνας προέρχεται από την γρήγορη ανάπτυξη μαθηματικών τεχνικών και εργαλείων. Τις δεκαετίες του 1950 και 1960 αναπτύχθηκαν οι περισσότεροι αλγόριθμοι και μέθοδοι που χρησιμοποιούνται ακόμα και σήμερα όπως είναι ο Γραμμικός προγραμματισμός και η μέθοδος Simplex, ο έλεγχος αποθεμάτων, η θεωρία αναμονής και ο δυναμικός προγραμματισμός. Φυσικά βοήθησε αρκετά και η ραγδαία εξέλιξη των Η/Υ με την επανάσταση της πληροφορικής αφού με την βοήθειά της, ανέπτυξαν ειδικά προγράμματα που βοηθούσαν στην καλύτερη διαχείριση δεδομένων και την γρήγορη επίλυση των προβλημάτων.

## 1.4 ΟΡΙΣΜΟΣ

Ο όρος Επιχειρησιακή Έρευνα προέρχεται από τον αγγλικό όρο Operation Research (OR). Παρά την μακροχρόνια πορεία της στην ιστορία δεν έχει καθιερωθεί κάποιος θεμελιώδης ορισμός. Πολλοί επιστήμονες προσπάθησαν κατά καιρούς να δώσουν έναν ορισμό που να ανταποκρίνεται στην φύση και στο περιεχόμενο της και να καθορίζει ακριβώς το πεδίο εφαρμογής της. Μερικοί ασχολήθηκαν με τα αποτελέσματα που επιτυγχάνει και άλλοι προσπάθησαν να ορίσουν με ακρίβεια το περιεχόμενο της. Υπάρχουν πολλοί ορισμοί βέβαια που αναγνωρίζονται και παραθέτουμε παρακάτω τους ποιο σημαντικούς.

Σύμφωνα με την εταιρεία επιχειρησιακής έρευνας στη Αγγλία, είναι η εφαρμογή της σύγχρονης επιστήμης πάνω σε πολύπλοκα προβλήματα που προκύπτουν στην διεύθυνση και διοίκηση μεγάλων συστημάτων, αποτελούμενων από ανθρώπους, μηχανές, υλικά και κεφάλαια στις επιχειρήσεις. Η χαρακτηριστική της μεθοδολογία συνίσταται στην ανάπτυξη επιστημονικού μοντέλου του υπό μελέτη συστήματος που περιλαμβάνει μετρήσεις τυχαίων παραγόντων και με το οποίο προβλέπει και συγκρίνει τα αποτελέσματα εναλλακτικών αποφάσεων, στρατηγικών και ελέγχων.

Επιχειρησιακή Έρευνα μπορεί να θεωρηθεί σύμφωνα με τον Ackoff και Sasienni η εφαρμογή επιστημονικών μεθόδων από μικτές ομάδες σε προβλήματα που αφορούν τον έλεγχο οργανωμένων συστημάτων (αποτελούμενο από ανθρώπους και μηχανές) κατά τρόπο ώστε να παρέχουν λύσεις που εξυπηρετούν κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο τους σκοπούς του οργανισμού ως συνόλου.

Κατά τον Morse και Kimbale η Επιχειρησιακή Έρευνα είναι μια επιστημονική μέθοδος η οποία εφοδιάζει τα διευθύνοντα στελέχη διάφορων οργανισμών με ποσοτικά στοιχεία, κατάλληλα για τις αποφάσεις που πρέπει να πάρουν αναφορικά με τις ενέργειες τις οποίες διευθύνουν.

Τέλος, σύμφωνα με τον Ελληνικό ορισμό η Επιχειρησιακή Έρευνα είναι η επιστημονική προετοιμασία των αποφάσεων της διοίκησης με την επιστημονική ανάλυση των δεδομένων και την δημιουργία μαθηματικών προτύπων.

## 1.5 ΣΥΓΓΕΝΕΙΣ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΙ ΚΛΑΔΟΙ

Η Επιχειρησιακή Έρευνα είναι η επιστήμη που ασχολείται με τη βελτιστοποίηση (optimization) της απόδοσης ενός συστήματος. Θα μπορούσαμε να πούμε πως χωρίζεται σε δύο μέρη:

**α)Επιστήμη:** που χρησιμοποιεί μαθηματικές τεχνικές και μεθοδολογία όπως είναι η μοντελοποίηση και η στατιστική ανάλυση

**β)Τέχνη:** που είναι ο ανθρώπινος παράγοντας όπου προσπαθεί με τις μαθηματικές τεχνικές να βρει την κατάλληλη λύση, για το κατάλληλο πρόβλημα.

Για το λόγο αυτό χαρακτηρίζεται συχνά και με τους όρους Ποσοτική Ανάλυση (Quantitative Analysis) ή Διοικητική Επιστήμη (Management Science). Συγγενής επιστημονικός κλάδος είναι η Οργάνωση και Διοίκηση όπου μπορεί να ασχολούνται με τα ίδια προβλήματα αλλά χρησιμοποιούν διαφορετική μεθοδολογία. Η μεθοδολογία της Επιχειρησιακής Έρευνας είναι η μέθοδος των θετικών επιστημών προσαρμοσμένη στις συνθήκες των κοινωνικών επιστημών και κυρίως της Διοίκησης των Οργανισμών.

Άλλος ένας κλάδος είναι η Κυβερνητική και Επιστήμη Συστημάτων που παρόλο που μελετούν συστήματα η Επιχειρησιακή Έρευνα δεν τα διακρίνει στη βάση της υλικής τους δομής αλλά στη βάση της οργανωτικής τους δομής, αναλύει τις πληροφορίες και επιχειρεί να τις μετρήσει ποσοτικά, δίνει βαρύτητα στα συστήματα ελέγχου, ασχολείται με συστήματα που δεν περιγράφονται μαθηματικά και περιλαμβάνει μέλη ποικίλων επιστημονικών κλάδων.

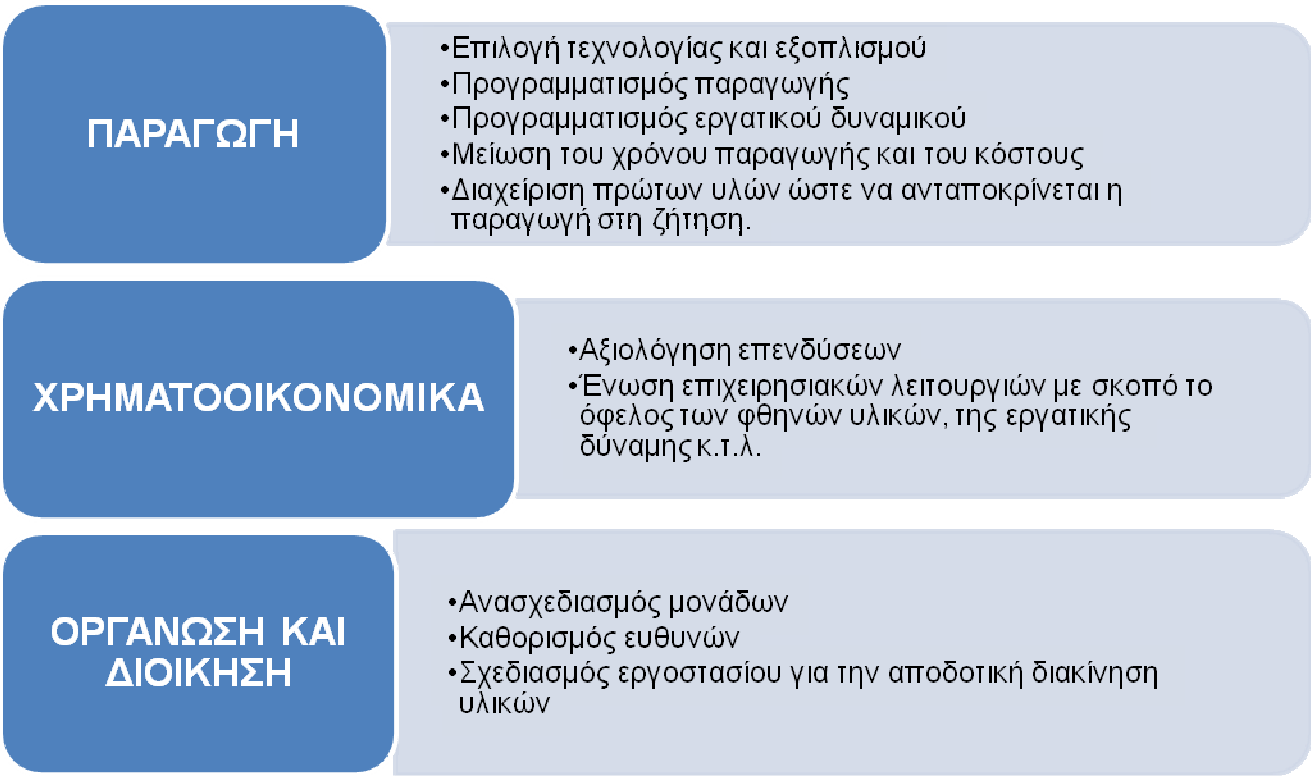
## 1.6 ΤΟΜΕΙΣ ΠΟΥ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΠΟΙΕΙΤΑΙ

Η αποτελεσματικότητα του νέου κλάδου προσέλκυσε το ενδιαφέρον της βιομηχανίας. Από την άλλη πλευρά, η πρόοδος των Η/Υ προκάλεσε και ταυτόχρονη ανάπτυξη της Επιχειρησιακής Έρευνας σε πολλά επίπεδα. Τα προβλήματα είναι πλέον τόσο μεγάλα που είναι αδύνατη η εκτέλεση τον απαιτούμενων υπολογισμών με το χέρι. Όλες αυτές οι μεταβολές στο οικονομικό και επιχειρησιακό περιβάλλον, η αύξηση της πολυπλοκότητας, η αλληλεξάρτηση των διαφόρων φαινομένων, οι ανάγκες υποστήριξης για σφαιρική προσέγγιση και για συστηματική ανάλυση της λήψης αποφάσεων, έχουν συμβάλλει για να γίνει ένα απαραίτητο εργαλείο. Οι κλάδοι που δραστηριοποιείται η Επιχειρησιακή Έρευνα αφορά όλους τους τομείς και μερικοί από αυτούς αναφέρονται παρακάτω:

- Οικονομία
- Εκπαίδευση
- Παραγωγή
- Πληροφορική
- Marketing
- Χρηματοοικονομικά
- Οργάνωση και Διοίκηση
- Ανθρώπινο Δυναμικό
- Δημόσιος Τομέας
- Περιβάλλον
- Ενέργεια, Φυσικοί Πόροι
- Ηλεκτρονική, Επικοινωνίες
- Δίκτυα, Μεταφορές, Εφοδιασμός


**Εικόνα 1 : Τομείς Επιχειρησιακής Έρευνας**

Στο διάγραμμα παραπάνω βλέπουμε ξεκάθαρα πως είναι μία επιστήμη που απευθύνεται σε πολλούς τομείς και διάφορους κλάδους. Με την αποτελεσματικότητα της έχει καταφέρει να είναι μία επιστήμη που μπορεί να επιλύει διάφορα προβλήματα δίνοντας τις ιδανικότερες λύσεις ώστε να εξασφαλίσει την ορθή λειτουργία μιας επιχείρησης ή ενός οργανισμού. Για να κατανοήσουμε καλύτερα την εφαρμογή της Επιχειρησιακής Έρευνας θα μπορούσαμε να δούμε στην πράξη κάποια από τα παραδείγματα των περιοχών εφαρμογής της όπως:




**Εικόνα 2 : Περιοχές εφαρμογής Επιχειρησιακής Έρευνας**

## 1.7 ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ

Βάση των πληροφοριών που συλλέξαμε, ύστερα από εκτεταμένη αναζήτηση, τα βασικά χαρακτηριστικά της Επιχειρησιακής Έρευνας που μπορούμε να επισημάνουμε, είναι τα ακόλουθα:

- Χρησιμοποιεί επιστημονική μεθοδολογία για να εκτιμήσει την βέλτιστη λύση των προβλημάτων με βάση τα αντικειμενικά κριτήρια. Το βασικό εργαλείο που χρησιμοποιεί είναι η ανάπτυξη μαθηματικών μοντέλων.

- Η διεξαγωγή της έρευνας δεν γίνεται σε μεμονωμένα εργαστήρια ερευνών, όπως η κλασική έρευνα, αλλά σε χώρους των προβλημάτων που υπάρχει συνεχή επαφή και συνεργασία των επιχειρησιακών ερευνητών με τα διοικητικά στελέχη που είναι αρμόδια για τον συγκεκριμένο χώρο.

♦ Απευθύνεται σε προβλήματα λήψεως αποφάσεων και στον έλεγχο οργανωμένων ενεργών συστημάτων.

♦ Η επιχειρησιακή έρευνα έχει υιοθετήσει την προσέγγιση του συστήματος κατά την οποία η συμπεριφορά οποιουδήποτε από τα μέλη του συστήματος επηρεάζει κατά κάποιο τρόπο την συμπεριφορά των άλλων μελών καθώς και όλο το σύστημα ως συνόλου.

♦ Η έρευνα διεξάγεται από μικτές ομάδες επιστημόνων, από διάφορες ειδικότητες και ονομάζεται «διεπιστημονική προσέγγιση». Είναι η συνεργασία πολλών ειδικοτήτων μαζί, με διαφορετικό υπόβαθρο και τρόπο σκέψης όπως οικονομολόγοι, μηχανικοί, μαθηματικοί, βιολόγοι κ.τ.λ.

## 1.8 ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Για να μπορέσουμε να κατηγοριοποιήσουμε τις τεχνικές πρέπει να αναφερθούμε είτε στο πεδίο εφαρμογής της, είτε στον τύπο του μαθηματικού μοντέλου. Έτσι λοιπόν έχουμε τα παρακάτω:

1. **Γραμμικός Προγραμματισμός** που αποτελεί τη βασικότερη μεθοδολογία της επιχειρησιακής έρευνας. Υπολογίζοντας τις μεταβλητές και τους περιορισμούς του προβλήματος, δημιουργεί μια γραμμική συνάρτηση που περιγράφει τον αντικειμενικό στόχο. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η κατανομή των περιορισμένων πόρων μιας επιχείρησης με τον αποτελεσματικότερο τρόπο. Οι περιορισμοί αφορούν το κεφάλαιο, τα μηχανήματα, το προσωπικό της επιχείρησης κ.τ.λ.

2. **Μη γραμμικός - Ακέραιος Προγραμματισμός:** αποτελεί επέκταση του Γραμμικού Προγραμματισμού σε ειδικές περιπτώσεις. Στον Ακέραιο Προγραμματισμό κάποιες μεταβλητές ορισμένες φορές λαμβάνουν μόνο ακέραιες τιμές όπως σε προβλήματα που έχουμε να κάνουμε με κάποιες συγκεκριμένες χρονικές περιόδους που πρέπει να εκτελεστεί μια εργασία.

3. **Θεωρία Αποφάσεων-Θεωρία Παιγνίων**: είναι τα μοντέλα αποφάσεων που συστηματοποιούν τις μεθόδους της βέλτιστης λύσης και των εναλλακτικών αποφάσεων μέσα στην αβεβαιότητα και το ρίσκο, έχοντας πάντα για κάθε πρόβλημα μια εναλλακτική λύση.

4. **Προβλήματα Μεταφοράς:** λαμβάνει υπόψη τη διαθέσιμη ποσότητα σε όλα τα σημεία αποθήκευσης, την ζήτηση σε όλα τα σημεία κατανάλωσης αλλά και το κόστος μεταφοράς από το ένα σημείο στο άλλο. Με το μαθηματικό μοντέλο που δημιουργείται μπορεί να προσδιορίσει ακριβώς τις μεταφορές που πρέπει να γίνουν.

5. **Ουρές Αναμονής**: έχει ως σκοπό την καλύτερη λειτουργία μονάδων εξυπηρέτησης όπως είναι ο χρόνος αναμονής των πελατών σε μια επιχείρηση.

6. **Προγραμματισμός και Έλεγχος Αποθεμάτων**: στόχος της είναι να προγραμματίσει τα αποθέματα για τον καθορισμό της ποσότητας κάθε παραγγελίας και του χρόνου που απαιτείται. Είναι πολύ σημαντικό γιατί τα αποθέματα είναι μέρος του κεφαλαίου της επιχείρησης και κατά κάποιο τρόπο είναι δεσμευμένα και δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε άλλες δραστηριότητες.

7. **Μοντέλα Δικτύων**: αναπαριστά πραγματικές καταστάσεις υπό μορφή δικτύου όπως ο προγραμματισμός και ο έλεγχος κάποιου έργου.

## 1.9 ΔΙΑΚΡΙΣΕΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Τα προβλήματα που απασχολούν την Επιχειρησιακή Έρευνα είναι από διαφορετικούς τομείς και πολλούς κλάδους. Ωστόσο για την διευκόλυνση μας, διακρίνονται σε κατηγορίες ανάλογα με το επίπεδο της διοίκησης, το περιεχόμενό τους και τον τύπο ή την μορφή τους.

Στο επίπεδο διοίκησης συναντάμε το Στρατηγικό Επίπεδο (Strategic Level), το Τεχνικό Επίπεδο (Operational Level) και το Τακτικό Επίπεδο (Tactical Level). Η διάκριση αυτών των επιπέδων γίνεται βάση της διάρκειας που έχουν τα προβλήματα, είτε αυτά είναι τακτικά άρα μικρής διάρκειας, είτε στρατηγικά που έχουν μεγαλύτερη διάρκεια. Στην συνέχεια έχουμε τους αντικειμενικούς σκοπούς, όπου τα στρατηγικά προβλήματα θέτουν βασικούς αντικειμενικούς σκοπούς σε αντίθεση με τα τακτικά προβλήματα που θέτουν ενδιάμεσους λεπτομερείς στόχους. Τέλος διακρίνονται και ανάλογα με το μέρος της επιχείρησης που απευθύνονται γιατί σε τακτικά προβλήματα χρειάζεται μικρότερο μέρος, ενώ σε στρατηγικά προβλήματα απαιτείται μεγαλύτερο μέρος.

Όσον αφορά το περιεχόμενο χωρίζεται σε κατηγορίες ανάλογα και με τον κλάδο που απευθύνεται. Τέτοιες κατηγορίες είναι η παραγωγή, που έχει αναρίθμητα ζητήματα όπως είναι επιλογή θέσεως εργοστασίου, ο προγραμματισμός της παραγωγής, ο έλεγχος ποιότητας, ο μηχανολογικός εξοπλισμός, οι πωλήσεις, η διανομή κ.τ.λ. Άλλη κατηγορία είναι τα οικονομικά που έχει να κάνει με προϋπολογισμούς και χρηματοοικονομικούς προγραμματισμούς και κάποιες άλλες κατηγορίες είναι η εμπορία και το προσωπικό.

Τέλος ως προς την μορφή ή τον τύπο υπάρχει ο τρόπος συσχέτισης των παραμέτρων του προβλήματος. Το μαθηματικό μοντέλο καθορίζει τον τύπο του προβλήματος. Υπάρχουν συγκεκριμένες κατηγορίες προβλημάτων, χωρίς αυτό βέβαια να σημαίνει ότι δεν υπάρχουν προβλήματα που δεν μπορούν να ενταχθούν σε κάποια από αυτές τις κατηγορίες.

## 1.10 <u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ</u>

Έχουμε καταλήξει στο γεγονός πως η Επιχειρησιακή Έρευνα έχει ως στόχο την επίλυση των προβλημάτων που προκύπτουν στις επιχειρήσεις από διάφορους περιορισμούς. Μέσω των τεχνικών της, είναι σε θέση να βρίσκει τις κατάλληλες λύσεις. Για να το κάνει όμως αυτό ακολουθεί μία συγκεκριμένη μεθοδολογία που την βοηθά να αποκτήσει μια πιο σφαιρική άποψη πάνω στο κάθε σύστημα που θα επέμβει.

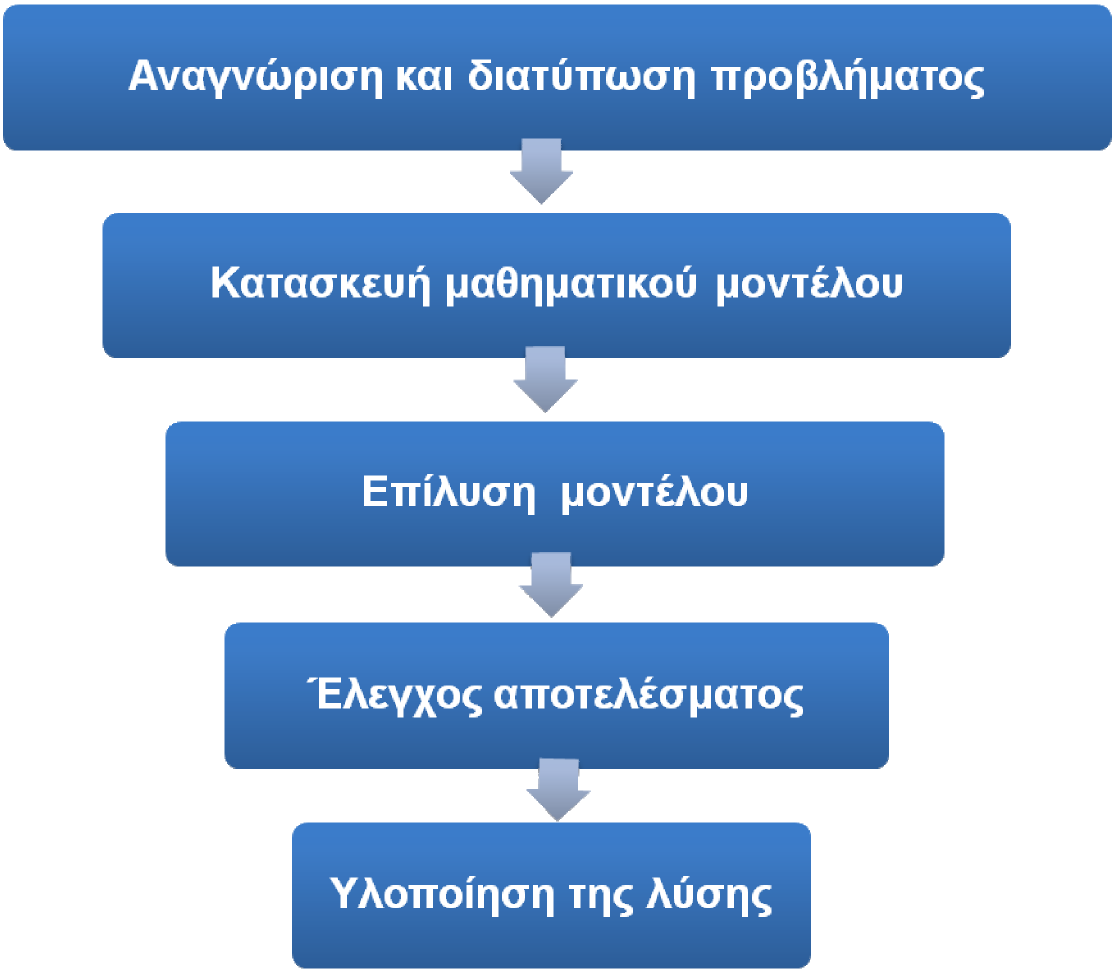
Το πρώτο βήμα της μεθοδολογίας της Επιχειρησιακής Έρευνας είναι η παρατήρηση του συστήματος. Σκοπός είναι να μπορέσει να αναγνωρίσει και να διαμορφώσει το πρόβλημα που θα εντοπίσει. Μετά την αναγνώριση του προβλήματος πρέπει να γίνει λεπτομερής ανάλυση όλων των παραμέτρων, καθώς και να καθοριστούν τα πεδία τιμών και οι περιορισμοί που έχει το πρόβλημα. Πρέπει ακόμα να προσδιοριστούν οι επιθυμητοί στόχοι και να μελετηθούν επιπτώσεις που μπορεί να προκύψουν.

Στην συνέχεια περνάει στο δεύτερο βήμα που είναι η κατασκευή του μαθηματικού μοντέλου. Εισάγει στο μαθηματικό μοντέλο τους περιορισμούς και τις παραμέτρους που έχει εντοπίσει και διατυπώνει το πρόβλημα με μαθηματικές σχέσεις. Ύστερα γίνεται η μοντελοποίηση, δηλαδή η αναπαράσταση του προβλήματος ως ένα σύνολο μαθηματικών εξισώσεων. Τέλος μέσω του υπολογιστή και των προγραμμάτων που χρησιμοποιεί επιλύει το μαθηματικό μοντέλο. Στην ουσία αναλύει της λύσεις των εξισώσεων που προκύπτουν για να βρει την καταλληλότερη λύση.

Στο τρίτο βήμα ελέγχει την λύση που προέκυψε από το μαθηματικό μοντέλο, το μελετά και επαληθεύει αν είναι όντως η πιο κατάλληλη λύση. Μετά περνάει στην επόμενη φάση, που πρέπει να υλοποιήσει και να διατηρήσει την λύση που έχει επιλέξει. Τέλος πρέπει να αξιολογήσει την λύση και να επαληθεύσει πως έχει τα αναμενόμενα αποτελέσματα που επιθυμούσε από την αρχή.

### 1.10.1 ΣΤΑΔΙΑ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Μετά την ανάλυση των βημάτων της μεθοδολογίας, σχεδιάσαμε ένα διάγραμμα που απεικονίζει τα βήματα που ακολουθεί η Επιχειρησιακή Έρευνα, όταν πρόκειται να λύσει ένα πρόβλημα.




**Εικόνα 3 : Στάδια προβλημάτων**

### 1.10.2 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Η διαδικασία της μοντελοποίησης είναι ένα σημαντικό κομμάτι. Το μοντέλο διαμορφώνεται με μαθηματικά σύμβολα και σχέσεις και απεικονίζει το υπό μελέτη σύστημα. Στην ουσία αναπαριστά κάποια κατάσταση ή διαδικασία του συστήματος, με μαθηματικές εξισώσεις. Ένα μαθηματικό μοντέλο θα πρέπει να είναι δυνατό να λυθεί και να περιγράφει ακριβώς το πρόβλημα που πρέπει να επιλύσουμε. Γενικά ένα μοντέλο πρέπει να είναι πλήρες και εύκολο να το χρησιμοποιήσουμε, να μπορούμε να το προσαρμόσουμε στα δεδομένα και να είναι χρήσιμο ως προς το κόστος και τον χρόνο.

Ένα μαθηματικό μοντέλο περιέχει:

- **Μεταβλητές απόφασης**: είναι οι αποφάσεις που πρέπει να ληφθούν και καθορίζονται από αυτόν που παίρνει τις αποφάσεις, είναι δηλαδή ελεγχόμενες μεταβλητές που τις μεταβάλλουμε για να πετύχουμε το σκοπό.
- **Αντικειμενικό στόχο**: είναι ο στόχος που έχει τεθεί από τις μεταβλητές απόφασης και συνήθως στοχεύει στην βελτίωση μιας κατάστασης.
- **Παραμέτρους**: είναι μετρήσιμα στοιχεία που επηρεάζουν την λύση του προβλήματος και παρόλο που τα γνωρίζουμε από την αρχή δεν μπορούν να αλλάξουν γιατί είναι δεδομένα.
- **Περιορισμούς**: είναι μαθηματικές σχέσεις που συνδέονται με τις τιμές των μεταβλητών αποφάσεων και τις παραμέτρους του προβλήματος και καθορίζουν τις συνθήκες λειτουργίας του συστήματος.

Τα μοντέλα επίσης χωρίζονται σε κατηγορίες. Αυτός ο καθορισμός γίνετε ανάλογα με τις μεθόδους επίλυσης, το αποτέλεσμα που προκύπτει από την εφαρμογή του μοντέλου και τον τρόπο αντιμετώπισης σε συνθήκες αβεβαιότητας.

Στην κατηγορία που διαχωρίζονται βάση της μεθόδου επίλυσης συναντάμε τα αναλυτικά μοντέλα, που η λύση του προβλήματος προκύπτει από την εφαρμογή της τιμής των μεταβλητών του μοντέλου με βάση τις τιμές των παραμέτρων του. Τα αλγοριθμικά μοντέλα όπου η λύση προκύπτει από την εφαρμογή ενός αλγόριθμου. Την προσομοίωση που είναι μια γενική μέθοδος ανάλυσης σύνθετων και πολύπλοκων προβλημάτων και τις ευρετικές μεθόδους που είναι ειδική κατηγορία αλγορίθμων και εφαρμόζεται σε περιπτώσεις πολυπλοκότητας.

Σε άλλη κατηγορία διαχωρίζονται ως προς τον στόχο τους. Τέτοια είναι τα μοντέλα βελτιστοποίησης που έχουν σαν στόχο την μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση μιας μεταβλητής ή της τιμής μια συνάρτησης που θα δηλώνει τον επιχειρησιακό στόχο. Τα περιγραφικά μοντέλα που προσδιορίζουν τις αλλαγές που θα προκύψουν και τα μοντέλα πρόβλεψης, που στόχο έχουν την πρόβλεψη μελλοντικών τιμών που θα προκύψουν από τις μεταβαλλόμενες μεταβλητές.

Στην τελευταία κατηγορία είναι τα μοντέλα που διαχωρίζονται ως προς την διαχείριση αβεβαιότητας και έχουμε τα προσδιοριστικά μοντέλα όπου οι τιμές των παραμέτρων του προβλήματος είναι σταθερές και τα πιθανολογικά μοντέλα που οι παράμετροι του προβλήματος υπόκεινται σε τυχαίες μεταβολές.

### 1.10.3 ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΛΗΨΗΣ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

Για τις επιχειρήσεις, τα προβλήματα που έχουν να αντιμετωπίσουν είναι ένα καθημερινό φαινόμενο. Παρόλα αυτά τα πράγματα δυσκολεύουν γιατί οι απαιτήσεις και τα προβλήματα συνεχώς αυξάνονται και μεταβάλλονται. Η διοίκηση και τα διοικητικά στελέχη είναι αυτοί που παίρνουν την ευθύνη της λήψης των αποφάσεων και πρέπει να έχουν μελετήσει όλα τα πιθανά σενάρια που μπορεί να προκύψουν. Έτσι ελαχιστοποιούν το κίνδυνο του ρίσκου και διασφαλίζουν την καλή λειτουργία του συστήματος.

Αρχικά πρέπει να βρεθούν οι αιτίες που προκαλούν το πρόβλημα, αν συνδέεται και με άλλα προβλήματα όπως γίνεται συνήθως και αν θα τα επηρεάσει. Ο λήπτης πρέπει να είναι σε θέση να γνωρίζει πότε θα επιλυθεί το πρόβλημα, με ποιον τρόπο και ποια είναι τα αναμενόμενα αποτελέσματα. Για να γίνει αυτό πρέπει να έχει δημιουργήσει ένα πλάνο που να αναγνωρίζει ποιοι είναι οι παράγοντες που δημιουργούν το πρόβλημα, να έχει καθορίσει τις μεταβλητές και να ξέρει τους περιορισμούς που το διακρίνουν. Οφείλει να ξέρει σε περίπτωση ανάγκης, τι μπορεί να αλλάξει, με ποιον τρόπο αλλά και τι αντίκτυπο θα έχει αυτό στο αποτέλεσμα που επιθυμεί. Ο λήπτης πρέπει να επιλέξει την λύση που του δίνει το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα. Αυτό γίνεται μέσω της σύγκρισης των εφικτών εναλλακτικών λύσεων και καθορίζεται από τον στόχο που έχει θέσει η κάθε επιχείρηση.

## 1.11 ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΛΥΣΗΣ

Όσο παράξενο και αν φαίνεται, το τελευταίο στάδιο, που είναι η υλοποίηση της λύσης, είναι και το πιο δύσκολο. Ακόμα και αν η λύση που θα επιλεχθεί είναι η βέλτιστη, πρέπει να πείσει τους υπευθύνους ως προς την αποτελεσματικότητά της, διαφορετικά θα αποτύχει η όλη προσπάθεια. Επίσης πρέπει να γίνει σωστός χειρισμός των λύσεων γιατί αλλιώς το αποτέλεσμα θα είναι αρνητικό. Μετά την υλοποίηση της προτεινόμενης λύσης απαιτείται η συνεχής παρακολούθηση και ο έλεγχος, ώστε να εντοπιστούν γρήγορα τυχόν αλλαγές και βελτιώσεις οι οποίες δεν ήταν αρχικά ορατές. Αν κάτι φαίνεται πως δεν λειτουργεί βάση πλάνου θα πρέπει να αντικαταστήσουν την λύση με μία που θα ανταποκρίνεται καλύτερα στις απαιτήσεις του συστήματος. Τέλος αν η λύση αποφέρει τα αναμενόμενα αποτελέσματα και αποδειχθεί πως ήταν η καταλληλότερη, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον ίδιο αλγόριθμο για την επίλυση κάποιου άλλου αντίστοιχου προβλήματος του συστήματος.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

# 2 ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

## 2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο Γραμμικός Προγραμματισμός (Linear Programming) είναι η πιο γνωστή μέθοδος της Επιχειρησιακής Έρευνας. Πιο συγκεκριμένα είναι μια μαθηματική μέθοδος. Χρησιμοποιείται για την επίλυση προβλημάτων και έχει ως σκοπό την εύρεση της βέλτιστης λύσης, λαμβάνοντας υπόψη τους γραμμικούς περιορισμούς. Όπως υποδηλώνει το όνομά του, το μοντέλο του γραμμικού προγραμματισμού αποτελείται από γραμμικές συναρτήσεις και περιορισμούς, γεγονός που σημαίνει ότι οι μεταβλητές του μοντέλου έχουν μεταξύ τους αναλογικές σχέσεις. Ανάμεσα στις εναλλακτικές λύσεις που έχει, αναζητά αυτή που θα οδηγήσει στο άριστο αποτέλεσμα. Ο ρόλος του Γραμμικού Προγραμματισμού είναι να βρεί την καλύτερη λύση σε δύσκολες οικονομικές και διοικητικές αποφάσεις σε μια εταιρία ή έναν οργανισμό αλλά και να βελτιώσει τον τρόπο που παίρνονται οι αποφάσεις από τα διοικητικά στελέχη.

Θεωρείται ένας από τους πιο εφαρμοσμένους κλάδους στην επιστήμη των Μαθηματικών, με πληθώρα εφαρμογών στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές. Μπορεί να χαρακτηριστεί και ως μια από τις πιο σπουδαίες μαθηματικές ανακαλύψεις του εικοστού αιώνα. Είναι ιδιαίτερα δημοφιλής τεχνική, αφού η επίδρασή του από το 1950, ήταν πράγματι πολύ σημαντική.

Σήμερα ο Γραμμικός Προγραμματισμός έχει γίνει ένα πρότυπο εργαλείο, που χρησιμοποιείται από τις περισσότερες εμπορικές και βιομηχανικές επιχειρήσεις όλων των χωρών. Η τεχνική που χρησιμοποιεί ο Γραμμικός Προγραμματισμός θεωρείται εξαιρετικά χρήσιμη εξαιτίας της εφαρμογής της σε πολλούς διαφορετικούς τύπους πραγματικών επαγγελματικών προβλημάτων, σε τομείς όπως ο χρηματοπιστωτικός, η παραγωγή, η διανομή και οι πωλήσεις, το προσωπικό, το μάρκετινγκ και πολλοί ακόμα τομείς της διοίκησης. Ένα ακόμα θετικό του στοιχείο είναι ότι απευθύνεται ακόμα και σε καθημερινά ζητήματα ανεξαρτήτου μεγέθους του οργανισμού.

Εν κατακλείδι ο Γραμμικός Προγραμματισμός αποτελεί αναμφίβολα το δημοφιλέστερο μοντέλο στο χώρο της Επιχειρησιακής Έρευνας αλλά και της διοικητικής επιστήμης. Δεν είναι τυχαίο άλλωστε που κυριαρχεί η αντίληψη ότι, τρεις στις τέσσερις εφαρμογές μοντέλων Επιχειρησιακής Έρευνας σε πραγματικά προβλήματα διοίκησης παραπέμπουν στο Γραμμικό Προγραμματισμό για να βρεθεί η βέλτιστη καλύτερη δυνατή λύση.

## 2.2 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

Οι πρώτες αναφορές όσον αφορά τον Γραμμικό Προγραμματισμό έγιναν την δεκαετία του 1930-1940 στο οικονομικό πεδίο με πρωτεργάτες τον Neumann και τον Leontief. O Neumann το 1928 δημοσίευσε το κεντρικό θεώρημα της Θεωρίας των Παιγνίων , ένα γραμμικό μοντέλο αναπτυσσόμενης οικονομίας για τη μελέτη των μοντέλων ισορροπίας. Το 1936 ο Leontief δημοσίευσε τις Ποσοτικές σχέσεις εισόδου και εξόδου στα οικονομικά συστήματα, το οποίο ήταν ένα γραμμικό μοντέλο χωρίς αντικειμενική συνάρτηση και τέλος το 1939 στην Ρωσία ο Kantoravich διατύπωσε και έλυσε ένα πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού.

Παρ’ όλα αυτά ως ορόσημο της εξέλιξης του Γραμμικού Προγραμματισμού θεωρείται ο Β΄ Παγκόσμιος Πόλεμος όπου για πρώτη φορά οι συμμαχικές δυνάμεις διαμορφώνουν και λύνουν διάφορα προβλήματα που σχετίζονται με το στρατό. Κατά την διάρκεια του πολέμου ο Γραμμικός Προγραμματισμός εφαρμόστηκε σε προβλήματα βέλτιστης κατανομής πόρων στην αεροπορία των ΗΠΑ. Τέτοια προβλήματα ήταν η μετακίνηση των στρατευμάτων, ο χρόνος εφοδιασμού, η ποσότητα που θα λάμβαναν από διάφορους σταθμούς κ.λπ.

Σημαντική στιγμή για τον Γραμμικό Προγραμματισμό θεωρείται αναμφίβολα το 1947, όπου ο Dantzig διαμόρφωσε το γενικό πρόβλημα του Γραμμικού Προγραμματισμού και ανακάλυψε τον γνωστό σήμερα ως Αλγόριθμο Simplex για την επίλυση του γραμμικού προβλήματος. Η επιστημονική κοινότητα είχε πεισθεί πλέον για την αξία της χρησιμότητας του. Άρχισε να χρησιμοποιείται μεθοδικά καθώς έκτοτε έγιναν και σημαντικές προσπάθειες για την βελτίωση του.

Όπως είδαμε και παραπάνω ο Γραμμικός Προγραμματισμός χρησιμοποιήθηκε στην επίλυση προβλημάτων στρατιωτικής φύσεως. Μετά το 1951 το πεδίο εφαρμογών επεκτάθηκε σε βιομηχανικές και επιχειρηματικές δραστηριότητες Η διάδοση οφείλεται κυρίως στην γραμμική δομή που παρουσιάζουν πολλά προβλήματα στον τομέα της διοίκησης και στις οικονομικές και στρατιωτικές δραστηριότητες. Κάποια από αυτά τα προβλήματα είναι ο προγραμματισμός σε διυλιστήρια πετρελαίου, την μεταφορά εμπορευμάτων, τον προγραμματισμό παραγωγής κ.λπ.

## 2.3 <u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>

Το γραμμικό πρόβλημα είναι η μεγιστοποίηση μιας γραμμικής συνάρτησης ωφέλειας ή ελαχιστοποίησης μιας συνάρτησης κόστους, η οποία εξαρτάται από ένα σύνολο μεταβλητών απόφασης $\chi_1 \dots\dots \chi_n$, με την προϋπόθεση όμως ότι τηρούνται κάποιοι περιορισμοί ως προς τις τιμές των μεταβλητών αυτών, οι οποίοι εκφράζονται μέσα από ένα σύνολο γραμμικών ισοτήτων ή και ανισοτήτων. Η δημοφιλέστερη αναπαράσταση ενός γραμμικού προβλήματος απεικονίζεται συνήθως με την παρακάτω μορφή.

Maximize $z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots\dots.. + c_n x_n$

Subject to

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots\dots + a_{1n}x_n\{\le, =, \ge\}\, b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots\dots\dots + a_{2n}x_n\{\le, =, \ge\}\, b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots\dots\dots + a_{mn}x_n\{\le, =, \ge\}\, b_m$$

$x_j \ge 0 \; j = 1,2, \dots\dots\dots, n$

## 2.4 ΤΙ ΕΙΝΑΙ Ο ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Ο Γραμμικός Προγραμματισμός χρησιμοποιεί ένα μαθηματικό πρότυπο για να περιγράψει το πρόβλημα που εξετάζει. Για να κατανοήσουμε καλύτερα την έννοια του, μπορούμε να εξηγήσουμε αναλυτικότερα τι σημαίνουν αυτές οι δύο λέξεις. Ο όρος "γραμμικός" σημαίνει ότι όλες οι μαθηματικές συναρτήσεις στο πρότυπο πρέπει να είναι γραμμικές. Από την άλλη η λέξη "προγραμματισμός" δεν αναφέρεται στον προγραμματισμό των ηλεκτρονικών υπολογιστών, αλλά μας παραπέμπει στην λέξη "σχεδίαση". Έτσι ο Γραμμικός Προγραμματισμός ασχολείται με τη σχεδίαση των δραστηριοτήτων για να καταλήξει στο "άριστο" αποτέλεσμα. Το άριστο αποτέλεσμα είναι εκείνο που μεταξύ όλων των δυνατών εναλλακτικών λύσεων, ικανοποιεί τον προκαθορισμένο σκοπό κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο.

Μπορούμε να πούμε ότι χρησιμοποιείται περισσότερο, από τους ερευνητές, για τη προσέγγιση προβλημάτων κατανομής περιορισμένων πόρων ή μέσων σε εναλλακτικές και ανταγωνιστικές μεταξύ τους δραστηριότητες, κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο. Πρόκειται για το γνωστό πρόβλημα κατανομής της πίτας (Resource Allocation Problem). Τέτοια προβλήματα απόφασης αυτής της μορφής είναι η κατανομή εργατικού δυναμικού, τεχνολογικού εξοπλισμού και πρώτων υλών σε διάφορες παραγωγικές διαδικασίες, η κατανομή κεφαλαίου σε διάφορα επενδυτικά προγράμματα, η ανάθεση σε περιορισμένο προσωπικό διαφόρων υπηρεσιών κ.λπ.

Ο Γραμμικός Προγραμματισμός παραλαμβάνει έτοιμα τα δεδομένα των πρακτικών προβλημάτων. Μερικά δεδομένα ετοιμάζονται από υπηρεσίες των επιχειρήσεων ή των οργανισμών, όπως για παράδειγμα το κόστος παραγωγής ενός προϊόντος, που υπολογίζεται από τα τμήματα κοστολόγησης, ενώ άλλα εκτιμούνται με άλλες επιστημονικές μεθόδους της επιχειρησιακής έρευνας όπως είναι οι τιμές πώλησης ενός προϊόντος σε μελλοντικές χρονικές στιγμές. Όλα αυτά τα δεδομένα τα ονομάζουμε περιορισμούς. Οι περιορισμοί λοιπόν διακρίνονται σε Τεχνολογικούς, που επιβάλλονται από τις δραστηριότητες και σε Θεσμικούς, που είναι διοικητικής και οργανωτικής φύσεως. Γενικότερα δεν καθορίζουν πλήρως έναν τρόπο αλλά αφήνουν περιθώρια για εναλλακτικές λύσεις και υφίστανται στους διαθέσιμους πόρους και στις δραστηριότητες του προβλήματος.

Το αποτέλεσμα που επιδιώκουν οι αποφάσεις αυτές, λαμβάνοντας υπόψη τα κριτήρια απόφασης, είναι η μεγιστοποίηση του συνολικού κέρδους από πωλήσεις, η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους παραγωγής, η μεγιστοποίηση της απασχόλησης, η ελαχιστοποίηση των αρνητικών επιπτώσεων στο περιβάλλον, κ.λπ. Για να το δούμε και από την οικονομική σκοπιά, ο Γραμμικός Προγραμματισμός είναι μια τεχνική που ασχολείται με την κατανομή των πόρων του συστήματος σε ανταγωνιζόμενες δραστηριότητες για το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα και την ελαχιστοποίηση του ρίσκου για την επιχείρηση ή τον οργανισμό.

Η σημαντικότερη επιδίωξη του Γραμμικού Προγραμματισμού είναι, χωρίς καμιά αμφιβολία, η βελτίωση του επιστημονικού τρόπου λήψης δύσκολων και πολύπλοκων οικονομικών και διοικητικών αποφάσεων. Για να μπορέσει να ανταπεξέλθει σε κάτι τέτοιο, είναι απαραίτητο να μελετήσει με αυστηρά μαθηματικό τρόπο το γραμμικό πρόβλημα και να αναλύσει τις ιδιότητες και τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του. Οι σωστές αποφάσεις δεν μπορεί να είναι παρά μόνο οι βέλτιστες, ανάλογα πάντα με τα κριτήρια. Θα μπορούσαμε λοιπόν να πούμε πως ο Γραμμικός Προγραμματισμός βρίσκεται σε συνεχή αναζήτηση βέλτιστων λύσεων. Αποκτά περισσότερο ενδιαφέρον και νόημα όταν εφαρμόζεται σε προβλήματα μεγάλου μεγέθους.

Δυστυχώς όμως δεν αρκεί μόνο η βέλτιστη λύση για να ληφθούν οι σωστές αποφάσεις. Ακόμα και η λύση του προβλήματος περιέχει πληροφορίες, που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την βελτίωση της λειτουργίας των συστημάτων, από τα οποία συνήθως προκύπτουν τα γραμμικά προβλήματα. Παρ' όλα αυτά υπάρχουν και εμπόδια. Μερικές φορές για πρακτικούς λόγους, η λύση υλοποιείται με καθυστέρηση, με αποτέλεσμα καμιά φορά τα δεδομένα του προβλήματος να έχουν μεταβληθεί. Ευτυχώς σε εκείνο το σημείο έχουμε την βοήθεια της ανάλυσης της ευαισθησίας (sensitivity analysis) που μας βοηθά να βρούμε τη νέα βέλτιστη λύση αν είναι διαφορετική από την προηγούμενη. Οι συνέπειες αυτών των εμποδίων είναι η επίλυση πολλών διαδοχικών προβλημάτων, που μπορεί να διαφέρουν μεταξύ του ελάχιστα. Συνεπώς καταλαβαίνουμε πως δεν είναι άνευ λόγου η συνεχής προσπάθεια του Γραμμικού Προγραμματισμού για ανάπτυξη όλο και πιο γρήγορων αλγορίθμων.

## 2.5 <u>ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ</u>

Ο Γραμμικός Προγραμματισμός επιλύει τα προβλήματα κατανομής πεπερασμένων πόρων υπό ορισμένες προϋποθέσεις, επιλέγει την στιγμή της δραστηριότητας για την επιτάχυνση της βελτιστοποίησης του αποτελέσματος και στοχεύει σε ένα στόχο που εκφράζεται με την βελτιστοποίηση της λεγόμενης «αντικειμενικής συνάρτησης». Πιο αναλυτικά τα βασικά στοιχεία ενός μοντέλου είναι:

- **Αντικειμενικός στόχος:** είναι ο στόχος ως προς την βελτιστοποίηση (μεγιστοποίηση κέρδους ή ελαχιστοποίηση κόστους).

- **Περιορισμένοι πόροι:** είναι μια σειρά μεταβλητών που αντιπροσωπεύουν τις ποσότητες (εργασία, χρηματοδότηση, εξοπλισμός κ.τ.λ. ).

- **Ομογένεια:** είναι μεταβλητές που πρέπει να θεωρούνται όμοιες μεταξύ τους (προϊόντα, εργάτες, μηχανές και παραγωγικότητα).

- **Μεταβλητές απόφασης:** είναι οι εναλλακτικοί τρόποι δράσης για να επιλεχθεί ένας από αυτούς.

## 2.6 <u>ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ</u>

Για να λυθεί ένα πρόβλημα με την χρήση του Γραμμικού Προγραμματισμού πρέπει να υπάρχουν κάποιες βασικές συνθήκες. Αυτές οι συνθήκες καθορίζουν το φάσμα των δυνατοτήτων εφαρμογής του και είναι οι εξής παραδοχές:

i. **Γραμμικότητα:**

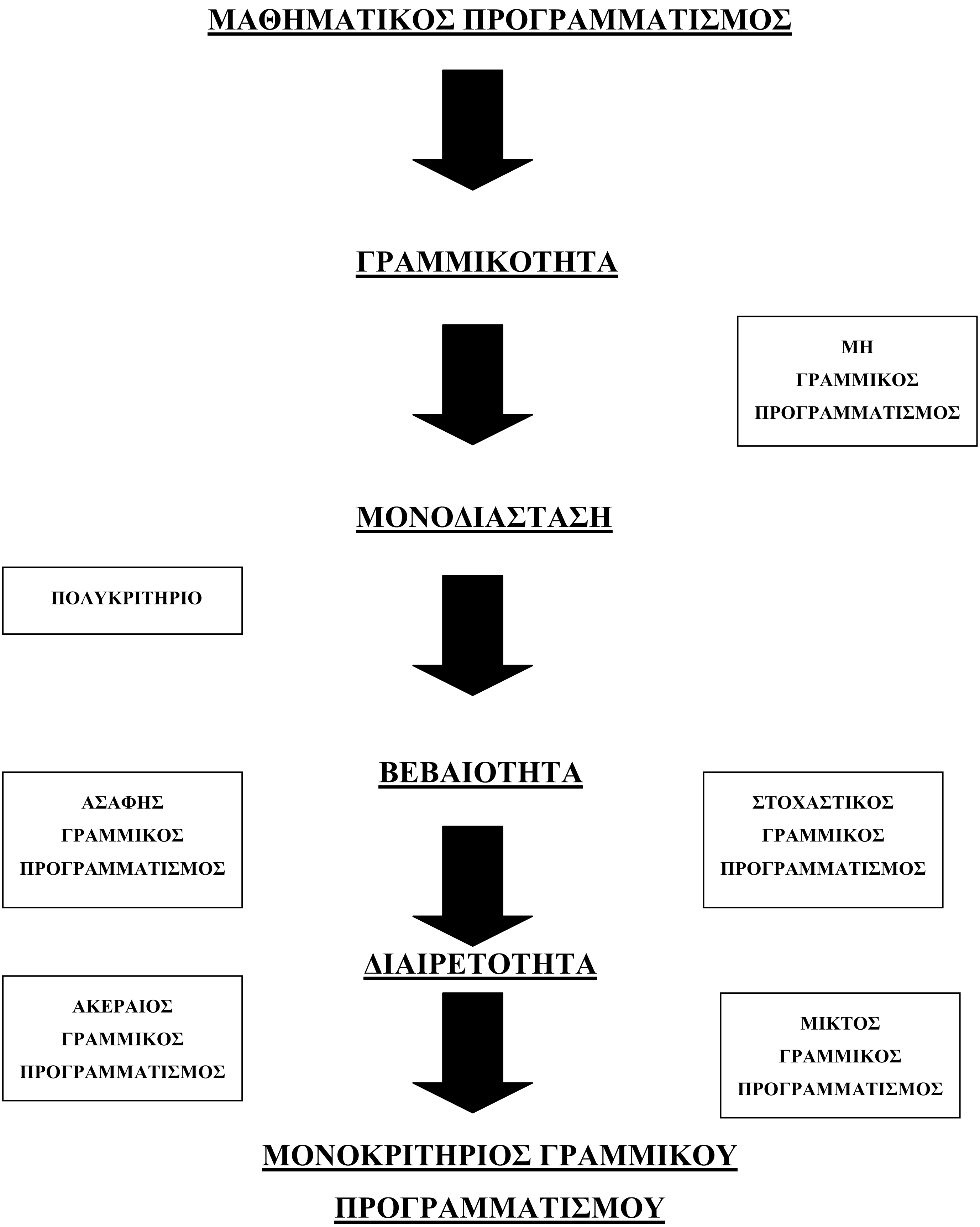
■ (Αναλογικότητα) Η αντικειμενική συνάρτηση και όλοι οι περιορισμοί πρέπει να είναι γραμμικές, δηλαδή η τιμή της είναι ποσοτικά ανάλογη προς τις ποσότητες κάθε μιας από τις δραστηριότητες.

■ (Προσθετικότητα) Οι ποσότητες ενός διαθέσιμου μέσου που καταναλώνονται, από τις διάφορες δραστηριότητες, μπορούν να προστεθούν.

ii. **Διαιρετότητα:** Κάθε δραστηριότητα δηλαδή μεταβλητή, είναι συνεχής και άπειρα διαιρετή. Έτσι όλα τα επίπεδα δραστηριοτήτων και όλες οι χρήσεις πόρων επιτρέπεται να πάρουν κλασματικές τιμές ή ακέραιες τιμές.

iii. **Βεβαιότητα (Προσδιοριστικότητα):** Όλοι οι παράμετροι του προβλήματος πρέπει να είναι γνωστές με απόλυτη βεβαιότητα.

iv. **Μονοδιάσταση:** Η βελτίωση της αντικειμενικής συνάρτησης.




**Εικόνα 4 : Παραδοχές Γραμμικού Προγραμματισμού**

## 2.7 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Ο Γραμμικός Προγραμματισμός καλύπτει ένα τεράστιο φάσμα εφαρμογών που μπορεί να βοηθήσει μια επιχείρηση ή έναν οργανισμό. Μπορεί να λύσει προβλήματα που ανήκουν στον τομέα της παραγωγής, στην διαχείριση έργων, στα χρονοδιαγράμματα κ.λπ. Παρακάτω παραθέτουμε μερικές από τις πιο σημαντικές εφαρμογές του.

- Καθορίζει τα επίπεδα παραγωγής των προϊόντων, με βάση τις διαδικασίες παραγωγής και τους περιορισμούς της αγοράς, έτσι ώστε να βρεθεί η αποτελεσματικότερη χρήση των παραγωγικών πόρων με στόχο την μεγιστοποίηση του κέρδους.

- Καθορίζει το χρονικό πρόγραμμα παραγωγής που θα μπορεί να ανταποκριθεί στην προβλεπόμενη ζήτηση των προϊόντων , με συγκεκριμένο προσδιορισμό του κάθε προϊόντος, που θα παραχθεί σε κάθε περίοδο και σε κάθε μονάδα παραγωγής και αποθήκευσης.

- Προσδιορίζει το σύστημα διανομής προϊόντων, καθορίζοντας τα διαθέσιμα μεταφορικά μέσα και τις ποσότητες που θα μεταφερθούν, για να ελαχιστοποιηθεί το κόστος μεταφοράς των προϊόντων, ενώ ταυτόχρονα θα καλύψει την ζήτηση στα κέντρα διανομής.

- Κατανέμει ένα δεδομένο προϋπολογισμό διαφήμισης στα διάφορα μέσα (τηλεόραση, ραδιόφωνο, εφημερίδες περιοδικά κ.λπ. ) για να μεγιστοποιηθεί η αποδοτικότητα της διαφημιστικής εκστρατείας των προϊόντων ή των υπηρεσιών.

- Προσδιορίζει τους καλύτερους συνδυασμούς εναλλακτικών επενδυτικών επιλογών, για να αυξήσει την απόδοση του κεφαλαίου και να μειώσει ταυτόχρονα το επενδυτικό ρίσκο.

- Καθορίζει τα ημερήσια προγράμματα μαζικής διατροφής σε ξενοδοχεία ή νοσοκομεία για να καλύπτονται όλες οι απαιτήσεις σε θρεπτικά στοιχεία με αντίστοιχη ελαχιστοποίηση του κόστους.

## 2.8 ΜΟΡΦΟΠΟΙΗΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Αφού προσαρμόσουμε το πρόβλημα στα πρότυπα του Γραμμικού Προγραμματισμού που αναλύσαμε και παραπάνω, έχουμε στην διάθεσή μας ένα σύνολο εργαλείων για να βρούμε την βέλτιστη λύση αλλά και να προχωρήσουμε στην ανάλυση υποθέσεων για τις παραμέτρους των προβλημάτων.

Για να εφαρμόσουμε την μέθοδο του Γραμμικού Προγραμματισμού πρέπει να δημιουργήσουμε μια μαθηματική διατύπωση του συγκεκριμένου προβλήματος. Πιο αναλυτικά πρέπει να ακολουθήσουμε τα παρακάτω βήματα:

**Βήμα 1$^o$ :** Κατανοούμε τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος.

**Βήμα 2$^o$ :** Εντοπίζουμε και ορίζουμε με σαφήνεια τις μεταβλητές που έχουν άμεση σχέση με την λύση του προβλήματος και τις αναπαριστούμε ως $x_1, x_2, x_3, \ldots. x_n$. Οι μεταβλητές αυτές είναι θετικές ή μηδέν

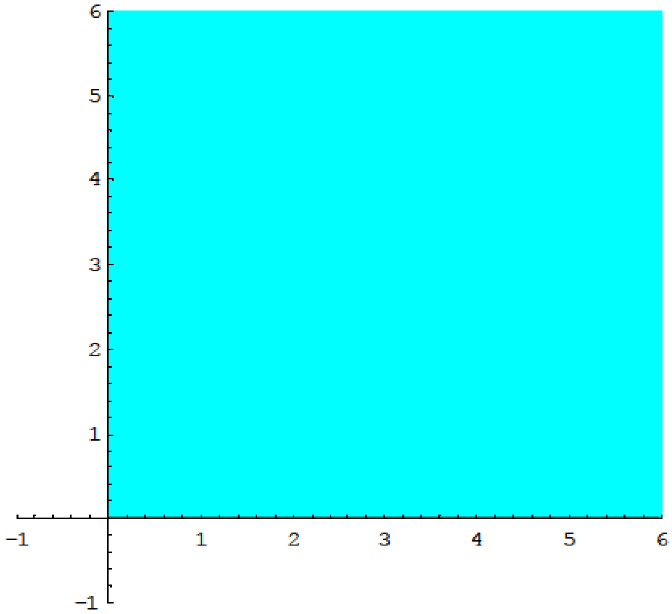
**Βήμα 3$^o$ :** Διαμορφώνουμε την αντικειμενική συνάρτηση. Είναι η γραμμική συνάρτηση των μεταβλητών αποφάσεων που εκφράζει το στόχο του προβλήματος δηλαδή ή την μεγιστοποίηση του κέρδους ή την ελαχιστοποίηση του κόστους και αναπαριστάται ως: $z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots\ldots\ldots + c_n x_n$.

**Βήμα 4$^o$ :** Ορίζουμε τους περιορισμούς, που όπως και η αντικειμενική συνάρτηση είναι γραμμικές συναρτήσεις ανισοτήτων ή ισοτήτων των μεταβλητών αποφάσεων και μεταφράζουν το πρόβλημα με μαθηματικές σχέσεις.

## 2.9 ΓΡΑΦΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ

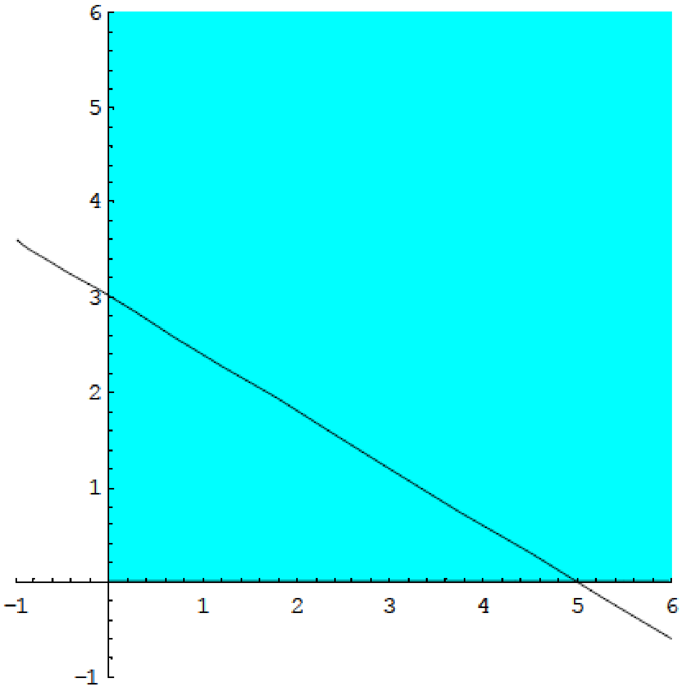
Τα προβλήματα του Γραμμικού Προγραμματισμού που έχουν δύο ή τρείς μεταβλητές απόφασης, μπορούν να λυθούν και γραφικά. Συνήθως τα προβλήματα περιλαμβάνουν δύο μεταβλητές για να απεικονίζονται σε ένα σύστημα αξόνων $\chi_1$ και $\chi_2$. Για να φτάσουμε στην λύση του προβλήματος γραφικά, πρέπει να εκτελέσουμε τα παρακάτω βήματα:

Αρχικά σχεδιάζουμε στο πρώτο τεταρτημόριο του συστήματος αξόνων τις μεταβλητές, απεικονίζοντας την μεταβλητή $\chi_1$ στον οριζόντιο άξονα και τη μεταβλητή $\chi_2$ στον κατακόρυφο άξονα, για να καθοριστεί απόλυτα το σύνολο των δυνατών λύσεων. Μας ενδιαφέρουν μόνο οι μη αρνητικές τιμές των $\chi_1$ και $\chi_2$.



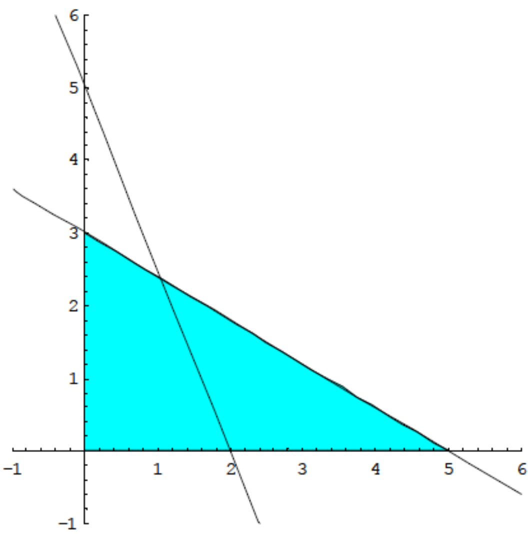

**Εικόνα 5 : Γράφημα Συνάρτησης 1**

Στην συνέχεια σχεδιάζουμε την ευθεία της αντικειμενικής συνάρτησης μέσα στην εφικτή περιοχή για την τιμή του z υπολογίζοντας τους περιορισμούς του προβλήματος και εντοπίζουμε την εφικτή περιοχή.

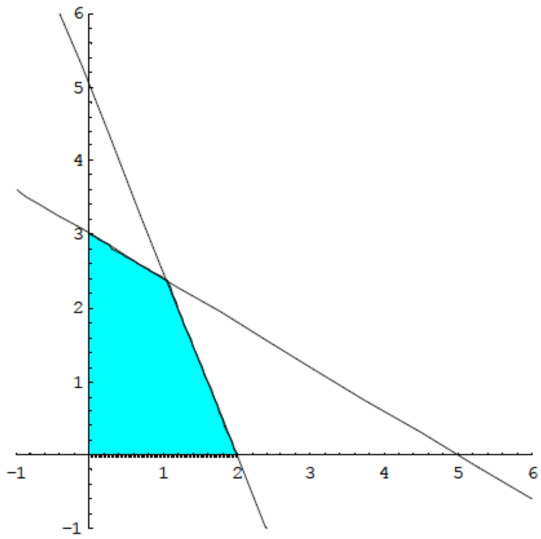



**Εικόνα 6 : Γράφημα Συνάρτησης 2**

Τέλος μετατοπίζουμε την ευθεία της αντικειμενικής συνάρτησης κατά την φορά της βελτιστοποίησης ή της ελαχιστοποίησης της τιμής του z μέχρι να βρεθεί η βέλτιστη λύση.




**Εικόνα 7 : Γράφημα Συνάρτησης 3**

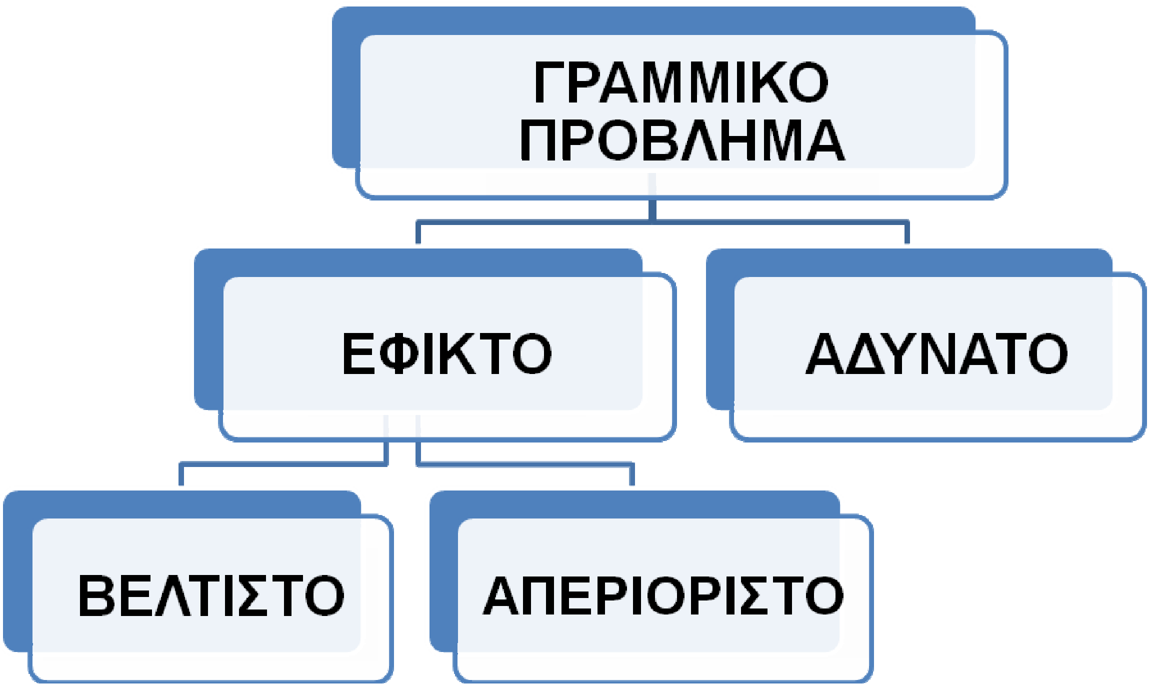



**Εικόνα 8 : Γράφημα Συνάρτησης 4**

## 2.10 <u>Η ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ</u>

Η λύση του γραμμικού προβλήματος είναι το σύνολο όλων των εφικτών σημείων και ονομάζεται εφικτή περιοχή. Αν η εφικτή περιοχή είναι κενό σύνολο, το πρόβλημα είναι αδύνατο ή μη εφικτό. Μεγάλη σημασία έχει όμως η έννοια του βέλτιστου σημείου ή της βέλτιστης λύσης. Με βάση τον ορισμό ένα γραμμικό πρόβλημα που έχει βέλτιστα σημεία ονομάζεται βέλτιστο πρόβλημα. Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης από την άλλη, σε ένα βέλτιστο σημείο ονομάζεται βέλτιστη τιμή και τέλος ένα εφικτό πρόβλημα, που δεν είναι βέλτιστο, είναι απεριόριστο.

Για να προσδιορίσουμε την κατηγορία στην οποία ανήκει ένα γραμμικό πρόβλημα πρέπει να κοιτάξουμε την λύση. Μπορεί να είναι αδύνατο, βέλτιστο ή απεριόριστο. Δεν είναι όμως αρκετό να προσδιοριστεί ότι ένα πρόβλημα είναι βέλτιστο. Πρέπει να κατασκευαστεί και τουλάχιστον ένα βέλτιστο σημείο. Για αυτό τον λόγο ο Γραμμικός Προγραμματισμός ασχολείται με αλγόριθμους, που είναι κατασκευαστικοί μέθοδοι επίλυσης. Η πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι αυτή του βέλτιστου προβλήματος για αυτό πολλές φορές αρκεί μόνο να προσδιοριστεί αν ένα πρόβλημα είναι βέλτιστο ή όχι.




**Εικόνα 9 : Κατηγορίες Γραμμικών Προβλημάτων**

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

# 3 ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

## 3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μιλήσαμε για τον Γραμμικό Προγραμματισμό και για τον τρόπο που επιλύει τα προβλήματα. Για να κατανοήσουμε θεωρητικά τα προβλήματα βάζουμε μόνο δύο μεταβλητές. Στην πραγματικότητα όμως ο αριθμός των μεταβλητών είναι πολύ μεγαλύτερος των δύο και αυτό συμβαίνει γιατί τα δεδομένα των προβλημάτων μιας επιχείρησης είναι πιο περίπλοκα από ότι αναφέρουμε εμείς στα παραδείγματα. Σε πραγματικές εφαρμογές, ο αριθμός των μεταβλητών ή των περιορισμών είναι εκατοντάδες, μπορεί και χιλιάδες. Σε αυτό το σημείο λοιπόν χρειαζόμαστε μια συστηματική μέθοδο, που να μπορεί να επιλύει τα προβλήματα του Γραμμικού Προγραμματισμού ανεξάρτητα από το μέγεθος τους, μέσω των κατάλληλων προγραμμάτων των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Η συστηματική μέθοδος λοιπόν που χρειαζόμαστε, είναι η μέθοδος Simplex που θα μιλήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο.

Η μέθοδος Simplex είναι η πιο γνωστή και περισσότερο χρησιμοποιημένη μέθοδος για την επίλυση ενός γενικού προβλήματος του Γραμμικού Προγραμματισμού, που αναπτύχθηκε από τον Αμερικανό George Dantzig το 1947. Αποτελεί μια αλγεβρική επαναληπτική διαδικασία που επιλύει ακριβώς κάθε πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού σε ένα πεπερασμένο πλήθος βημάτων. Βασίζεται στη συστηματική δημιουργία βασικών εφικτών λύσεων και τον έλεγχο της αρίστευσης τους. Μπορεί και εντοπίζει ακόμα και τις περιπτώσεις στις οποίες το πρόβλημα είναι αδύνατο ή έχει λύση με μη πεπερασμένη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

## 3.2 ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΜΕΘΟΔΟΥ SIMPLEX

Με την μέθοδο Simplex ξεκινάμε από μια αρχική κορυφή και πηγαίνουμε σε άλλες κορυφές κατά μήκος των ακμών του πολυγώνου του εφικτού σύνολο. Σε κάθε μετάβαση από την μια κορυφή στην άλλη, βρίσκουμε την ακμή που οδηγεί σε μια κορυφή που δίνει βελτιωμένη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση. Συνεχίζοντας κατά αυτό τον τρόπο η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης από κορυφή σε κορυφή βελτιώνεται και τελικά φτάνουμε σε μια κορυφή όπου η αντικειμενική συνάρτηση βελτιστοποιείται. Έτσι καταλήγουμε να έχουμε τη λύση του γραμμικού προβλήματος που μας ενδιαφέρει.

Όταν λύνουμε ένα πρόβλημα χωρίς την χρήση του ηλεκτρονικού υπολογιστή χρησιμοποιούμε τους πίνακες της μεθόδου Simplex που ονομάζονται tableaux Simplex. Έτσι αντί να γράφουμε τις εξισώσεις στην πλήρη μορφή τους, χρησιμοποιούμε τους πίνακες για να διευκολυνθεί η εκτέλεση των υπολογισμών. Οι πίνακες περιέχουν μόνο πληροφορίες όπως:

- Οι συντελεστές των μεταβλητών
- Οι σταθερές τιμές του δεξιού μέλους των εξισώσεων
- Η βασική μεταβλητή σε κάθε εξίσωση

Στην πράξη αναπαριστούμε το μοντέλο με την μορφή ενός πίνακα και με στοιχειώδεις πράξεις μεταξύ των γραμμών του πίνακα οδηγούμαστε στην διαμόρφωση των νέων πινάκων, ώσπου να φτάσουμε στην εύρεση της βέλτιστης λύσης. Κάθε πίνακας που προκύπτει ενδιάμεσα, κατά την διαδικασία της επίλυσης, αντιστοιχεί σε μια κορυφή της εφικτής περιοχής. Διερευνώντας τις βασικές εφικτές λύσεις, δηλαδή τις κορυφές της εφικτής περιοχής, βρίσκουμε την καλύτερη καθώς μετακινούμαστε μεταξύ των γειτονικών ακραίων σημείων.

Η συνάρτηση που χρησιμοποιείται για να βρεθεί η βέλτιστη λύση σε ένα πρόβλημα του Γραμμικού Προγραμματισμού έχει την εξής μορφή:

$$z = max f(x) = c^T x$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0, b \geq 0$$

## 3.3 <u>ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ SIMPLEX</u>

Για να εφαρμοστεί η μέθοδος Simplex θα πρέπει να τηρούνται κάποια βασικά κριτήρια. Αρχικά υπάρχει το κριτήριο εισόδου στην βάση όπου η εισερχόμενη μεταβλητή πρέπει να έχει την πιο αρνητική τιμή στη σειρά της αντικειμενικής συνάρτησης, μιας και είναι η μεταβλητή που βελτιώνει περισσότερο την αντικειμενική συνάρτηση. Στην συνέχεια υπάρχει το κριτήριο εξόδου από την βάση όπου η εξερχόμενη μεταβλητή πρέπει να έχει τον μικρότερο θετικό λόγο αφού αυτή η μεταβλητή που αντιστοιχεί σε αυτόν τον περιορισμό εξαντλείται πρώτα από την εισερχόμενη μεταβλητή. Και τέλος το κριτήριο τερματισμού όπου πρέπει όλα τα στοιχεία της γραμμής της αντικειμενικής συνάρτησης να είναι θετικά ή μηδέν μιας και δεν υπάρχει μη βασική μεταβλητή που να βελτιώνει την αντικειμενική συνάρτηση αν εισέλθει στην βάση.

## 3.4 <u>ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΙΔΙΚΩΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΝ</u>

Η εφαρμογή της μεθόδου Simplex δεν εφαρμόζεται μόνο σε κανονικά προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού αλλά και σε προβλήματα που υπάρχουν κάποια εμπόδια, όπου για να εφαρμοστεί η μέθοδος πρέπει να γίνουν οι κατάλληλες μετατροπές. Μερικά τέτοια προβλήματα που μπορεί να συναντήσουμε πιο συχνά είναι τα παρακάτω:

**Μη εφικτή λύση (infeasibility):** Μπορεί για ένα πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού να μην υπάρχει εφικτή λύση. Αυτό συμβαίνει γιατί το πρόβλημα μπορεί να συνοδεύεται από ασυμβίβαστους μεταξύ τους περιορισμούς. Αρχικά αυτό που πρέπει να κάνουμε είναι να εισάγουμε χαλαρές και τεχνητές μεταβλητές για να πάρει μορφή η αντικειμενική συνάρτηση και μετά να εφαρμόσουμε την μέθοδο Simplex. Εάν υπάρξει συμμετοχή των τεχνητών μεταβλητών στην βάση αυτό θα σημαίνει ότι το πρόβλημα δεν έχει εφικτή λύση. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι όταν στην τελική βέλτιστη λύση εξακολουθούν να υπάρχουν τεχνητές μεταβλητές και οτι το συγκεκριμένο πρόβλημα δεν έχει εφικτή λύση.

**Μη Φραγμένη Λύση (Unbounded Solution):** Είναι συχνό φαινόμενο τα προβλήματα του Γραμμικού Προγραμματισμού να έχουν μη φραγμένη λύση. Λέγοντας φραγμένη λύση εννοούμε μια ή περισσότερες μεταβλητές αποφάσεων που αυξάνουν στο άπειρο την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, ικανοποιώντας ταυτόχρονα την απαίτηση εφικτότητας της λύσης δηλαδή τους περιορισμούς του προβλήματος.

**Εναλλακτικές Λύσεις - Περισσότερες Της Μιας Βέλτιστης Λύσης (alternate solution):** Σε ορισμένα προβλήματα μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από μια τ βέλτιστη λύση. Αυτό συμβαίνει όταν η κλίση της γραμμής που αντιπροσωπεύει κάποιο περιορισμό και η κλίση της γραμμής που αντιπροσωπεύει την αντικειμενική συνάρτηση είναι ίσες. Στον τελικό πίνακα αυτό δείχνεται με τον μηδενισμό της ποσότητας Cj - Zj για κάποια μεταβλητή που δεν ανήκει στην βάση. Αυτό είναι ανεξάρτητο από το εάν η μεταβλητή αυτή είναι μεταβλητή αποφάσεως ή χαλαρή μεταβλητή.

**Εκφυλισμός (Δεσμός Για Την Γραμμή Κλειδί):** Στη μέθοδο simplex, προκειμένου να οριστεί η μεταβλητή η οποία θα ορισθεί η γραμμή κλειδί, βρίσκουμε τον λόγο των τιμών του πίνακα της μεθόδου P0 δια των αντιστοίχων συντελεστών της στήλης κλειδί και τελικά επιλέγεται εκείνη η μεταβλητή της οποίας ο αντίστοιχος λόγος είναι ο ελάχιστος. Μερικές φορές η ελάχιστη τιμή του λόγου που περιγράφηκε παραπάνω δεν είναι μοναδική και έτσι έχουμε ένα δεσμό για την επιλογή της γραμμής κλειδί.

## 3.5 ΒΑΣΙΚΑ ΒΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ SIMPLEX

1. Αρχικά θέτουμε το πρόβλημα στην τυποποιημένη του μορφή.

   Η τυποποιημένη μορφή της αντικειμενικής συνάρτησης δημιουργείται όταν ταξινομήσουμε τους όρους της για να έχει την ίδια μορφή εξίσωσης με τους περιορισμούς της. Ένα παράδειγμα τυποποιημένης μορφής είναι το ακόλουθο:

   Δίνεται η αντικειμενική συνάρτηση: $m = 6X + 8Y$

   Η τυποποιημένη μορφή θα είναι : $-6X - 8Y + m = 0$

2. Κατασκευάζουμε τον αρχικό πίνακα Simplex .

Ο αρχικός πίνακας Simplex είναι ο πίνακας που αποτελείται από σειρές με στοιχεία τους συντελεστές των μεταβλητών των εξισώσεων των περιορισμών, η τελευταία του σειρά αποτελείται από τους συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης και η τελευταία του στήλη από τις σταθερές τους. Ένα παράδειγμα αρχικού πίνακα Simplex είναι:

Μεγιστοποίηση της $m = 2X + 3Y + 4Z$ υπό περιορισμούς

$$X + 2Y + 3Z \leq 12$$

$$2X + 5Z \leq 10$$

$$3X + Y + Z \leq 6$$

Από αυτά τα δεδομένα προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

| **X** | **Y** | **Z** | **S1** | **S2** | **S3** | **m** | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 12 |
| 2 | 0 | 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 10 |
| 3 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 6 |
| -2 | -3 | -4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

**Πίνακας 1**: **Πίνακας Simplex**

Όσο αφορά τον πίνακα μία στήλη βρίσκεται σε βασική μορφή όταν μόνο ένα στοιχείο της είναι ίσο με το 1 και όλα τα υπόλοιπα είναι 0. Η μεταβλητή στην οποία αντιστοιχεί ονομάζεται βασική μεταβλητή. Οι υπόλοιπες μεταβλητές ονομάζονται μη-βασικές.

3. Αναζητάμε την βασική εφικτή λύση.

   Ξεκινάμε την αναζήτηση από ένα ακραίο σημείο. Στην ουσία ψάχνουμε για μια βασική εφικτή λύση όπου με την μετακίνηση σε ένα γειτονικό ακραίο σημείο μπορεί να συμβάλλει στη βελτιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης. Την βασική εφικτή λύση την παίρνουμε από τον αρχικό πίνακα Simplex όταν θέσουμε τις μη-βασικές μεταβλητές ίσες με 0, όπου αντιστοιχίζονται οι βασικές μεταβλητές με τα σταθερά στοιχεία της τελευταίας στήλης. Κάθε αρχικός πίνακας Simplex έχει περισσότερες στήλες από ότι σειρές, ώστε το σύστημα να έχει άπειρο αριθμό λύσεων.

4. Εφαρμόζουμε τον έλεγχο της μέγιστης λύσης

   Ποια είναι η καλύτερη εφικτή λύση θα εξαρτηθεί από την μορφή του πίνακα και την εφαρμογή του ελέγχου μέγιστης λύσης. Ο αρχικός πίνακας Simplex θα δώσει την βέλτιστη λύση μόνο αν η τελευταία σειρά, η οποία αναφέρεται στην αντικειμενική συνάρτηση, περιλαμβάνει μόνο μη αρνητικά στοιχεία. Η στήλη που έχει το πιο αρνητικό στοιχείο στην τελευταία σειρά ονομάζεται στήλη οδηγός. Η μεταβλητή που αντιστοιχεί στην στήλη αυτή ονομάζεται εισερχομένη μεταβλητή. Αν υπάρχουν δύο ή περισσότερα ίσα και αρνητικά στοιχεία, τότε μπορούμε να επιλέξουμε οποιαδήποτε από τις στήλες που τους αντιστοιχούν. Αν η βασική εφικτή λύση είναι μέγιστη, τότε το πρόβλημα έχει λυθεί. Αν όχι τότε πάμε στο επόμενο βήμα.

5. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία μέχρι να βρεθεί η βέλτιστη λύση ή να αποδειχθεί ότι το πρόβλημα είναι απροσδιόριστο ή δεν έχει καμία λύση. Αυτό γίνετε με στοιχειώδεις πράξεις μεταξύ των γραμμών του πίνακα που προκύπτει ο επόμενος πίνακας Simplex, στον οποίο αντικατοπτρίζονται οι μεταβολές που οδηγούν στην επόμενη κορυφή της εφικτής περιοχής. Όπως αναφέραμε και στο κεφάλαιο 3.4 υπάρχουν ορισμένα προβλήματα που έχουν εμπόδια και για να εφαρμοστεί η μέθοδος πρέπει να γίνουν οι κατάλληλες μετατροπές. Αυτά είναι και τα λεγόμενα μοντέλα ειδικών περιπτώσεων που αναλύσαμε παραπάνω.

6. Ελέγχεται εάν η τρέχουσα βασική δυνατή λύση είναι άριστη.

   Όπως αναφέραμε και πριν πρέπει τα στοιχεία της τελευταίας γραμμής στον πίνακα Simplex να είναι μη αρνητικά και τα στοιχεία της τελευταίας στήλης να δείχνουν τις τιμές των βασικών μεταβλητών.

7. Εάν αυτή η λύση είναι η άριστη, τότε η διαδικασία ολοκληρώθηκε.

## 3.6 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ SIMPLEX

Για να κατανοήσουμε καλύτερα πως εφαρμόζεται η μέθοδος simplex στην επίλυση οικονομικών προβλημάτων, θα δούμε ένα παράδειγμα εφαρμογής της.

Έστω ένας αγρότης που έχει στη διάθεσή του 3200 € και 160 μέρες για να σπείρει τα 100 στρέμματα του χωραφιού του. Στην αγορά υπάρχουν τρία είδη σπόροι Α, Β, και Γ που κοστίζουν 40, 20 και 30 €/στρέμμα αντίστοιχα, και τα οποία απαιτούν 1, 2, και 1, αντίστοιχα, μέρες σποράς ανά στρέμμα. Αν από το κάθε είδος κερδίζει 100, 300, και 200 €/στρέμμα αντίστοιχα, πόσα στρέμματα πρέπει να σπείρει για κάθε είδος σπόρου, ώστε να μεγιστοποιήσει το κέρδος του;

**Βήμα 1$^{o}$**

Αρχικά βρίσκουμε την συνάρτηση προς βελτιστοποίηση και τους περιορισμούς της.

Μεγιστοποίηση κέρδους = Max P = 100 X1 + 300 X2 + 200 X3.

Αυτή η συνάρτηση ονομάζεται Αντικειμενική συνάρτηση.

Υπό τους περιορισμούς:

X1 + X2 + X3 $\leq$ 100

40 X1 + 20 X2 + 30 X3 $\leq$ 3200

1 X1+ 2 X2 + 1 X3 $\leq$ 160

Όπου X1, X2 και X3 $\geq$ 0

**Βήμα 2$^{ο}$**

Γράφουμε το πρόβλημα στη τυποποιημένη του μορφή, δηλαδή

- Max ( P = 100 X1 + 300 X2 + 200 X3 ). Είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης
- Όλοι οι περιορισμοί γίνονται εξισώσεις. Στις ανισώσεις της μορφής ≤ προσθέτουμε τις μεταβλητές S1, S2 και S3.

  X1 + X2 + X3 + S1 = 100

  40 X1 + 20 X2 + 30 X3 + S2 = 3200

  1 X1 + 2 X2 + 1 X3 + S3 = 160

- Οι σταθεροί όροι είναι θετικοί.
- Όλες οι μεταβλητές είναι θετικές. X1,X2,X3≥0 και S1,S2,S3≥0

**Βήμα 3$^{ο}$**

Για X1=0, X2=0 και X3=0 έχουμε:

S1 = 100

S2 = 3200

S3 = 160

Η αρχική βασική εφικτή λύση είναι (X1,X2,X3,S1,S2,S3,P) = (0, 0, 0, 100, 3200, 160, 0) όπου P= το κέρδος που θέλουμε να μεγιστοποιηθεί, και είναι ο σταθερός μας όρος.

**Βήμα 4$^{ο}$**

Κατασκευάζουμε τον αρχικό πίνακα Simplex. Ο πίνακας αποτελείται από γραμμές και στήλες.

Στην πρώτη γραμμή τοποθετούμε ονομαστικά τις μεταβλητές X1, X2, X3, S1, S2, S3 και τον σταθερό όρο P.

Στην πρώτη στήλη τοποθετώ τις Βασικές Μεταβλητές, δηλαδή τις μη μηδενικές μεταβλητές στην αρχική βασική εφικτή λύση S1, S2 και S3, καθώς και τον σταθερό όρο P.

Στην τελευταία στήλη τοποθετώ τις τιμές της αρχικής βασικής εφικτής λύσης για X1, X2, X3 =0.

Σε κάθε γραμμή αντικαθιστούμε στα αντίστοιχα κελία τους συντελεστές κάθε εξίσωσης περιορισμού.

Για παράδειγμα, ο πρώτος περιορισμός υπό την μορφή εξίσωσης ήταν: X1+X2+X3+S1=100. Προφανώς, χ1=1,χ2=1,χ3=1,s1=1,s2=0,s3=0 και ρ=0.

Στην τελευταία γραμμή γράφουμε τους συντελεστές των μεταβλητών στην συνάρτηση προς μεγιστοποίηση (αντικειμενική συνάρτηση).

Προσοχή! Οι συντελεστές αυτοί μπαίνουν με το αντίθετο πρόσημο, δηλαδή μείων (-).

Ο σταθερός όρος P ισούται με 1 από την αντικειμενική συνάρτηση (1)P=100X1+300X2+200X3

| β.μ. | X1 | X2 | X3 | S1 | S2 | S3 | P | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| S1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 100 |
| S2 | 40 | 20 | 30 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3200 |
| S3 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 160 |
| P | -100 | -300 | -200 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

**Πίνακας 2: Αρχικός Πίνακας Simplex**

Μελετώντας την τελευταία σειρά του πίνακα, βλέπουμε ότι υπάρχουν αρνητικές τιμές. Άρα η λύση δεν είναι η βέλτιστη.

## **Βήμα 5$^{ο}$**

Στην τελευταία σειρά του πίνακα, θέτουμε σε απόλυτο τις τιμές και διαλέγουμε την στήλη στην οποία ανήκει η μεγαλύτερη τιμή. $|-300| > |-200| > |-100|$. Εδώ, είναι η στήλη της μεταβλητής X2 και ονομάζεται στήλη οδηγός.

Διαιρούμε τις τιμές της τελευταίας στήλης (τιμές της αρχικής εφικτής λύσης) με τις αντίστοιχες τιμές της στήλης οδηγού. Από τις λύσεις των διαιρέσεων, επιλέγουμε την γραμμή στην οποία ανήκει η μικρότερη τιμή. Εδώ είναι η γραμμή της μεταβλητής S3 και ονομάζεται γραμμή οδηγός.

| β.μ. | X1 | X2 | X3 | S1 | S2 | S3 | P | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| S1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 100 | 100/1 = 100 | Σειρά Υ1 |
| S2 | 40 | 20 | 30 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3200 | 3200/ 20=160 | Σειρά Υ2 |
| S3 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 160 | 160/2 = 80 | Σειρά Υ3 |
| P | -100 | -300 | -200 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | | Σειρά Υ4 |

**Πίνακας 3: Στήλη και Γραμμή Οδηγός**

Το σημείο που τέμνονται η στήλη και η γραμμή οδηγός (έστω ότι το ονομάζω X=2) είναι αυτό που μέσω πράξεων μέσα στον πίνακα, θα κάνουμε ίσο με την μονάδα.

## **<u>Βήμα 6ο</u>**

Στην πρώτη στήλη, αντικαθιστούμε την μεταβλητή S3 με την μεταβλητή X2.

Σκοπός μας είναι μέσω κατάλληλων πράξεων μέσα στον πίνακα, να έχουμε ως αποτέλεσμα το στοιχείο X να ισούται με 1, και τα υπόλοιπα στοιχεία της στήλης-οδηγού να είναι ίσα με 0.

| β.μ. | X1 | X2 | X3 | S1 | S2 | S3 | P | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| S1 | ½ | 0 | ½ | 1 | 0 | -½ | 0 | 20 | Y1'=Y1-Y3' |
| S2 | 30 | 0 | 20 | 0 | 1 | -10 | 0 | 1600 | Y2'=Y2-20 Y3' |
| X2 | ½ | 1 | ½ | 0 | 0 | ½ | 0 | 80 | Y3'=Y3/2 |
| P | 50 | 0 | -50 | 0 | 0 | 150 | 1 | 24000 | Y4'=Y4+300 Y3' |

**Πίνακας 4: Πρώτη επανάληψη Simplex**

Προκειμένου να γίνει αυτό, διαιρούμε τα στοιχεία της σειράς Y3 με το 2.

Αναλυτικά, για την στοιχεία της νέας σειράς Y3' έχουμε:

1ο στοιχείο: 1/2, 2ο στοιχείο: 2/2=1 που ήταν και ο σκοπός μας!

3ο στοιχείο: 1/2, 4ο στοιχείο: 0/2=0, 5ο στοιχείο: 0/2=0, 6ο στοιχείο: 1/2,

7ο στοιχείο: 0/2=0, και 8ο στοιχείο: 160/2=80

Στη συνέχεια, προσαρμόζουμε μέσω πράξεων τα στοιχεία των υπόλοιπων σειρών, ώστε τα στοιχεία της στήλης οδηγού εκτός του X να είναι ίσα με 0.

Για την σειρά Y1', αφαιρώ από τα στοιχεία της αρχικής σειράς Y1 τα στοιχεία της νέας σειράς Y3', δηλαδή Y1'=Y1-Y3'.

Για την σειρά Y2', αφαιρώ από τα στοιχεία της αρχικής σειράς Y2 τα στοιχεία της σειράς Y3' πολλαπλασιασμένα επί 20, δηλαδή Y2'=Y2-20 Y3'.

Για την σειρά Y4', προσθέτω στα στοιχεία της αρχικής σειράς Y4 τα στοιχεία της σειράς Y3' πολλαπλασιασμένα επί 300, δηλαδή Y4'=Y4+300 Y3'.

Ο νέος πίνακας από την πρώτη επανάληψη της Simplex φαίνεται παραπάνω.

Η νέα βασική εφικτή λύση είναι (X1,X2,X3,S1,S2,S3,P) = (0, 80, 0, 20, 1600, 0, 24000).

Μελετώντας όμως τα στοιχεία της τελευταίας σειράς, βλέπουμε πως υπάρχει αρνητικό στοιχείο -50<0. Άρα η λύση δεν είναι βέλτιστη.

**<u>Βήμα 7ο</u>**

Επιλέγουμε μια νέα στήλη οδηγό, στην οποία ανήκει το αρνητικό στοιχείο της τελευταίας σειράς. Εδώ, είναι η στήλη της μεταβλητής Χ3.

Διαιρούμε τις τιμές της τελευταίας στήλης (τιμές της νέας βασικής εφικτής λύσης) με τις αντίστοιχες τιμές της στήλης οδηγού. Από τις λύσεις των διαιρέσεων, επιλέγουμε την γραμμή στην οποία ανήκει η μικρότερη τιμή. Εδώ είναι η γραμμή της μεταβλητής S1 και ονομάζεται γραμμή οδηγός.

| β.μ. | X1 | X2 | X3 | S1 | S2 | S3 | P | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| S1 | ½ | 0 | ½ | 1 | 0 | -½ | 0 | 20 | 20/ ½ =40 | Σειρά Y1' |
| S2 | 30 | 0 | 20 | 0 | 1 | -10 | 0 | 1600 | 1600/ 20=80 | Σειρά Y2' |
| X2 | ½ | 1 | ½ | 0 | 0 | ½ | 0 | 80 | 80/ ½ =160 | Σειρά Y3' |
| P | 50 | 0 | -50 | 0 | 0 | 150 | 1 | 24000 | | Σειρά Y4' |

**Πίνακας 5: Στήλη και Γραμμή Οδηγός Β**

**<u>Βήμα 8ο</u>**

Στην πρώτη στήλη αντικαθιστούμε την μεταβλητή S1 με την μεταβλητή Χ3.

Το στοιχείο Χ=1/2 πρέπει να το κάνουμε να είναι ίσο με 1. Επίσης, πρέπει να μηδενίσουμε τα υπόλοιπα στοιχεία της στήλης οδηγού.

| β.μ. | **X1** | X2 | X3 | S1 | S2 | S3 | P | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **X3** | 1 | 0 | 1 | 2 | 0 | -1 | 0 | **40** | Y1''=Y1'/(1/2) |
| S2 | 10 | 0 | 0 | -40 | 1 | 10 | 0 | 800 | Y2''=Y2'-20 Y1'' |
| **X2** | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | **60** | Y3''=Y3'-(1/2)Y1'' |
| P | 100 | 0 | 0 | 100 | 0 | 100 | 1 | **26000** | Y4''=Y4'+50 Y1'' |

**Πίνακας 6: Δεύτερη Επανάληψη Simplex**

Κάνοντας τι αντίστοιχες πράξεις σε κάθε γραμμή, έχουμε τον τελικό πίνακα.

Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχουν αρνητικές τιμές στην τελευταία σειρά. Άρα η λύση που έχουμε βρει είναι και η βέλτιστη.

Συγκεκριμένα η νέα λύση είναι: (X1,X2,X3,S1,S2,S3,P) = (0, 60, 40, 0, 800, 0, 26000)

**<u>Ερμηνεία της λύσης</u>**

Ο αγρότης θα πρέπει να σπείρει 60 στρέμματα με σπόρο τύπου Β και 40 στρέμματα με σπόρο τύπου Γ, προκειμένου να έχει το μέγιστο κέρδος που είναι 26000 ευρώ.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

# 4. SOLVER

## 4.1 ΤΙ ΕΙΝΑΙ Ο SOLVER

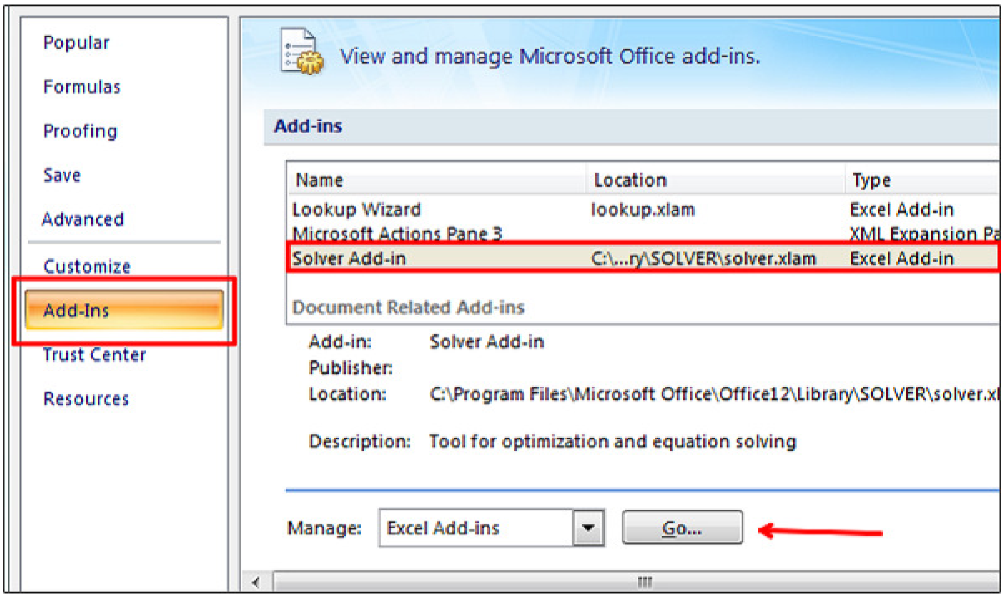
Έχοντας μελετήσει το θεωρητικό μέρος του Γραμμικού Προγραμματισμού, περνάμε στο πρακτικό κομμάτι που είναι η λύση των προβλημάτων. Για την επίλυση των προβλημάτων υπάρχουν ορισμένα λογισμικά προγράμματα όπως είναι ο Solver και το Lindo. Εμείς στην συγκεκριμένη πτυχιακή θα χρησιμοποιήσουμε τον Solver.

Ο Solver είναι ένα γραμμικό πρόγραμμα του Microsoft Excel. Το πρόγραμμα λογιστικών φύλλων Microsoft Excel έχει ενσωματωμένο το πρόγραμμα επίλυσης προτύπων του Γραμμικού Προγραμματισμού. Στην ουσία χρησιμοποιεί το λογιστικό φύλλο του Microsoft Excel ώστε να εισάγουμε τα δεδομένα και με την βοήθεια του προγράμματος να λύσουμε το γραμμικό πρόβλημα. Παρότι ο Solver είναι τμήμα του Microsoft Excel ανήκει στην κατηγορία των add-ins. Αυτό σημαίνει πως πρέπει να ακολουθήσουμε μια συγκεκριμένη διαδικασία πριν το χρησιμοποιήσουμε.

## 4.2 ΕΓΚΑΤΑΣΤΑΣΗ SOLVER

Για να εγκαταστήσουμε τον Solver ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

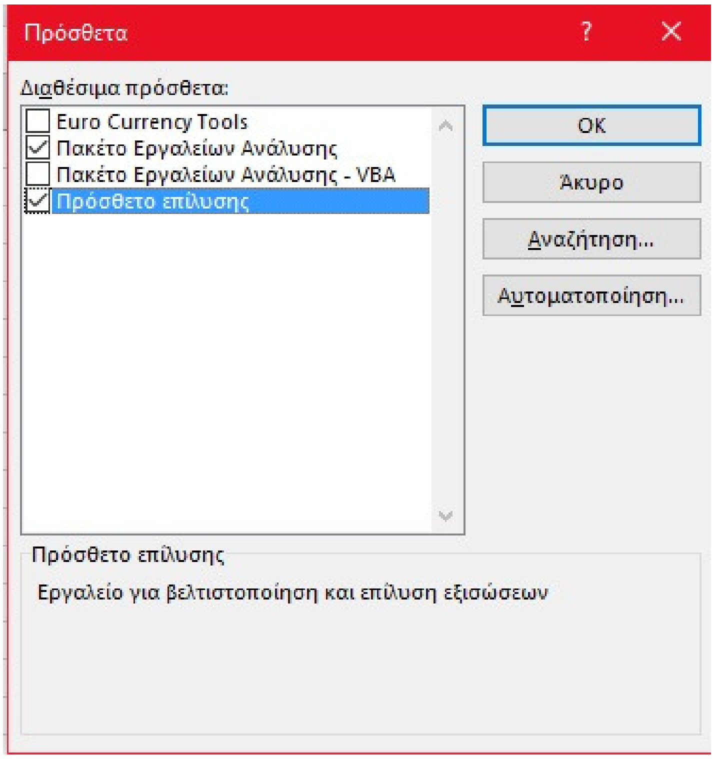
1. Ανοίγουμε το Excel και κάνουμε κλικ στην καρτέλα **Αρχείο.**
2. Κάνουμε κλικ στο στοιχείο **Επιλογές** και στη συνέχεια, κάνουμε κλικ στην κατηγορία **Πρόσθετα**.
3. Έπειτα στο κάτω μέρος του παραθύρου διαλόγου **Επιλογές του Excel**, πρέπει η επιλογή **Πρόσθετα του Excel** να είναι ενεργοποιημένη στο πλαίσιο **Διαχείριση** και στη συνέχεια, επιλέγουμε **Μετάβαση**.




**Εικόνα 10: Εγκατάσταση Solver add-ins**

4. Στο παράθυρο διαλόγου **Πρόσθετα**, επιλέγουμε τα πλαίσια ελέγχου για το **Πακέτο Εργαλείων Ανάλυσης** και το **Πρόσθετο επίλυσης** και, στη συνέχεια, κάνουμε κλικ στο κουμπί **OK**.

5. Τέλος στην καρτέλα **Δεδομένα**, παρατηρούμε ότι έχει προστεθεί μια ομάδα **Ανάλυση**. Αυτή η ομάδα περιέχει κουμπιά εντολών για **Ανάλυση δεδομένων** και για **Επίλυση**.




**Εικόνα 11: Πρόσθετο επίλυσης**

## 4.3 ΠΩΣ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΜΕ ΤΟΝ SOLVER

Αφού εγκαταστήσαμε με επιτυχία το Solver εισάγουμε τα στοιχεία στο υπολογιστικό φύλλο για να λειτουργήσει το πρόγραμμα της επίλυσης. Αρχικά πρέπει να κάνουμε μοντελοποίηση του προβλήματος. Να ορίσουμε δηλαδή τις μεταβλητές X και Y, να θέσουμε τους περιορισμούς και να επιλέξουμε την συνάρτηση. Στην συνέχεια να επιλέξουμε από τα Εργαλεία τον Solver για να βρεθεί η βέλτιστη λύση.

Η Επίλυση είναι μέρος μιας σειράς εντολών που ορισμένες φορές ονομάζονται εργαλεία ανάλυσης. Με την επίλυση, μπορούμε να βρούμε τη βέλτιστη τιμή (μέγιστο ή ελάχιστο) για ένα κελί, που ονομάζεται το κελί στόχου και υπόκειται σε περιορισμούς ή όρια, στις τιμές των άλλων τύπων κελιών σε ένα φύλλο εργασίας. Η επίλυση λειτουργεί με μια ομάδα κελιών, που ονομάζεται μεταβλητές απόφασης ή απλώς μεταβλητά κελιά, που συμμετέχουν στον υπολογισμό των τύπων στα κελιά περιορισμού και στόχου. Η Επίλυση μεταβάλλει τις τιμές στα κελιά μεταβλητών για να πληρούν τα όρια κελιών περιορισμών και να παράγουν το αποτέλεσμα που θέλουμε για το κελί στόχου. Για να προσδιορίσουμε και να λύσουμε ένα πρόβλημα ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

1. Από την καρτέλα **Δεδομένα**, στην ομάδα **Ανάλυση**, επιλέγουμε **Επίλυση**.
2. Στο πλαίσιο **Ορισμός στόχου**, πληκτρολογούμε μια αναφορά κελιού ή ένα όνομα για το κελί στόχου. Το κελί στόχου πρέπει να περιέχει έναν τύπο.
3. Ακολουθούμε ένα από τα εξής:
    a. Εάν θέλουμε το κελί στόχου να λάβει τη μέγιστη δυνατή τιμή του, κάνουμε κλικ στο κουμπί επιλογής **Μέγιστο**.
    b. Εάν θέλουμε το κελί στόχου να λάβει την ελάχιστη δυνατή τιμή του, κάνουμε κλικ στο κουμπί επιλογής **Ελάχιστο**.
    c. Εάν θέλουμε το κελί στόχου να λάβει μια συγκεκριμένη τιμή, κάνουμε κλικ στο κουμπί επιλογής **Τιμή** και, στη συνέχεια, πληκτρολογούμε την τιμή στο πλαίσιο.
4. Στο πλαίσιο **Με αλλαγή μεταβλητών κελιών** πληκτρολογούμε το όνομα ή την αναφορά για κάθε μεταβλητό κελί απόφασης. Διαχωρίζουμε τις μη γειτονικές αναφορές με κόμμα. Τα μεταβλητά κελιά πρέπει να σχετίζονται άμεσα ή έμμεσα με το κελί στόχου
5. Στο πλαίσιο **Υπόκειται στους περιορισμούς**, πληκτρολογούμε τους περιορισμούς που θέλουμε να ισχύουν κάνοντας τα εξής:

    a. Στο παράθυρο διαλόγου **Παράμετροι επίλυσης**, κάνουμε κλικ στο κουμπί **Προσθήκη**.
    b. Στο πλαίσιο **Αναφορά κελιού**, πληκτρολογούμε την αναφορά κελιού ή το όνομα της περιοχής κελιών για την οποία θέλουμε να περιορίσουμε την τιμή.
    c. Κάντε κλικ στη σχέση ( **<=**, **=**, **>=**, **int**, **bin**, or **dif** ) που θέλουμε να ισχύει μεταξύ του αναφερόμενου κελιού και του περιορισμού.
    d. Αν επιλέξουμε <=, =, ή >= για τη σχέση στο πλαίσιο **Περιορισμός**, πληκτρολογούμε έναν αριθμό, ένα όνομα ή αναφορά κελιού ή έναν τύπο.
    e. Κάνουμε ένα από τα εξής:
        - Για να αποδεχτούμε τον περιορισμό και να προσθέσουμε έναν άλλο, κάνουμε κλικ στο κουμπί **Προσθήκη**.
        - Για να αποδεχτούμε τον περιορισμό και να επιστρέψουμε στο παράθυρο διαλόγου **Παράμετροι επίλυσης**, κάνουμε κλικ στο κουμπί **OK**.
    f. Στο παράθυρο διαλόγου **Παράμετροι επίλυσης**, κάνουμε κλικ στον περιορισμό που θέλουμε να αλλάξουμε ή να διαγράψουμε.
    g. Κάνουμε κλικ στο κουμπί **Αλλαγή** και, στη συνέχεια, κάνουμε τις αλλαγές ή κάνουμε κλικ στο κουμπί **Διαγραφή**.

6. Κάνουμε κλικ στην επιλογή **Επίλυση** και κάνουμε μία ή περισσότερες από τις εξής ενέργειες:
    a. Για να διατηρήσουμε τις τιμές της λύσης στο φύλλο εργασίας, στο παράθυρο διαλόγου **Αποτελέσματα Επίλυσης**, επιλέγουμε **Διατήρηση λύσης της Επίλυσης**.
    b. Για να αποκαταστήσουμε τις αρχικές τιμές πριν κάνουμε κλικ στην επιλογή **Επίλυση**, κάνουμε κλικ στο κουμπί **Επαναφορά των αρχικών τιμών**.
    c. και, στη συνέχεια, κάνουμε κλικ στο κουμπί **OK**. Η αναφορά δημιουργείται σε ένα νέο φύλλο εργασίας του βιβλίου εργασίας σας. Εάν η 'Επίλυση' δεν βρει μια λύση, τότε μόνο μερικές αναφορές είναι διαθέσιμες, ή δεν υπάρχουν διαθέσιμες αναφορές.

Για να αποθηκεύσουμε τις τιμές μεταβλητών κελιών απόφασης ως σενάριο το οποίο μπορούμε να εμφανίσουμε αργότερα, κάνουμε κλικ στην επιλογή **Αποθήκευση σεναρίου** του παραθύρου διαλόγου **Αποτελέσματα Επίλυσης** και, στη συνέχεια, πληκτρολογούμε ένα όνομα για το σενάριο στο πλαίσιο **Όνομα σεναρίου**.

Αφού είδαμε και τα βήματα που πρέπει να ακολουθήσουμε περνάμε στο επόμενο κεφάλαιο, στο πρακτικό κομμάτι του προγράμματος, που είναι η επίλυση πραγματικών προβλημάτων με μεταβλητές και περιορισμούς που αποτυπώνονται μαθηματικά για να φτάσουμε στην βέλτιστη λύση μέσω του Solver με πραγματικές τιμές.

## 4.4 <u>ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ</u>

### 4.4.1 <u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1ο</u>

<u>Εκφώνηση:</u>

Σε ένα ορισμένο διυλιστήριο, η διαδικασία διύλισης απαιτεί την παραγωγή τουλάχιστον δύο γαλονιών βενζίνης για κάθε γαλόνι μαζούτ (υγρό καύσιμο, προϊόν απόσταξης πετρελαίου). Για να ανταποκριθεί στις αυξανόμενες απαιτήσεις του χειμώνα, θα πρέπει να παράγει τουλάχιστον τρία εκατομμύρια γαλόνια μαζούτ την ημέρα. Από την άλλη πλευρά, η ζήτηση για βενζίνη δεν είναι πάνω από 6.4 εκατομμύρια γαλόνια ημερησίως. Αν η τιμή της βενζίνης είναι 1,90 $ το γαλόνι και του μαζούτ 1,50 $ το γαλόνι, πόσα γαλόνια πρέπει να παράγονται από το καθένα ώστε το διυλιστήριο να μεγιστοποιεί τα κέρδη του;

<u>Λύση:</u>

Το πρόβλημα ζητά τον αριθμό των γαλονιών βενζίνης και μαζούτ που πρέπει να παραχθούν ώστε να μεγιστοποιούνται τα κέρδη, γι’ αυτό πρέπει να ορίσουμε τις μεταβλητές

X: γαλόνια βενζίνης που παράγονται

Y: γαλόνια μαζούτ που παράγονται

Δεδομένου ότι στον «πραγματικό κόσμο» δεν μπορώ να έχω αρνητικά επίπεδα παραγωγής, οι μεταβλητές δεν μπορούν να παίρνουν αρνητικές τιμές. Αυτό μας δίνει τον πρώτο από τους δύο περιορισμούς, δηλαδή $X \geq 0$ και $Y \geq 0$.

Ακόμα, πρέπει να παράγονται τουλάχιστον 2 γαλόνια βενζίνης για κάθε γαλόνι μαζούτ, άρα $X \geq 2Y$ ή αλλιώς $Y \leq (1/2)X$ .

Το χειμώνα η ζήτηση για μαζούτ είναι $Y \geq 3000000$ . Είναι ο δεύτερος περιορισμός που εμπεριέχει τον πρώτο ($Y \geq 0$), και έτσι τον εξαλείφει.

Η ζήτηση για βενζίνη είναι $X \leq 6400000$ .

Σκοπός του διυλιστηρίου είναι να μεγιστοποιεί τα έσοδά του R, όπου η εξίσωση βελτιστοποίησης είναι $R=1.9X+1.5Y$ , υπό τους περιορισμούς

X≥0➔0≤X

X≤6400000

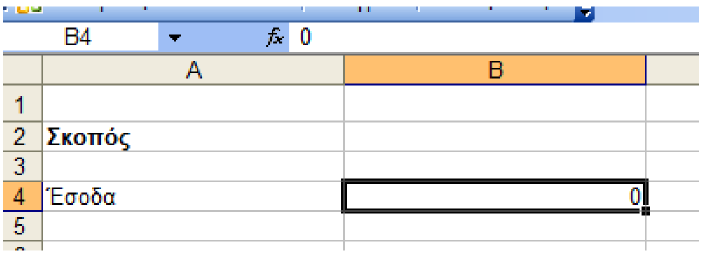
Y≥3000000➔3000000≤Y

Y≤(1/2)X

Στη συνέχεια, με τη χρήση του Excel , σταδιακά θα βρεθεί η λύση.

<u>Βήμα 1</u>

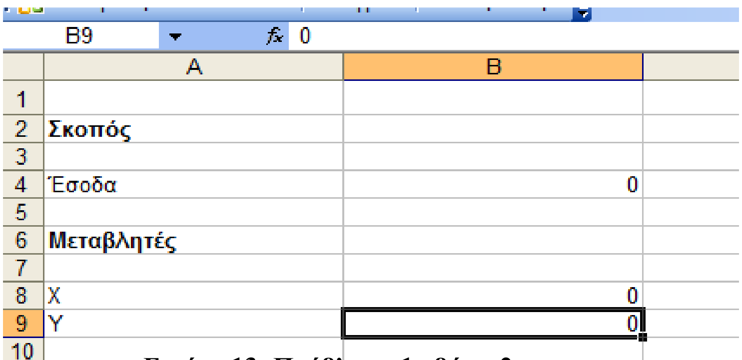
Ορίζω τον σκοπό του προβλήματος που είναι η μεγιστοποίηση των εσόδων. Στο κελί A4 γράφω Έσοδα, που είναι αυτά που θέλω να μεγιστοποιήσω. Στο κελί B4, θέτω αυθαίρετα την τιμή των εσόδων ίση με 0.




**Εικόνα 12: Πρόβλημα 1$^{o}$ βήμα 1$^{o}$**

<u>Βήμα 2</u>

Στα κελιά A8 και A9 ορίζω τις μεταβλητές X και Y αντίστοιχα. Στα κελιά B8 και B9 αντίστοιχα, βρίσκονται οι τιμές των μεταβλητών αυτών (τα γαλόνια βενζίνης και μαζούτ), και τα θέτω ίσα με 0.




**Εικόνα 13: Πρόβλημα 1ο βήμα 2ο**

Βήμα 3

Θέτω τους περιορισμούς. Στο 1ο κελί (A13) γράφω την υπό περιορισμό μεταβλητή. Στο δεύτερο (B13) θέτω το κάτω άκρο της ανισότητας, και στο τρίτο (C13) το πάνω.

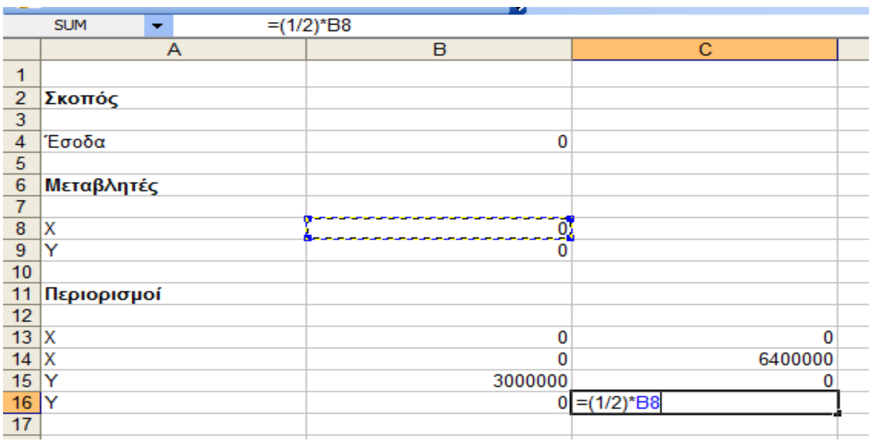
Προσοχή! Στις ανισώσεις των περιορισμών, όπου X και Y, αναγράφω το κελί των τιμών των μεταβλητών αυτών, δηλαδή τα κελιά B8 και B9 αντίστοιχα.

Παράδειγμα: Θέτοντας τον τέταρτο και τελευταίο περιορισμό, έχουμε Y≤(1/2)X.

Στο κελί A16 γράφουμε την υπό περιορισμό ή αλλιώς εξαρτημένη μεταβλητή, δηλαδή την Y.

Στο κελί B16 γράφουμε το κάτω άκρο (πρώτο σκέλος) της ανισότητας, που είναι η τιμή της μεταβλητής Y (κελί B9).

Στο κελί C16 γράφουμε το άνω άκρο (δεύτερο σκέλος) της ανισότητας, που είναι η τιμή της μεταβλητής X (κελί B8) πολλαπλασιασμένη με ½.

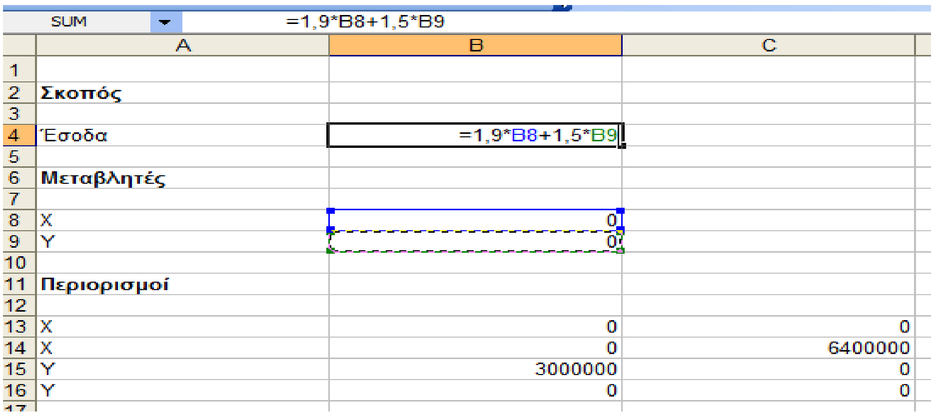

SUM =(1/2)*B8

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| 2 | **Σκοπός** | | |
| 3 | | | |
| 4 | Έσοδα | 0 | |
| 5 | | | |
| 6 | **Μεταβλητές** | | |
| 7 | | | |
| 8 | X | 0 | |
| 9 | Y | 0 | |
| 10 | | | |
| 11 | **Περιορισμοί** | | |
| 12 | | | |
| 13 | X | 0 | 0 |
| 14 | X | 0 | 6400000 |
| 15 | Y | 3000000 | 0 |
| 16 | Y | 0 | =(1/2)*B8 |
| 17 | | | |

**Εικόνα 14: Πρόβλημα 1ο βήμα 3ο**

<u>Βήμα 4</u>

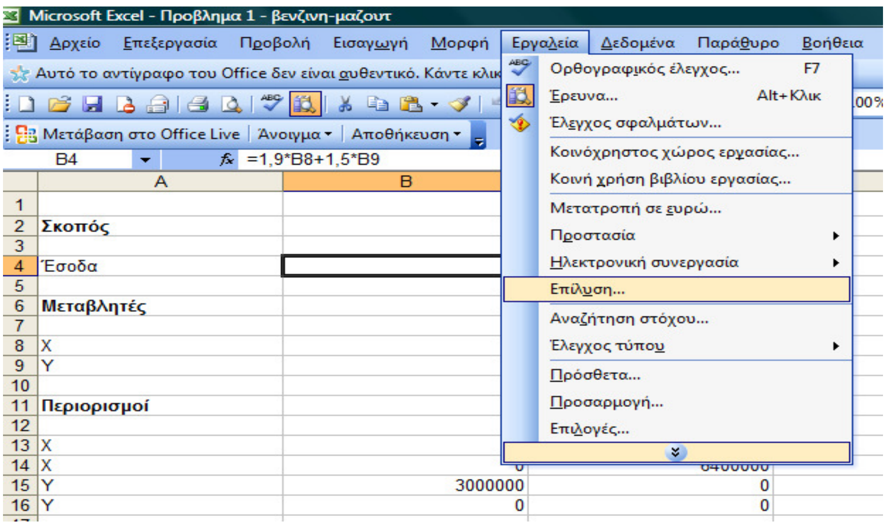
Ορίζω την συνάρτηση των εσόδων R=1.9X+1.5Y. Στη θέση των μεταβλητών X και Y, θα εισάγω τα κελιά που βρίσκονται οι τιμές των μεταβλητών αυτών, δηλαδή τα κελιά B8 και B9 αντίστοιχα.




**Εικόνα 15: Πρόβλημα 1ο βήμα 4ο**

<u>Βήμα 5</u>

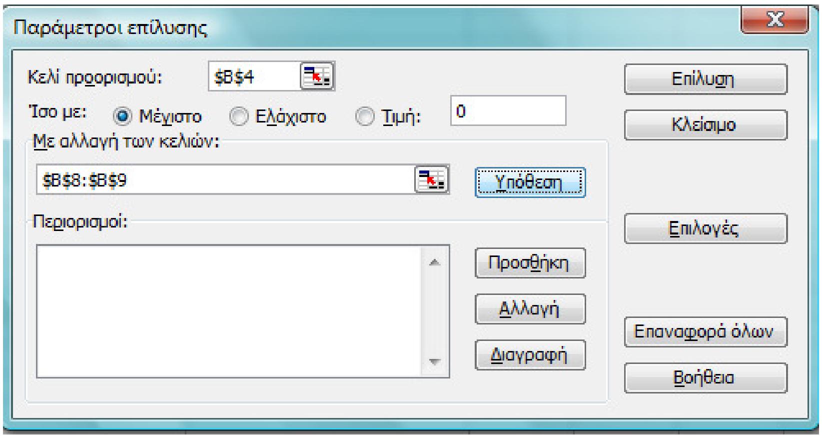
Επιλέγω στο μενού *Εργαλεία* και στις επιλογές τους *Επίλυση (Solver).*




**Εικόνα 16: Πρόβλημα 1ο βήμα 5ο**

Βήμα 6

Εμφανίζεται το παρακάτω αναδυόμενο παράθυρο.




**Εικόνα 17: Πρόβλημα 1ο βήμα 6ο**

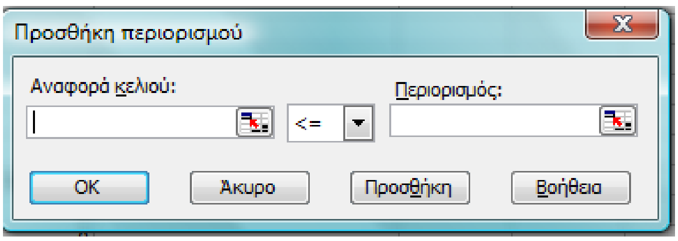
Αν το πρόβλημα έχει τεθεί σωστά, στο *Κελί προορισμού (Set target cell)* το σύστημα βρίσκει από μόνο του την συνάρτηση που θέλω να μεγιστοποιήσω (συνάρτηση εσόδων), που βρίσκεται στο κελί B4.

Επιλέγω *Μέγιστο (Max)* αφού θέλω να μεγιστοποιήσω την συνάρτηση.

Στο σημείο που γράφει *Με αλλαγή των κελιών (By changing cells)* τοποθετώ τις τιμές των μεταβλητών. Αν επιλέξω *Υπόθεση (Guess)* και το πρόβλημα έχει τεθεί σωστά, το σύστημα θα μαντέψει σωστά τα κελιά των μεταβλητών, που είναι από το B8 μέχρι το B9.

Βήμα 7

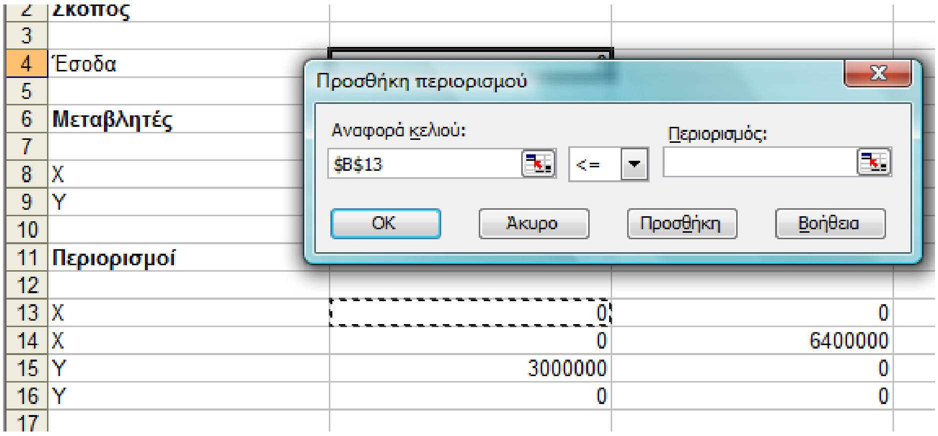
Στο σημείο που γράφει *Περιορισμοί (Subject to the constraints)* θα σημειωθούν οι περιορισμοί που έχουμε θέσει. Αν επιλέξουμε *Προσθήκη (Add),* αναδύεται το παρακάτω παράθυρο.




**Εικόνα 18: Πρόβλημα 1ο βήμα 7ο**

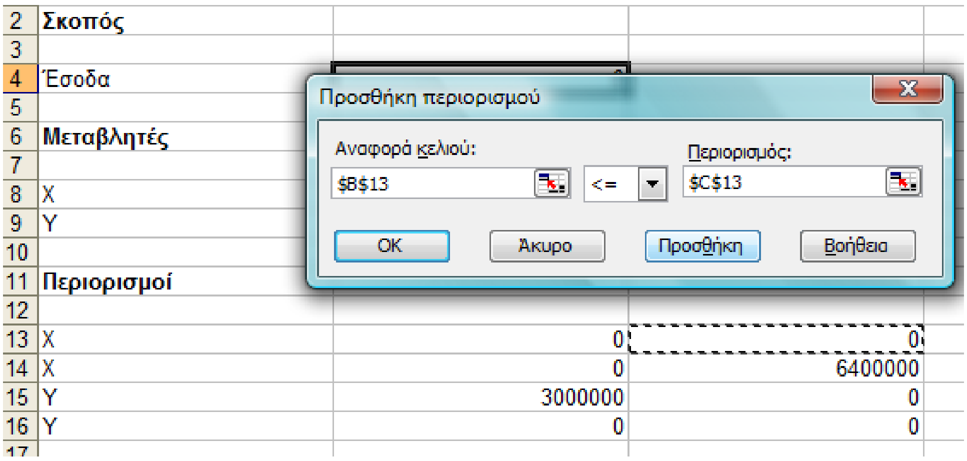
Βήμα 8

Στην *Αναφορά κελιού (Cell reference)* επιλέγουμε με το ποντίκι το κάτω άκρο του πρώτου περιορισμού (κελί Β13).




**Εικόνα 19: Πρόβλημα 1ο βήμα 8ο-Α**

Στο *Περιορισμός (Constraint)* επιλέγουμε με το ποντίκι το άνω άκρο του πρώτου περιορισμού (κελί C13). Την επιλογή της ανισότητας θα την αφήσουμε ως έχει, καθώς με τον τρόπο που έχουμε θέσει τους περιορισμούς (κάτω άκρο-αριστερό κελί, άνω άκρο-δεξί κελί) έχουμε «μικρότερο ή ίσο».

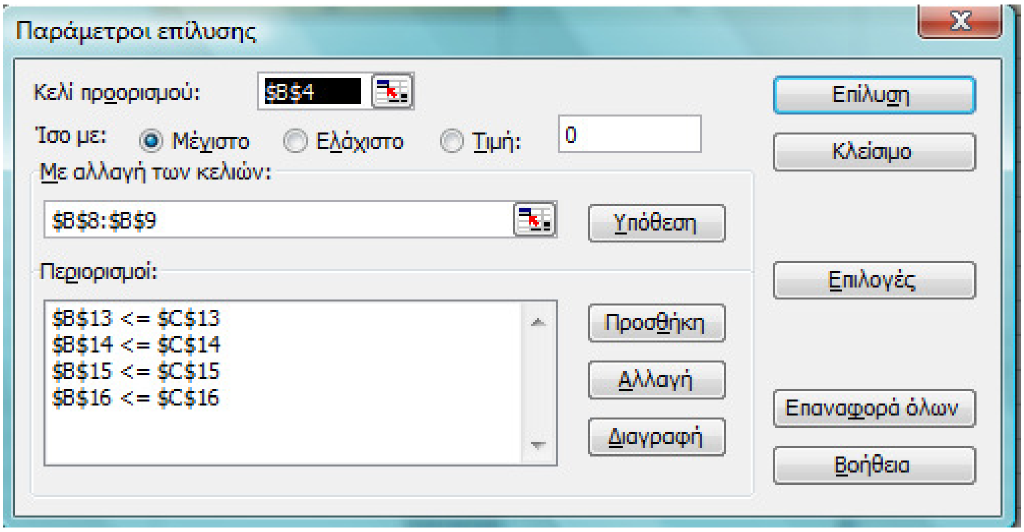



**Εικόνα 20: Πρόβλημα 1ο βήμα 8ο-Β**

Έτσι θέσαμε ότι $0 \leq X$, δηλαδή X=θετικό, αφού Κελί Β13=0 και Κελί C13=Κελί B8=τιμή της μεταβλητής X.

Με την επιλογή *Προσθήκη (Add),* μπορούμε να θέσουμε με τον ίδιο τρόπο και τους υπόλοιπους περιορισμούς.

Πατώντας *OK* έχουμε το παρακάτω παράθυρο. Έχουμε ήδη θέσει όλους τους περιορισμούς.



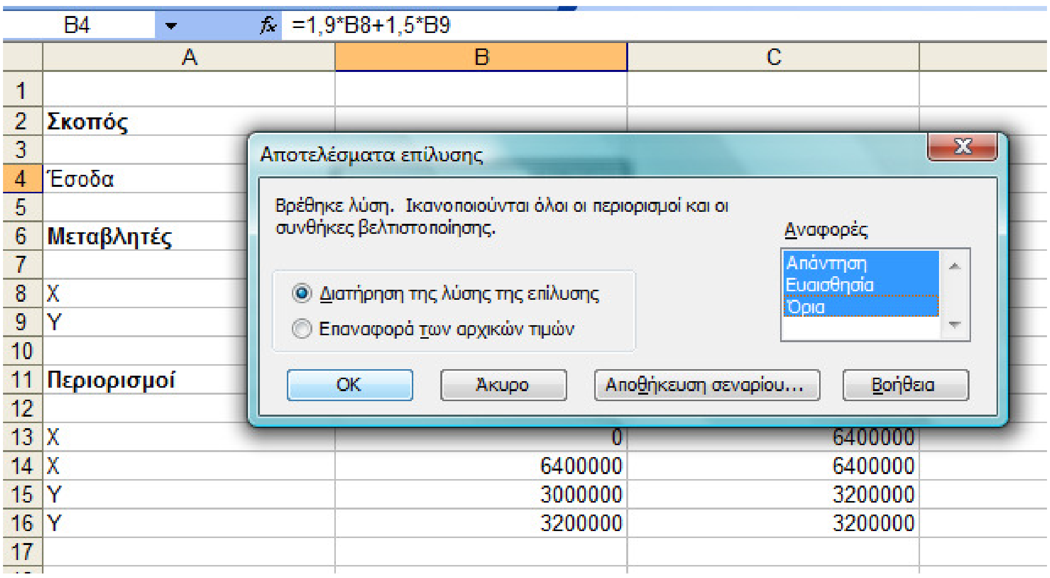

**Εικόνα 21: Πρόβλημα $1^{ο}$ βήμα $8^{ο}$-Γ**

Πάνω και δεξιά, επιλέγουμε *Επίλυση (Solve).*

<u>Βήμα 9</u>

Βλέπουμε ότι το σύστημα έλυσε το πρόβλημα που του θέσαμε.

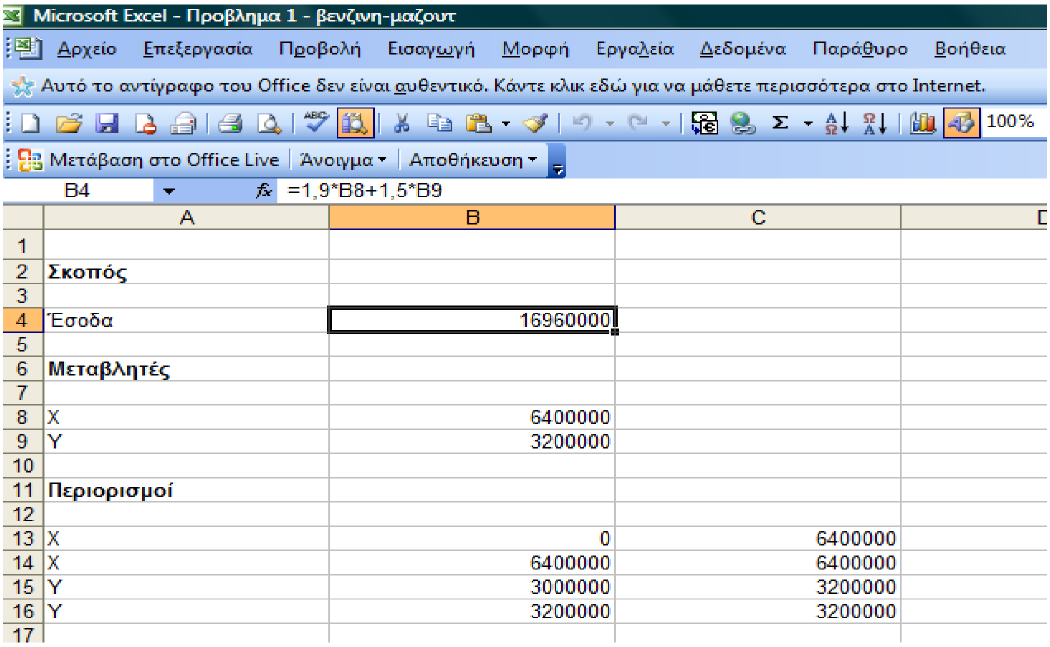
Στο αναδυόμενο παράθυρο, επιλέγουμε *Διατήρηση της λύσης της επίλυσης (Keep solver solution)* , και στις *Αναφορές (Reports)* κάνουμε κλικ και στις τρεις επιλογές *Απάντηση (Answer), Ευαισθησία (Sensitivity), Όρια (Limits).* Πατάμε *ΟΚ.*




**Εικόνα 22: Πρόβλημα $1^{ο}$ βήμα $9^{ο}$**

Βήμα 10

Έχουμε πλέον την λύση στο πρόβλημα μεγιστοποίησης των εσόδων.




| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| 2 | **Σκοπός** | | |
| 3 | | | |
| 4 | Έσοδα | 16960000 | |
| 5 | | | |
| 6 | **Μεταβλητές** | | |
| 7 | | | |
| 8 | X | 6400000 | |
| 9 | Y | 3200000 | |
| 10 | | | |
| 11 | **Περιορισμοί** | | |
| 12 | | | |
| 13 | X | 0 | 6400000 |
| 14 | X | 6400000 | 6400000 |
| 15 | Y | 3000000 | 3200000 |
| 16 | Y | 3200000 | 3200000 |
| 17 | | | |

**Εικόνα 23: Πρόβλημα 1$^{ο}$ βήμα 10$^{ο}$**

Αν το διυλιστήριο παράγει 6.4 εκατομμύρια γαλόνια βενζίνη (κελί B8) και 3.2 εκατομμύρια γαλόνια μαζούτ (κελί B9), τότε θα μεγιστοποιεί τα έσοδά του, που θα είναι 16.96 εκατομμύρια δολάρια (κελί B4).

## 4.4.2 ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2ο

Εκφώνηση:

Μία εταιρεία σχεδιασμού υπολογιστών τσέπης παράγει δύο τύπους αριθμομηχανών, επιστημονικές και απλές. Η αναμενόμενη ζήτηση είναι τουλάχιστον 100 επιστημονικές και 80 απλές αριθμομηχανές την ημέρα. Λόγω των περιορισμών στην παραγωγική ικανότητα, δεν μπορούν να παραχθούν περισσότερες από 200 επιστημονικές και 170 απλές αριθμομηχανές καθημερινά.

Για να ικανοποιήσει μία σύμβαση που έχει συνάψει με την επιχείρηση «Βιβλιοχαρτοπωλείο», πρέπει να αποστέλλει καθημερινά τουλάχιστον 200 αριθμομηχανές συνολικά.

Αν κάθε επιστημονική αριθμομηχανή που πωλείται συνεπάγεται 2 ευρώ κόστος, ενώ κάθε απλή αποφέρει 5 ευρώ κέρδος, πόσες αριθμομηχανές από κάθε είδος πρέπει να παράγονται καθημερινά, ώστε η εταιρεία να μεγιστοποιεί τα καθαρά κέρδη της;

Λύση:

Σκοπός μας είναι να βρούμε τον αριθμό των αριθμομηχανών που θα μεγιστοποιούν τα καθαρά κέρδη της εταιρείας. Έτσι ορίζουμε τις μεταβλητές:

X: αριθμός επιστημονικών αριθμομηχανών που παράγονται, και

Y: αριθμός απλών αριθμομηχανών που παράγονται.

Από την στιγμή που δεν μπορούν να παραχθούν αρνητικοί αριθμοί αριθμομηχανών, έχουμε τους δύο πρώτους περιορισμούς, που είναι $X \geq 0$ και $Y \geq 0$. Αλλά στην περίπτωση αυτή μπορώ να τους αγνοήσω, αφού ισχύει $X \geq 100$ και $Y \geq 80$.

Το πρόβλημα όμως θέτει και ανώτατα όρια στην παραγωγή, που είναι $X \leq 200$ και $Y \leq 170$.

Η ελάχιστη απαίτηση του «Βιβλιοχαρτοπωλείου» είναι $X+Y \geq 200 \Rightarrow Y \geq -X+200$.

Το καθαρό κέρδος δίνεται από την εξίσωση $R=-2X+5Y$.

Έτσι ολόκληρο το σύστημα είναι:

Η συνάρτηση μεγιστοποίησης $R=-2X+5Y$ υπό τους περιορισμούς:

$X \geq 100 \Rightarrow 100 \leq X$

$Y \geq 80 \Rightarrow 80 \leq Y$

$X \leq 200$

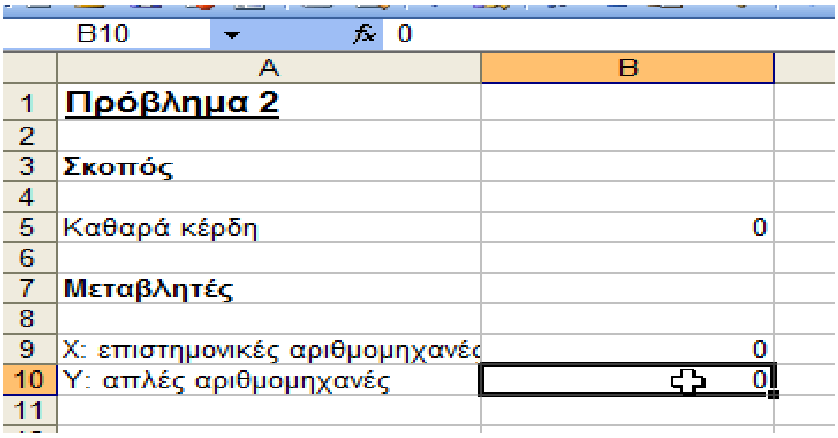
$Y \leq 170$

$Y \geq -X+200 \Rightarrow -X+200 \leq Y$

Εισάγουμε τα δεδομένα στο Excel

Βήμα 1

Ορίζω τον σκοπό του προβλήματος (μεγιστοποίηση καθαρού κέρδους), τις μεταβλητές X και Y, και τα θέτω όλα ίσα με 0.



B10 | fx 0

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | **Πρόβλημα 2** | |
| 2 | | |
| 3 | **Σκοπός** | |
| 4 | | |
| 5 | Καθαρά κέρδη | 0 |
| 6 | | |
| 7 | **Μεταβλητές** | |
| 8 | | |
| 9 | X: επιστημονικές αριθμομηχανές | 0 |
| 10 | Y: απλές αριθμομηχανές | 0 |
| 11 | | |

**Εικόνα 24: Πρόβλημα 2$^{o}$ βήμα 1$^{o}$**

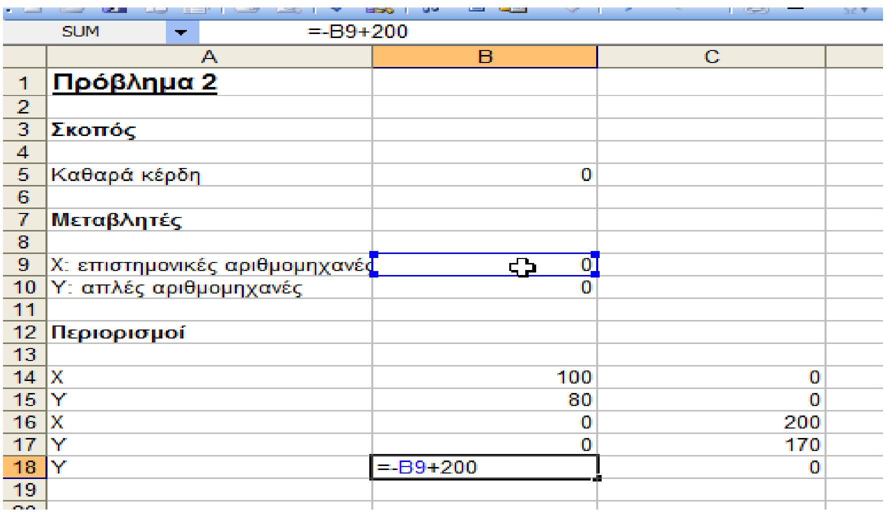
Βήμα 2

Θέτω τους περιορισμούς. Στο 1$^{o}$ κελί γράφω την υπό περιορισμό μεταβλητή. Στο δεύτερο θέτω το κάτω άκρο της ανισότητας, και στο τρίτο το πάνω.

Παράδειγμα: Θέτοντας τον πέμπτο και τελευταίο περιορισμό –X+200≤Y, η υπό περιορισμό μεταβλητή είναι η Y, την οποία και σημειώνουμε στο κελί A18.

Στο κελί B18 αναγράφουμε το κάτω άκρο της ανισότητας, δηλαδή –X+200, και όπου X αντικαθιστούμε την τιμή της μεταβλητής X, που βρίσκεται στο κελί B9.

Στο κελί C18 αναγράφουμε το άνω άκρο της ανισότητας, που είναι η τιμή της μεταβλητής Y, που βρίσκεται στο κελί B10.



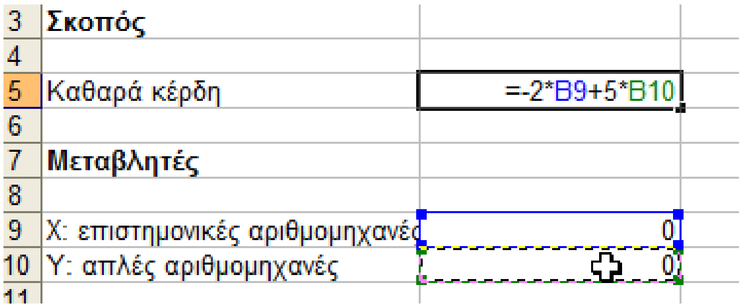
SUM | =-B9+200

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | **Πρόβλημα 2** | | |
| 2 | | | |
| 3 | **Σκοπός** | | |
| 4 | | | |
| 5 | Καθαρά κέρδη | 0 | |
| 6 | | | |
| 7 | **Μεταβλητές** | | |
| 8 | | | |
| 9 | X: επιστημονικές αριθμομηχανές | 0 | |
| 10 | Y: απλές αριθμομηχανές | 0 | |
| 11 | | | |
| 12 | **Περιορισμοί** | | |
| 13 | | | |
| 14 | X | 100 | 0 |
| 15 | Y | 80 | 0 |
| 16 | X | 0 | 200 |
| 17 | Y | 0 | 170 |
| 18 | Y | =-B9+200 | 0 |
| 19 | | | |

**Εικόνα 25: Πρόβλημα 2$^{o}$ βήμα 2$^{o}$**

Βήμα 3

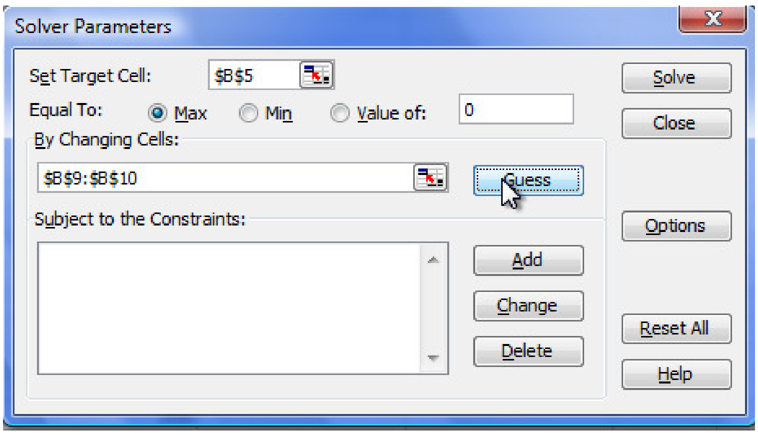
Ορίζω την συνάρτηση των καθαρών κερδών R=2X+5Y. Όπου X και Y, αντικαθιστώ τις τιμές των μεταβλητών αυτών, δηλαδή τα κελιά B9 και B10 αντίστοιχα.




**Εικόνα 26: Πρόβλημα $2^{o}$ βήμα $3^{o}$**

Βήμα 4

Επιλέγω στο μενού *Εργαλεία* και στις επιλογές τους *Solver*. Στο παράθυρο που θα εμφανιστεί, στο *Set target cell* το σύστημα θα βρει από μόνο του την συνάρτηση προς μεγιστοποίηση που βρίσκεται στο κελί B5. Επιλέγω *Max* και στο σημείο που αναγράφεται *By changing cells* τοποθετώ τις μεταβλητές. Αν πατήσω *Guess* και το πρόβλημα έχει τεθεί σωστά, το σύστημα θα μαντέψει σωστά τα κελιά των τιμών των μεταβλητών, που είναι από το B9 μέχρι το B10.



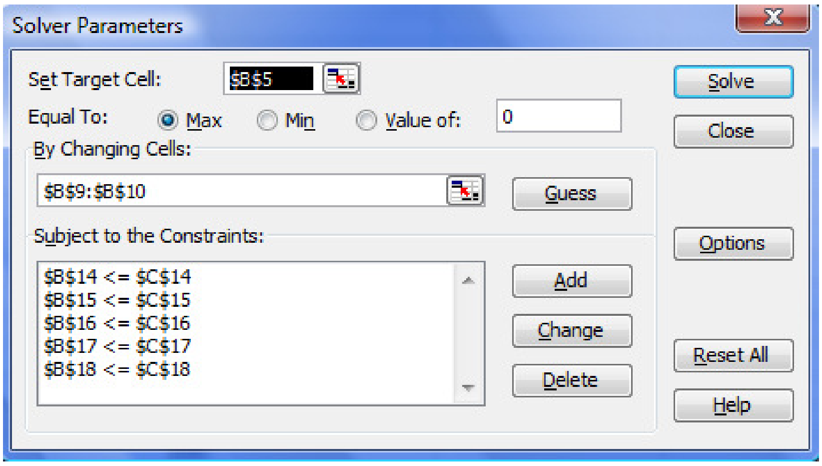

**Εικόνα 27: Πρόβλημα $2^{o}$ βήμα $4^{o}$**

Βήμα 5

Εισάγουμε τους πέντε περιορισμούς που έχουμε. Επιλέγουμε το στοιχείο *Add* για να προσθέσουμε έναν περιορισμό.

Παράδειγμα: Για τον πρώτο περιορισμό 100≤Χ έχουμε: Το κάτω άκρο της ανισότητας είναι στο κελί Β14, και το άνω στο κελί C14.

Κάθε φορά που επιλέγουμε το *Add* μπορούμε να εισάγουμε άλλον έναν περιορισμό.




**Εικόνα 28: Πρόβλημα 2ο βήμα 5ο**

Βήμα 6

Επιλέγουμε *Solve.*

Βλέπουμε ότι το σύστημα έλυσε το πρόβλημα που του θέσαμε.

Στο παράθυρο που θα βγει, επιλέγουμε *Keep solver solution* , και στις *Αναφορές (Reports)* κάνουμε κλικ και στις τρεις επιλογές. Πατάμε *OK.*

Βήμα 7

Έχουμε πλέον την λύση στο πρόβλημα μεγιστοποίησης των καθαρών κερδών.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | **Πρόβλημα 2** | | |
| 2 | | | |
| 3 | **Σκοπός** | | |
| 4 | | | |
| 5 | Καθαρά κέρδη | 650 | |
| 6 | | | |
| 7 | **Μεταβλητές** | | |
| 8 | | | |
| 9 | X: επιστημονικές αριθμομηχανές | 100 | |
| 10 | Y: απλές αριθμομηχανές | 170 | |
| 11 | | | |
| 12 | **Περιορισμοί** | | |
| 13 | | | |
| 14 | X | 100 | 100 |
| 15 | Y | 80 | 170 |
| 16 | X | 100 | 200 |
| 17 | Y | 170 | 170 |
| 18 | Y | 100 | 170 |

**Εικόνα 29: Πρόβλημα 2$^{ο}$ βήμα 7$^{ο}$**

Αν η εταιρεία παράγει 100 επιστημονικές και 170 απλές αριθμομηχανές ημερησίως, τότε τα καθαρά κέρδη της θα μεγιστοποιούνται και θα είναι 650 ευρώ.

### 4.4.3 ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3ο

Εκφώνηση:

Για να εξασφαλιστεί η καλύτερη υγεία (και συνεπώς ακριβείς μετρήσεις στα πειράματα), ένας τεχνικός εργαστηρίου πρέπει να ταΐζει τα κουνέλια μια καθημερινή διατροφή που περιέχει τουλάχιστον 24 γραμμάρια λίπους, 36 γρ. υδατάνθρακες και 4 γρ. πρωτεΐνες. Όμως τα κουνέλια δεν πρέπει να τρώνε περισσότερο από 5 ουγγιές (1 ουγγιά = 28.35 γραμμάρια) τροφής συνολικά την ημέρα.
Θέλουμε να παραγγείλουμε τις τροφές X και Y. Η τροφή X περιέχει 8 γρ. λίπος, 12 γρ. υδατάνθρακες, και 2 γρ. πρωτεΐνης ανά ουγγιά, και κοστίζει 0.20 ευρώ ανά ουγγιά. Η τροφή Y περιέχει 12 γρ. λίπος, 12 γρ. υδατάνθρακες και 1 γρ. πρωτεΐνη ανά ουγγιά, με κόστος 0.30 ευρώ ανά ουγγιά. Ποιος είναι ο βέλτιστος συνδυασμός τροφών;

Λύση:

Δεδομένου ότι ζητάμε να βρούμε τον αριθμό των ουγγιών κάθε τροφής που πρέπει να παραγγείλουμε, ορίζουμε τις μεταβλητές:

X: ουγγιές της τροφής X

Y: ουγγιές της τροφής Y

Επειδή δεν μπορούμε να έχουμε αρνητικό αριθμό ουγγιών τροφής, οι πρώτοι μας περιορισμοί είναι: $X \geq 0$ και $Y \geq 0$ ➔ $0 \leq X$ και $0 \leq Y$

Οι επόμενοι περιορισμοί προκύπτουν από τα γραμμάρια λίπους, υδατανθράκων και πρωτεϊνών ανά ουγγιά που πρέπει να καταναλώνουν τα κουνέλια καθημερινά :

Λίπος: $8X+12Y \geq 24$ ➔ $Y \geq 2-(2/3)X$ ➔ $2-(2/3)X \leq Y$

Υδατάνθρακες: $12X+12Y \geq 36$ ➔ $X+Y \geq 3$ ➔ $Y \geq 3-X$ ➔ $3-X \leq Y$

Πρωτεΐνες: $2X+1Y \geq 4$ ➔ $Y \geq 4-2X$ ➔ $4-2X \leq Y$

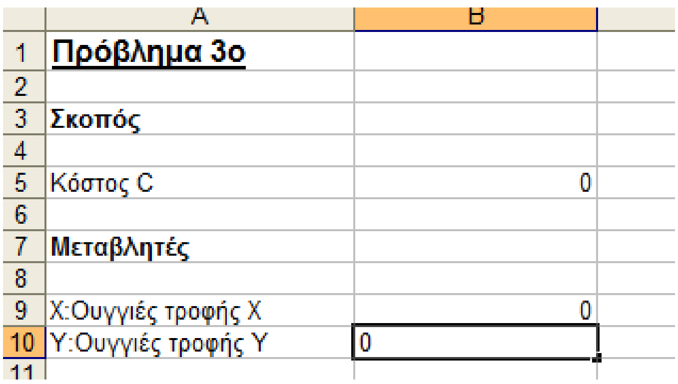
Επίσης, η καθημερινή τροφή στο σύνολό της δεν πρέπει να ξεπερνά τις 5 ουγγιές: $X+Y \leq 5$ ➔ $X \leq 5-Y$

Η εξίσωση βελτιστοποίησης θα είναι η συνάρτηση του κόστους: $C=0{,}20X+0{,}30Y$ την οποία θα πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε.

Εισάγουμε τα δεδομένα στο Excel.

Βήμα 1

Ορίζω τον σκοπό του προβλήματος (ελαχιστοποίηση κόστους), τις μεταβλητές X και Y, και τα θέτω όλα ίσα με 0.



| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | **Πρόβλημα 3ο** | |
| 2 | | |
| 3 | **Σκοπός** | |
| 4 | | |
| 5 | Κόστος C | 0 |
| 6 | | |
| 7 | **Μεταβλητές** | |
| 8 | | |
| 9 | X:Ουγγιές τροφής X | 0 |
| 10 | Y:Ουγγιές τροφής Y | 0 |
| 11 | | |

**Εικόνα 30: Πρόβλημα 3ο βήμα 1ο**

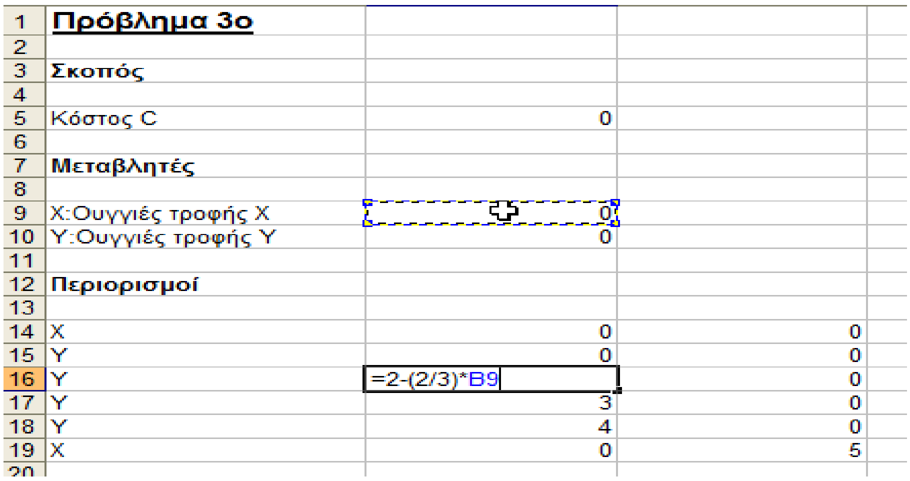
Βήμα 2

Θέτω τους περιορισμούς. Στο 1$^{ο}$ κελί γράφω την υπό περιορισμό μεταβλητή. Στο δεύτερο θέτω το κάτω άκρο της ανισότητας, και στο τρίτο το άνω.

Παράδειγμα: Για τον τρίτο περιορισμό 2-(2/3)X≤Y, η υπό περιορισμό μεταβλητή είναι η Y, την οποία και αναγράφουμε στο κελί A16.

Στο κελί B16 γράφουμε το κάτω άκρο της ανισότητας που είναι 2-(2/3)X. Όπου X αντικαθιστώ την τιμή της μεταβλητής X που βρίσκεται στο κελί B9.

Στο κελί C16 γράφουμε το άνω άκρο της ανισότητας, δηλαδή την τιμή της μεταβλητής Y που βρίσκεται στο κελί B10.

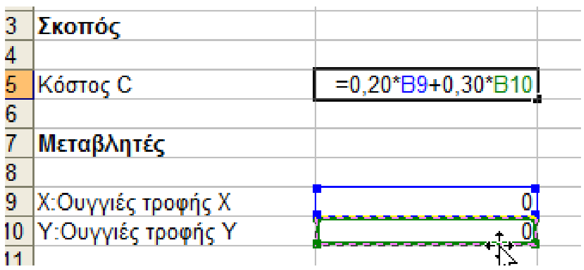


| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | Πρόβλημα 3ο | | |
| 2 | | | |
| 3 | Σκοπός | | |
| 4 | | | |
| 5 | Κόστος C | 0 | |
| 6 | | | |
| 7 | Μεταβλητές | | |
| 8 | | | |
| 9 | X:Ουγγιές τροφής X | 0 | |
| 10 | Y:Ουγγιές τροφής Y | 0 | |
| 11 | | | |
| 12 | Περιορισμοί | | |
| 13 | | | |
| 14 | X | 0 | 0 |
| 15 | Y | 0 | 0 |
| 16 | Y | =2-(2/3)*B9 | 0 |
| 17 | Y | 3 | 0 |
| 18 | Y | 4 | 0 |
| 19 | X | 0 | 5 |

**Εικόνα 31: Πρόβλημα 3$^{ο}$ βήμα 2$^{ο}$**

Βήμα 3

Ορίζω την συνάρτηση του κόστους C=0.20X+0.30Y. Όπου X και Y, αντικαθιστώ τις τιμές των μεταβλητών, δηλαδή τα κελιά B9 και B10 αντίστοιχα.

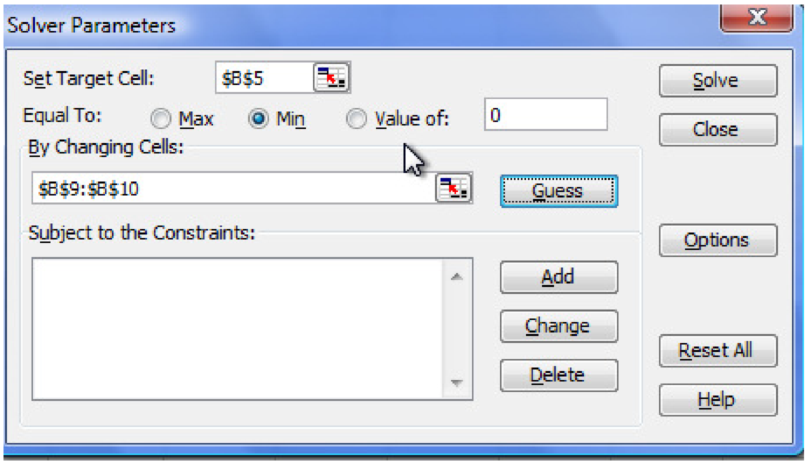


| | | |
|---|---|---|
| 3 | Σκοπός | |
| 4 | | |
| 5 | Κόστος C | =0,20*B9+0,30*B10 |
| 6 | | |
| 7 | Μεταβλητές | |
| 8 | | |
| 9 | X:Ουγγιές τροφής X | 0 |
| 10 | Y:Ουγγιές τροφής Y | 0 |

**Εικόνα 32: Πρόβλημα 3$^{ο}$ βήμα 3$^{ο}$**

Βήμα 4

Επιλέγω στο μενού *Εργαλεία* και στις επιλογές τους *Επίλυση (Solver).* Στο παράθυρο που θα εμφανιστεί, στο *Set target cell* το σύστημα θα βρει από μόνο του την συνάρτηση προς βελτιστοποίηση (την συνάρτηση κόστους) που βρίσκεται στο κελί B5. Επιλέγω *Ελάχιστο (Min)* αφού θέλω να ελαχιστοποιήσω το κόστος, και στο σημείο που αναγράφεται *Με αλλαγή των κελιών (By changing cells)* τοποθετώ τα κελιά των τιμών των μεταβλητών. Αν πατήσω *Guess* και το πρόβλημα έχει τεθεί σωστά, το σύστημα θα μαντέψει σωστά τα κελιά, που είναι από το B9 μέχρι το B10.




**Εικόνα 33: Πρόβλημα 3ο βήμα 4ο**

Βήμα 5

Εισάγουμε τους περιορισμούς μέσω του στοιχείου *Προσθήκη (Add).*

Όπως και πριν, πρώτα εισάγουμε το κελί με το κάτω άκρο της ανισότητας και έπειτα το κελί με το άνω άκρο.

Επιλέγουμε *Επίλυση (Solve).*

Βλέπουμε ότι το σύστημα έλυσε το πρόβλημα που του θέσαμε.

Στο παράθυρο που θα αναδυθεί, επιλέγουμε *Διατήρηση της λύσης της επίλυσης* , και στις *Αναφορές* κάνουμε κλικ και στις τρεις επιλογές. Πατάμε *OK.*

=0,2*B9+0,3*B10

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | **Πρόβλημα 3ο** | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | **Σκοπός** | | | |
| 4 | | | | |
| 5 | Κόστος C | 0,6 | | |
| 6 | | | | |
| 7 | **Μεταβλητές** | | | |
| 8 | | | | |
| 9 | X:Ουγγιές τροφής X | 3 | | |
| 10 | Y:Ουγγιές τροφής Y | 0 | | |
| 11 | | | | |
| 12 | **Περιορισμοί** | | | |
| 13 | | | | |
| 14 | X | 0 | 3 | |
| 15 | Y | 0 | 0 | |
| 16 | Y | 0 | 0 | |
| 17 | Y | 0 | 0 | |
| 18 | Y | -2 | 0 | |
| 19 | X | 3 | 5 | |
| 20 | | | | |

**Εικόνα 34: Πρόβλημα 3ο βήμα 5ο**

Έχουμε πλέον την λύση στο πρόβλημα ελαχιστοποίησης του κόστους.

Αν ο τεχνικός του εργαστηρίου ταΐσει τα κουνέλια 3 ουγγιές από την τροφή Χ και καθόλου τροφή Υ, τότε θα ελαχιστοποιεί το κόστος του, το οποίο θα είναι 0,6 ευρώ την ημέρα.

### 4.4.4 ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4ο

Εκφώνηση:

Πρέπει να αγοράσετε κάποια ντουλάπια ως χώρους αρχειοθέτησης σε ένα λογιστικό γραφείο. Γνωρίζετε ότι το ντουλάπι τύπου Χ κοστίζει 10 ευρώ το ένα, καλύπτει επιφάνεια δαπέδου ίση με 6 τετραγωνικά μέτρα, και χωράει κατά μέσο όρο 8 αρχεία πελατών. Το ντουλάπι τύπου Υ κοστίζει 20 ευρώ, καλύπτει 8 τετραγωνικά μέτρα δαπέδου, και χωράει κατά μέσο όρο 12 αρχεία πελατών. Σας έχουν δοθεί 140 ευρώ για να κάνετε τις αγορές σας, όμως δεν χρειάζεται να τα ξοδέψετε όλα. Ο χώρος του γραφείου που θα τοποθετήσετε τα ντουλάπια, δεν είναι μεγαλύτερος από 72 τετραγωνικά μέτρα.

Πόσα ντουλάπια πρέπει να αγοράσετε από κάθε τύπο, ώστε να μεγιστοποιήσετε τον αποθηκευτικό χώρο του γραφείου;

Λύση:

Το ερώτημα ζητά τον αριθμό των ντουλαπιών που θα αγοράσουμε από κάθε τύπο. Έτσι ορίζουμε τις μεταβλητές

X: αριθμός ντουλαπιών τύπου X

Y: αριθμός ντουλαπιών τύπου Y

Φυσικά ισχύει $X \geq 0 \rightarrow 0 \leq X$ και $Y \geq 0 \rightarrow 0 \leq Y$.

Λαμβάνοντας υπόψη το κόστος και την επιφάνεια δαπέδου που καλύπτουν τα ντουλάπια, πρέπει να μεγιστοποιήσουμε τον χώρο αποθήκευσης.

Άρα, το κόστος και η επιφάνεια δαπέδου θα είναι οι περιορισμοί μας, ενώ ο όγκος αποθήκευσης θα είναι η συνάρτηση μεγιστοποίησης.

Κόστος: $10X+20Y \leq 140 \rightarrow X \leq 14-2Y$

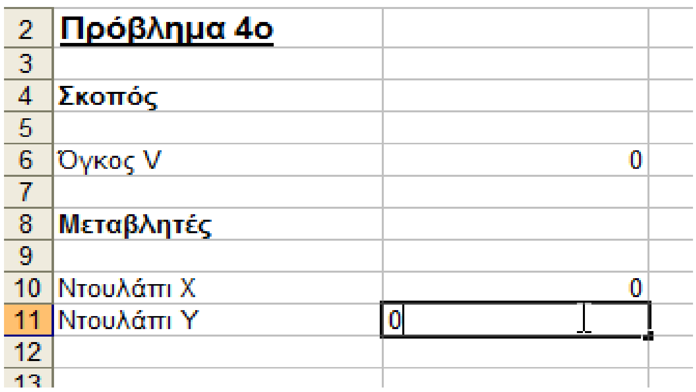
Επιφάνεια: $6X+8Y \leq 72 \rightarrow Y \leq 9-(3/4)X$

Συνάρτηση μεγιστοποίησης: Όγκος αποθήκευσης: $V=8X+12Y$

Εισάγουμε τα δεδομένα στο Excel.

Βήμα 1

Ορίζω τον σκοπό του προβλήματος (μεγιστοποίηση όγκου), τις μεταβλητές X και Y, και τα θέτω όλα ίσα με 0.




**Εικόνα 35: Πρόβλημα 4ο βήμα 1ο**

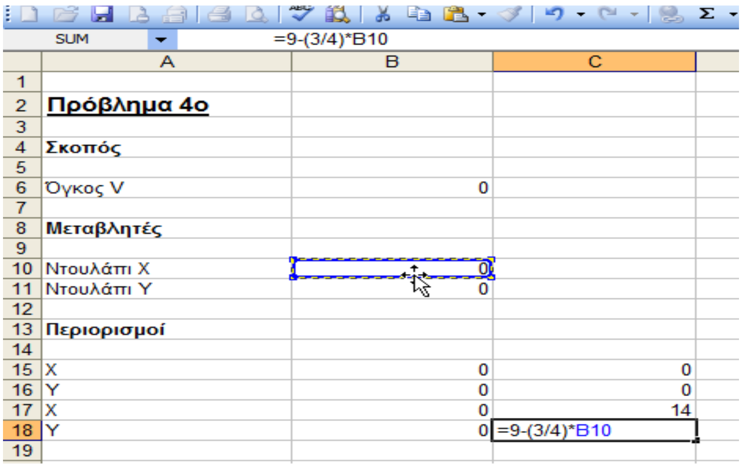
Βήμα 2

Θέτω τους περιορισμούς. Στο 1ο κελί γράφω την υπό περιορισμό μεταβλητή. Στο δεύτερο θέτω το κάτω άκρο της ανισότητας, και στο τρίτο το άνω.

Παράδειγμα: Για τον τέταρτο και τελευταίο περιορισμό Y≤9-(3/4)X, αναγράφουμε στο κελί A18 την υπό περιορισμό μεταβλητή, δηλαδή την Y.

Στο κελί B18 γράφουμε το κάτω άκρο της ανισότητας, δηλαδή την τιμή της μεταβλητής Y που βρίσκεται στο κελί B11.

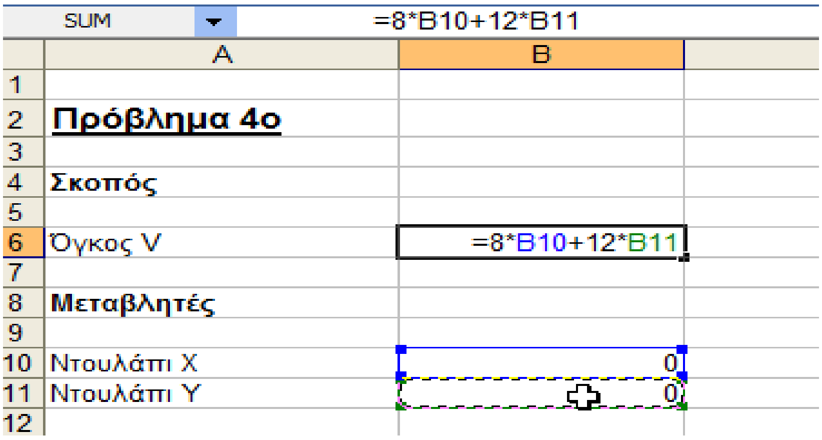
Στο κελί C18 γράφουμε το άνω άκρο της ανισότητας που είναι 9-(3/4)X, και όπου X αντικαθιστούμε το κελί που βρίσκεται η τιμή της μεταβλητής X, δηλαδή το κελί B10.




**Εικόνα 36: Πρόβλημα 4ο βήμα 2ο**

Βήμα 3

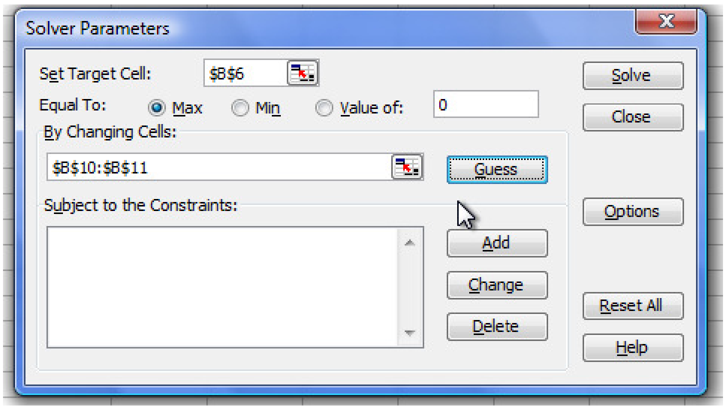
Ορίζω την συνάρτηση του όγκου αποθήκευσης V=8X+12Y. Όπου X και Y, αντικαθιστώ τις τιμές των μεταβλητών που βρίσκονται στα κελιά B10 και B11 αντίστοιχα.




**Εικόνα 37: Πρόβλημα 4ο βήμα 3ο**

Βήμα 4

Επιλέγω στο μενού *Εργαλεία* και στις επιλογές τους *Επίλυση (Solver).* Στο παράθυρο που θα εμφανιστεί, στο *Set target cell* το σύστημα θα βρει από μόνο του την συνάρτηση προς βελτιστοποίηση που βρίσκεται στο κελί B6. Επιλέγω *Max* αφού θέλω να μεγιστοποιήσω τον όγκο αποθήκευσης, και στο σημείο που αναγράφεται *By changing cells* τοποθετώ τις μεταβλητές. Αν πατήσω *Υπόθεση (Guess)* και το πρόβλημα έχει τεθεί σωστά, το σύστημα θα μαντέψει σωστά τα κελιά των τιμών των μεταβλητών, που είναι από το B10 μέχρι το B11.




**Εικόνα 38: Πρόβλημα 4ο βήμα 4ο**

<u>Βήμα 5</u>

Επιλέγοντας *Add* μπορούμε να εισάγουμε τους περιορισμούς. Πρώτα επιλέγουμε το κελί με το κάτω άκρο του περιορισμού, και έπειτα το κελί με το άνω άκρο. Με την επιλογή του στοιχείου *Add* εισάγουμε και τους άλλους περιορισμούς.

Επιλέγουμε *Επίλυση (Solve).*

Βλέπουμε ότι το σύστημα έλυσε το πρόβλημα που του θέσαμε.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | **Πρόβλημα 4ο** | | |
| 3 | | | |
| 4 | **Σκοπός** | | |
| 5 | | | |
| 6 | Όγκος V | 100 | |
| 7 | | | |
| 8 | **Μεταβλητές** | | |
| 9 | | | |
| 10 | Ντουλάπι X | 8 | |
| 11 | Ντουλάπι Y | 3 | |
| 12 | | | |
| 13 | **Περιορισμοί** | | |
| 14 | | | |
| 15 | X | 0 | 8 |
| 16 | Y | 0 | 3 |
| 17 | X | 8 | 8 |
| 18 | Y | 3 | 3 |

**Εικόνα 39: Πρόβλημα 4ο βήμα 5ο**

Έχουμε λύσει το πρόβλημα και βρήκαμε πως εάν αγοράσουμε 8 ντουλάπια τύπου X και 3 ντουλάπια τύπου Y, τότε θα μεγιστοποιηθεί ο όγκος αποθήκευσης που θα χωράει 100 αρχεία.

### 4.4.5 <u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5ο</u>

<u>Εκφώνηση:</u>

Έστω ότι θέλετε να επενδύσετε 12.000 ευρώ σε τρία επενδυτικά σχέδια για την επέκταση της εταιρείας σας.

Το επενδυτικό σχέδιο Α αναμένεται να έχει απόδοση 7% επί των κερδών, το σχέδιο Β έχει 8% και το σχέδιο Γ που είναι υψηλού κινδύνου έχει 12% απόδοση. Για να ελαχιστοποιηθεί ο κίνδυνος που αντιμετωπίζετε, αποφασίσατε να μην επενδύσετε περισσότερα από 2.000 ευρώ στο σχέδιο Γ. Για φορολογικούς λόγους, η επένδυση που θα κάνετε στο σχέδιο Α πρέπει να είναι τρεις φορές μεγαλύτερη από το ποσό της επένδυσης στο σχέδιο Β.

Υποθέτοντας ότι οι αποδόσεις των επενδύσεών σας θα είναι οι αναμενόμενες, πόσα πρέπει να επενδύσετε σε κάθε σχέδιο;

<u>Λύση:</u>

Δεδομένου ότι αναζητάμε το ποσό των χρημάτων που θα επενδύσουμε σε κάθε σχέδιο, οι μεταβλητές μας θα είναι αυτά τα ποσά.

X: επένδυση (σε χιλιάδες ευρώ) στο σχέδιο Α

Y: επένδυση (σε χιλιάδες ευρώ) στο σχέδιο Β

Και επειδή έχουμε τρία σχέδια, η τρίτη μας μεταβλητή θα είναι συνάρτηση των άλλων δύο, δηλαδή 12-X-Y: επένδυση (σε χιλιάδες ευρώ) στο σχέδιο Γ.

Δεν μπορούν να επενδυθούν αρνητικά ποσά, άρα οι πρώτοι τρεις περιορισμοί είναι

$X \geq 0 \Rightarrow 0 \leq X$

$Y \geq 0 \Rightarrow 0 \leq Y$

$12-X-Y \geq 0 \Rightarrow 12-X \geq Y \Rightarrow Y \leq 12-X$

Το ανώτατο όριο επένδυσης στο σχέδιο Γ είναι 2000 ευρώ, άρα προκύπτει

$12-X-Y \leq 2 \Rightarrow 12-X-2 \leq Y \Rightarrow 10-X \leq Y$

Λόγω των φορολογικών απαιτήσεων, πρέπει $Y \leq (1/3)X$

Η εξίσωση βελτιστοποίησης είναι η συνολική απόδοση των επενδύσεων, δηλαδή R=0,07X+0,08Y+0,12(12-X-Y) ➔ R=1,44 - 0.05X - 0.04Y

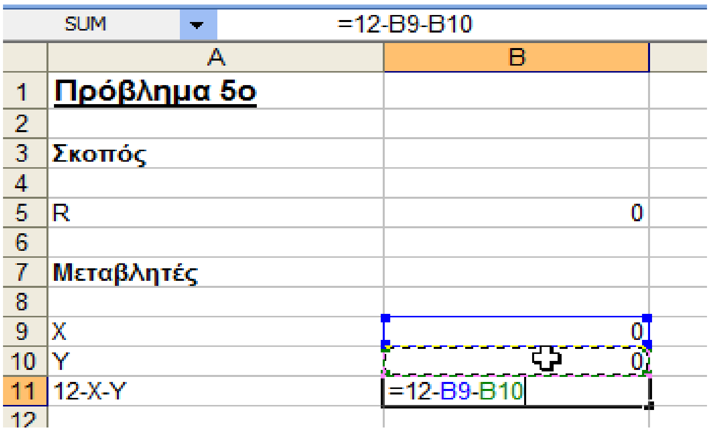
Εισάγουμε τα δεδομένα στο Excel.

Βήμα 1

Ορίζω τον σκοπό του προβλήματος (μέγιστη απόδοση επενδύσεων), και το θέτω ίσο με 0.

Ορίζω τις μεταβλητές X, Y και θέτω τις τιμές τους ίσες με 0.

Ορίζω την μεταβλητή 12-X-Y, και στο κελί B11 όπου θα ορίσω την τιμή της, αντικαθιστώ όπου X και Y τα κελιά των τιμών τους, δηλαδή B9 και B10 αντίστοιχα.




**Εικόνα 40: Πρόβλημα 5ο βήμα 1ο**

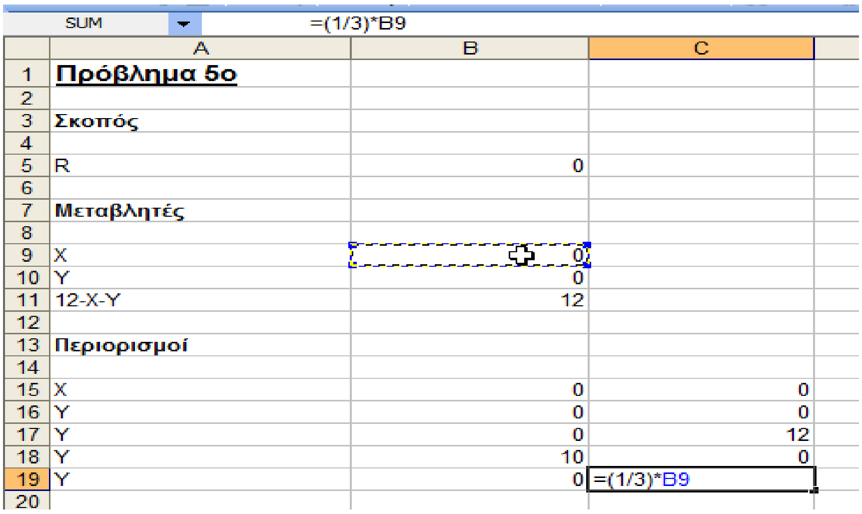
Βήμα 2

Θέτω τους περιορισμούς. Στο 1ο κελί γράφω την υπό περιορισμό μεταβλητή. Στο δεύτερο θέτω το κάτω άκρο της ανισότητας, και στο τρίτο το άνω.

Παράδειγμα: Στον πέμπτο και τελευταίο περιορισμό Y≤(1/3)X, η υπό περιορισμό μεταβλητή είναι η Y και το γράφω στο κελί A19.

Στο κελί B19 γράφουμε το κάτω άκρο της ανισότητας, δηλαδή την τιμή της μεταβλητής Y που βρίσκεται στο κελί B10.

Στο κελί C19 γράφουμε το άνω άκρο της ανισότητας, δηλαδή (1/3)X και όπου X αντικαθιστώ με την τιμή της μεταβλητής X που βρίσκεται στο κελί B9.

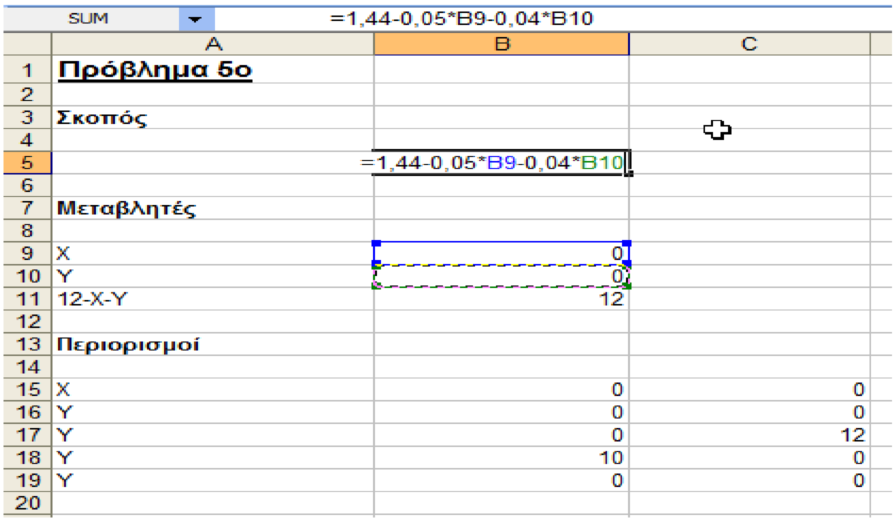



**Εικόνα 41: Πρόβλημα 5ο βήμα 2ο**

<u>Βήμα 3</u>

Ορίζω την συνάρτηση της απόδοσης των επενδυτικών σχεδίων R=1.44-0.05X-0.04Y.

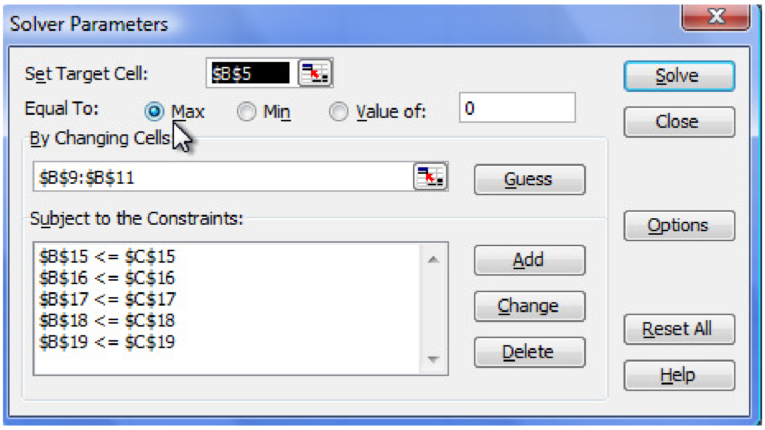
Όπου X και Y αντικαθιστώ με τις τιμές των μεταβλητών, που βρίσκονται στα κελιά B9 και B10 αντίστοιχα.




**Εικόνα 42: Πρόβλημα 5ο βήμα 3ο**

Βήμα 4

Επιλέγω στο μενού *Εργαλεία* και στις επιλογές τους *Επίλυση (Solver).* Στο παράθυρο που θα εμφανιστεί, στο *Κελί προορισμού (Set target cell)* το σύστημα θα βρει από μόνο του την συνάρτηση προς βελτιστοποίηση που βρίσκεται στο κελί B5. Επιλέγω *Max,* αφού θέλω να μεγιστοποιήσω την απόδοση των επενδύσεων. Στο σημείο που αναγράφεται *Με αλλαγή των κελιών (By changing cells)* τοποθετώ τα κελιά με τις τιμές των μεταβλητών. Αν πατήσω *Υπόθεση (Guess)* και το πρόβλημα έχει τεθεί σωστά, το σύστημα θα μαντέψει σωστά τα κελιά από το B9 μέχρι το B11.



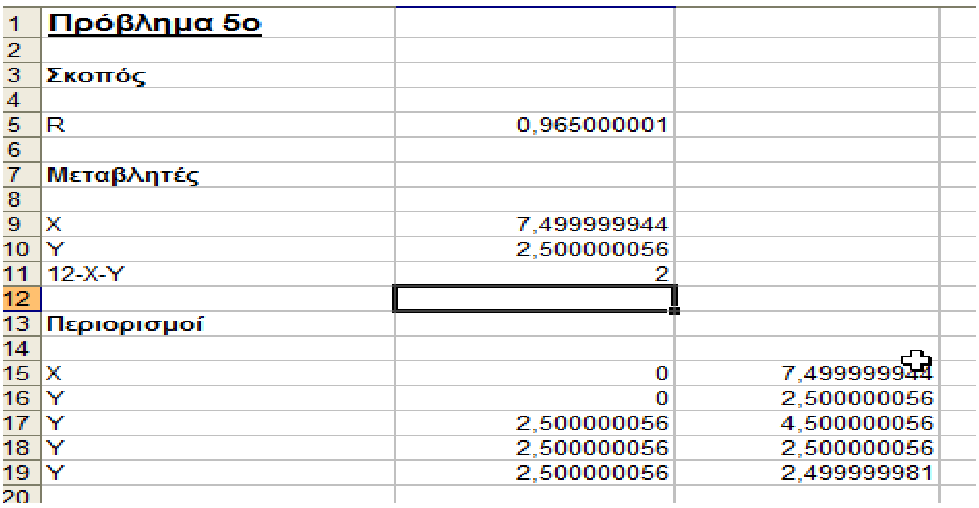

**Εικόνα 43: Πρόβλημα 5ο βήμα 4ο**

Βήμα 5

Με την επιλογή του στοιχείου *Add* εισάγουμε τους περιορισμούς. Πρώτα επιλέγουμε το κελί με το κάτω άκρο της ανισότητας, και έπειτα το κελί με το άνω άκρο.

Επιλέγουμε *Επίλυση (Solve).*

Βλέπουμε ότι το σύστημα έλυσε το πρόβλημα που του θέσαμε.



| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | Πρόβλημα 5ο | | |
| 2 | | | |
| 3 | Σκοπός | | |
| 4 | | | |
| 5 | R | 0,965000001 | |
| 6 | | | |
| 7 | Μεταβλητές | | |
| 8 | | | |
| 9 | X | 7,499999944 | |
| 10 | Y | 2,500000056 | |
| 11 | 12-X-Y | 2 | |
| 12 | | | |
| 13 | Περιορισμοί | | |
| 14 | | | |
| 15 | X | 0 | 7,499999944 |
| 16 | Y | 0 | 2,500000056 |
| 17 | Y | 2,500000056 | 4,500000056 |
| 18 | Y | 2,500000056 | 2,500000056 |
| 19 | Y | 2,500000056 | 2,499999981 |
| 20 | | | |

**Εικόνα 44: Πρόβλημα 5ο βήμα 5ο**

Αν επενδύσουμε 7.499 ευρώ στο σχέδιο Α,

2.500 ευρώ στο σχέδιο Β και

2.000 ευρώ στο σχέδιο Γ,

τότε η συνολική απόδοση των επενδύσεών μας θα είναι 965 ευρώ και θα είναι η μέγιστη.

# ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Φθάνοντας στο κλείσιμο της πτυχιακής μας εργασίας, συμπεραίνουμε πως η Επιχειρησιακή Έρευνα είναι αναπόσπαστο κομμάτι των επιχειρήσεων και των οργανισμών. Μπορεί τα τελευταία χρόνια με την ραγδαία εξέλιξη της τεχνολογίας να είναι ολοένα και πιο σημαντική, αλλά όπως ανακαλύψαμε συνδέεται και βοηθά στην λήψη αποφάσεων από πολύ παλιά.

Είδαμε πως κάθε ενέργεια της Επιχειρησιακής Έρευνας γίνεται με σκοπό να πάρουμε την καλύτερη απόφαση. Η διοίκηση λοιπόν κάθε επιχείρησης ή οργανισμού πρέπει να είναι έτοιμη και σε θέση να αντιμετωπίσει κάθε δραστηριότητα ή επίπτωση που θα προκύψει. Αυτό θα γίνει μελετώντας εμπεριστατωμένα όλα τα στοιχεία. Πρέπει η απόφαση που θα αποφασίσει να πράξει να είναι καλά μελετημένη, έχοντας συμπεριλάβει όλες τις παραμέτρους και τις επιπτώσεις, γιατί κάθε δραστηριότητα γεννά την δημιουργία καινούργιων αποφάσεων.

Η ανάγκη της απόφασης βγαίνει μέσα από την επιθυμία να επιτύχουμε μια καινούργια κατάσταση πραγμάτων. Πολλές φορές λαμβάνονται υπόψη ακόμα και κριτήρια με βάση την ηθική, την ιδεολογία, την πολιτική, την παράδοση και την θρησκεία.

Με βάσει όλα αυτά λοιπόν καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως είναι μια δραστηριότητα που δεν είναι εντελώς καθοριστική αφού οι συνθήκες είναι πολύ ρευστές και μεταβάλλονται συνεχώς. Έτσι και οι επιχειρήσεις ή οι οργανισμοί οφείλουν να διατηρούν ένα προφίλ αλλά να είναι έτοιμες για κάθε μεταβολή. Πρέπει να προσαρμόζονται ανά πάσα στιγμή και να μπορούν να ανταπεξέλθουν άμεσα. Για να το πετύχουν αυτό, έχουν ως σύμμαχο την Επιχειρησιακή μέθοδο και τον Γραμμικό Προγραμματισμό που με τις μεθόδους τους μπορούν να αντιμετωπίσουν και να προλάβουν κάθε περίσταση.

Τέλος, όσο εξελίσσονται οι θετικές επιστήμες αλλά και ο τεχνολογικός τομέας. δεν θα σταματήσει ποτέ και η εξέλιξη της Επιχειρησιακής Έρευνας και του Γραμμικού Προγραμματισμού.

# ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ


Κιόχος Πέτρος, Παπανικολάου Απόστολος, Κιόχος Απόστολος, (2003), Ανάλυση και Έλεγχος – Επιχειρησιακών Στρατηγικών, Αθήνα: Εκδόσεις Interbooks.

Μπότσαρης Ε. Χαράλαμπος, (2012), Επιχειρησιακή Έρευνα – Γραμμικός Προγραμματισμός και θεωρία παιγνίων, Αθήνα: Εκδόσεις Παπαζήση.

Τσάντας Ν. Δ. , Βασιλείου Π. – Χ. Γ. , (2000), Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη.

Τσουραμάνης Χρήστος, (2003), Σύγχρονα Κοινωνικά Προβλήματα, Αθήνα: Εκδόσεις Παπαζήση.

Υψηλάντης Π. Γ. , (2010), Επιχειρησιακή Έρευνα - Λήψη Επιχειρηματικών Αποφάσεων, Αθήνα: Εκδόσεις Έλλην.

Keith Howard, John A. Sharp, (2001), Η Επιστημονική Μελέτη, Αθήνα: Εκδόσεις Gutenberg.

## ΠΗΓΕΣ ΔΙΑΔΙΚΤΥΟΥ


Μουστάκα Ελένη, (2012), Επιχειρησιακή Έρευνα, (online), (12/02/2015): **http://nefeli.lib.teicrete.gr/browse/sdo/log/2012/MoustakaStyliani/attached-document-1338283041-916059-25984/moustaka2012.pdf**

Σωτηρόπουλος Δημήτρης , (2009), Γραμμικός Προγραμματισμός, (online), (30/05/2014): **https://openeclass.teimes.gr/modules/document/file.php/CIED189/01.pdf**

Παναγιώτου Α. Νικόλαος, (2008), Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα, (online), (06/11/2014): **http://panayiot.simor.ntua.gr/attachments/032_01MBAOR.pdf**

Κώστογλου Β. , (2010), Επιχειρησιακή Έρευνα, (online), (11/11/2014): **http://www.google.gr/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=3&ved=0CCwQFjAC&url=http%3A%2F%2Faetos.it.teithe.gr%2F~vkostogl%2Ffiles%2FEpixeirisiaki%2Fkefalaio%25201%2520vivliou%2520EE.ppt&ei=PX2xVIrSC8OsUZ7Ug6AN&usg=AFQjCNFFJYRbch_B4Wblix6M9hUBE3i6gw&bvm=bv.83339334,d.d24**

Πρελορέτζος Αλέξιος, (2006), Επιχειρησιακή Έρευνα, (online), (06/11/2014): **http://www.teihal.gr/bus/downloads/2006/Bussiness_research_notes.pdf**

Σωτηρόπουλος Δημήτρης , (2009), Βελτιστοποίηση, (online), (30/05/2014): **https://openeclass.teimes.gr/modules/document/file.php/CIED189/02.pdf**

Μαυρώτας Γιώργος, (2010), Εισαγωγή στον Γραμμικό Προγραμματισμό, (online), (06/11/2014): **http://mycourses.ntua.gr/course_description/index.php?cidReq=CHEM1023**

Γενιτσαρόπουλος Χρήστος, (2013), Επιχειρησιακή Έρευνα, (online), (06/11/2014): **http://eclass2.teilam.gr/modules/document/file.php/AMF107/%CE%94%CE%B9%CE%B4%CE%B1%CE%BA%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AD%CF%82%20%CF%83%CE%B7%CE%BC%CE%B5%CE%B9%CF%8E%CF%83%CE%B5%CE%B9%CF%82.%20%CE%95%CF%80%CE%B9%CF%87%CE%B5%CE%B9%CF%81%CE%B7%CF%83%CE%B9%CE%B1%CE%BA%CE%AE%20%CE%88%CF%81%CE%B5%CF%85%CE%BD%CE%B1.pdf**

Κώστογλου Β. , (2010), Γραμμικός Προγραμματισμός, (online), (02/06/2014): **http://www.google.gr/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=3&ved=0CCwQFjAC&url=http%3A%2F%2Faetos.it.teithe.gr%2F~vkostogl%2Ffiles%2FEpixeirisiaki%2Fkefalaio%25201%2520vivliou%2520EE.ppt&ei=PX2xVIrSC8OsUZ7Ug6AN&usg=AFQjCNFFJYRbch_B4Wblix6M9hUBE3i6gw&bvm=bv.83339334,d.d24**

Οικονόμου Καλλιόπη, (2009), Ο Γραμμικός Προγραμματισμός και η μέθοδος Simplex, (online), (01/12/2014): http://libkas.teikoz.gr/2009/ptyxiakes/OIKONOMOU_KALLIOPI.pdf

Φουλίδης Αναστάσιος, (2008), Περιγραφή, Παρουσίαση και Χρήση Λογισμικού Στήριξης Αποφάσεων, (online), (01/12/2014): https://dspace.lib.uom.gr/bitstream/2159/13411/2/FoulidisMsc2008.pdf

Stapel Elizabeth, (2008), Linear Programming, (online), (01/12/2014): http://www.purplemath.com/modules/linprog.htm

Ιωαννίδης Ευστράτιος , (2013), Γραμμικός Προγραμματισμός, (online), (10/08/2014): http://myria.math.aegean.gr/epeaek/pdfs/linear-programming.pdf

Microsoft Corporation, (2015), Ενεργοποίηση και χρήση ενός πρόσθετου, (online), (10/2015):

https://support.office.com/el-gr/article/%CE%93%CF%81%CE%AE%CE%B3%CE%BF%CF%81%CE%BF-%CE%BE%CE%B5%CE%BA%CE%AF%CE%BD%CE%B7%CE%BC%CE%B1-%CE%95%CE%BD%CE%B5%CF%81%CE%B3%CE%BF%CF%80%CE%BF%CE%AF%CE%B7%CF%83%CE%B7-%CE%BA%CE%B1%CE%B9-%CF%87%CF%81%CE%AE%CF%83%CE%B7-%CE%B5%CE%BD%CF%8C%CF%82-

%CF%80%CF%81%CF%8C%CF%83%CE%B8%CE%B5%CF%84%CE%BF%CF%85-2df59054-a46f-4fe4-bcb5-92ea461c315f

Κολέτσος, (2015), Γραμμικός Προγραμματισμός Μέθοδος Simplex, (online), (10/10/2015): http://www.math.ntua.gr/~coletsos/Documents/method%20Simplex.pdf

Δρ. Β.Χ. Μούσας (2007), Τμήμα Πολιτικών Έργων Υποδομής - Εφαρμογές Βελτιστοποίησης και Επιχειρησιακής Έρευνας σε Προβλήματα Μηχανικών (online), (2007):**http://users.teiath.gr/vmouss/ebooks/optimee/sections/section13b_ParadigmataSimplex.html**

Εισαγωγή και κάποια άλλα βασικά θέματα για το γραμμικό προγραμματισμό (online), (14 Νοε 2009) : https://www.youtube.com/watch?v=dg9xl7NpRyk