

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΔΥΤΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Τ.Ε.

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ



ΦΟΙΤΗΤΡΙΑ: Μαμασούλα Κωνσταντίνα

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Στέφανος Τσινόπουλος

ΠΑΤΡΑ 2019

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα εργασία εκπονήθηκε στο Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Δυτικής Ελλάδας, στο τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών. Θα μελετήσουμε την ευστάθεια της κατασκευής, δηλαδή την ικανότητά της να φέρει ένα δεδομένο φορτίο χωρίς να αστοχεί ή να υφίσταται κάποια απότομη μεταβολή στη δομή της.

Η μελέτη θα αφορά υποστυλώματα και συγκεκριμένα την ανάλυση και το σχεδιασμό ευθύγραμμων ράβδων τα οποία φέρουν αξονικά θλιπτικά φορτία, με διάφορους τρόπους στήριξης.

Σκοπός είναι η χρήση της σαν εγχειρίδιο για την κατανόηση του φαινομένου του λυγισμού και η ικανότητα επίλυσης ανάλογων προβλημάτων διαβάζοντάς το, που θα παρουσιάσουμε παρακάτω. Η εργασία αυτή πραγματοποιήθηκε με τη βοήθεια του επιβλέποντα καθηγητή Στέφανου Τσινόπουλου.

Μαμασούλα Κωνσταντίνα
Μάιος 2019

Υπεύθυνη Δήλωση Φοιτητή: Ο κάτωθι υπογεγραμμένος Φοιτητής έχω επίγνωση των συνεπειών του Νόμου περί λογοκλοπής και δηλώνω υπεύθυνα ότι είμαι συγγραφέας αυτής της Πτυχιακής Εργασίας, έχω δε αναφέρει στην Βιβλιογραφία μου όλες τις πηγές τις οποίες χρησιμοποίησα και έλαβα ιδέες ή δεδομένα. Δηλώνω επίσης ότι, οποιοδήποτε στοιχείο ή κείμενο το οποίο έχω ενσωματώσει στην εργασία μου προερχόμενο από Βιβλία ή άλλες εργασίες ή το διαδίκτυο, γραμμένο ακριβώς ή παραφρασμένο, το έχω πλήρως αναγνωρίσει ως πνευματικό έργο άλλου συγγραφέα και έχω αναφέρει ανελλιπώς το όνομά του και την πηγή προέλευσης.

Ο Φοιτητής

.....

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα Πτυχιακή εργασία γίνεται εισαγωγή στην σύνθετη μηχανική καταπόνηση του λυγισμού. Είναι ένα σύνηθες φαινόμενο που συναντάμε στην καθημερινότητα. Πιο συγκεκριμένα στις περισσότερες κατασκευές όπως σπίτια, γέφυρες και οποιαδήποτε κατασκευή φέρει υποστυλώματα, δοκούς και δομικά στοιχεία που αποτελούνται λεπτές μακριές μεταλλικές ράβδους.

Η εργασία αναπτύσσεται σε τρία κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο ορίζεται και γίνεται περιγραφή του φαινομένου του λυγισμού. Αναφέρονται τα είδη του λυγισμού που συνοδεύονται με εικόνες για την κάθε περίπτωση. Επίσης βλέπουμε τον τύπο του κρίσιμου φορτίου του λυγισμού σύμφωνα με τους κανόνες της αντοχής υλικών και από ποιους παράγοντες εξαρτάται. Παρουσιάζονται εικόνες από πραγματικά φαινόμενα λυγισμού που υπέστησαν κατασκευές, επεξηγώντας από κάτω το είδος λυγισμού που βλέπουμε και για ποιο λόγο παρουσιάστηκε το φαινόμενο. Επίσης παρουσιάζονται εικόνες από πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων, βλέποντας στιγμιότυπα της κατασκευής έχοντας την αρχική γεωμετρία και στην συνέχεια την ανάλυση των δυνάμεων κατά την φόρτιση και το τελικό σχήμα του φορέα που υπέστη λυγισμό.

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται κατανόηση του λυγισμού με παράδειγμα ενός συστήματος ράβδων, σύμφωνα με τους νόμους της Μηχανικής και λύνοντας το σε κατάσταση ισορροπίας. Με αυτόν τον τρόπο βρίσκουμε τη μέγιστη τιμή του φορτίου που μπορεί να φέρει το σύστημα ώστε να είναι ευσταθές, καταλήγοντας σε έναν τύπο του κρίσιμου φορτίου. Στη συνέχεια προσδιορίζουμε την τιμή του κρίσιμου φορτίου για μία διαρθρωτή ράβδο. Παίρνοντας τους νόμους της μηχανικής, τον τύπο της καμπυλότητας και λύνοντας την διαφορική εξίσωση που προκύπτει, διατυπώνουμε τον τύπο του κρίσιμου φορτίου του Ελβετού μαθηματικού Leonhard Euler για διαρθρωτά υποστυλώματα. Μετά προσδιορίζουμε το κρίσιμο φορτίο σε σχέση με το μήκος που επηρεάζεται από την καταπόνηση για διαφορετικούς τρόπους στήριξης (ένα άκρο πακτωμένο και ένα ελεύθερο, δύο άκρα πακτωμένα, ένα άκρο πακτωμένο και ένα διαρθρωτό) κατ' επέκταση του τύπου Euler. Συνοψίζοντας στο τέλος τους τρόπους στήριξης και το κρίσιμο φορτίο σε σχέση με το μήκος.

Στο τρίτο κεφάλαιο λύνονται παραδείγματα λυγισμού. Αρχικά υπολογίζουμε για ένα διαρθρωτό ξύλινο υποστύλωμα που υπόκειται σε δύο φορτία την κατάλληλη διατομή για το καθένα, ώστε μπορέσει να τα φέρει με ασφάλεια, χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler. Στη συνέχεια υπολογίζουμε το μέγιστο αστήρικτο μήκος που μπορεί να έχει μία χαλύβδινη δοκός πρότυπης διατομής που υπόκειται σε κεντρικό φορτίο. Αφού ανατρέξουμε στο παράρτημα Α και βρούμε τα χαρακτηριστικά που χρειαζόμαστε, χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler και στη συνέχεια τον λόγο λυγηρότητας βρίσκουμε το μήκος. Στο τελευταίο παράδειγμα έχουμε επίσης μία χαλύβδινη δοκό πρότυπης διατομής η οποία υπόκειται σε έκκεντρο φορτίο και υπολογίζουμε το μέγιστο φορτίο που μπορεί να φέρει. Αφού ανατρέξουμε ομοίως στο παράρτημα Α και βρούμε τα χαρακτηριστικά που χρειαζόμαστε, βρίσκουμε τον λόγο λυγηρότητας και στη συνέχεια μπορούμε να βρούμε το κρίσιμο φορτίο. Εν τέλει χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της επιτρεπόμενης τάσης που ισχύει για έκκεντρη φόρτιση και βρίσκουμε το μέγιστο επιτρεπόμενο φορτίο.

Στο τέλος παραθέεται Παράρτημα με πρότυπες Αμερικάνικες διατομές δοκών που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση των δύο τελευταίων προβλημάτων λυγισμού.

Στόχος είναι η κατανόηση του φαινομένου του λυγισμού τόσο θεωρητικά όσο και πρακτικά, αποδεικνύοντας πως καταλήγουμε στον τύπο ευρέσεως του κρίσιμου φορτίου και παρουσιάζοντας παραδείγματα ώστε να γίνει όσο το δυνατόν καλύτερη κατανόηση και δυνατή η ικανότητα επίλυσης ανάλογων προβλημάτων.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. Γενικά	1
2. Περιγραφή λυγισμού	1
3. Είδη λυγισμού	3
3.1 Τοπικός λυγισμός.....	3
3.2 Καθολικός λυγισμός.....	3
3.2.1 Καμπτικός λυγισμός	4
3.2.2 Στρεπτικός λυγισμός	5
3.2.3 Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός	5
3.3 Πλευρικός λυγισμός	6
4. Αιτίες εμφάνισης φαινομένου λυγισμού	6
5. Κρίσιμο φορτίο λυγισμού P_{cr}	7
6. Παραδείγματα λυγισμού σε εικόνες	8
6.1 Πλευρικός Στρεπτικός Λυγισμός	8
6.2 Πλευρικός θερμικός λυγισμός	9
6.3 Τοπικός λυγισμός γέφυρας	10
6.4 Παράδειγμα Τοπικού Λυγισμού με προσομοίωση Πεπερασμένων Στοιχείων.....	10

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΛΥΓΙΣΜΟ ΚΑΙ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΚΡΙΣΙΜΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ ΚΑΙ ΤΥΠΟΥ EULER

1.1 Γενικά	15
1.2 Τύπος Euler για διαρθρωτά υποστυλώματα	18
1.3 Παραδείγματα στοιχειωδών προβλημάτων λυγισμού κατ' επέκταση τύπου Euler.....	25

2. ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΛΥΓΙΣΜΟΥ

2.1 Υπολογισμός διατομής ξύλινου διαρθρωτού υποστυλώματος.....	31
2.2 Προσδιορισμός μέγιστου αστήρικτου μήκους χαλύβδινης δοκού πρότυπης διατομής Υπό κεντρικό φορτίο.....	33
2.3 Προσδιορισμός μέγιστου επιτρεπόμενου φορτίου χαλύβδινου υποστυλώματος πρότυπης διατομής Υπό Έκκεντρο φορτίο.....	36

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Πρότυπες Διατομές W	44
Πρότυπες Διατομές S	46
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	48.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. ΓΕΝΙΚΑ

Η Αντοχή Υλικών όπως ξέρουμε, ασχολείται με το πρόβλημα της ισορροπίας ανάμεσα στις εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται σε μία κατασκευή ή έναν μηχανισμό και τις εσωτερικές δυνάμεις αντίδρασης που αναπτύσσονται σ' αυτόν. Δεν αρκείται όμως μόνο σε αυτό, αλλά μελετά και τις συνθήκες ώστε η ισορροπία αυτή να παραμείνει ευσταθής. Σκοπός είναι η μελέτη των διαφόρων υλικών, καθώς το καθένα έχει τα δικά του χαρακτηριστικά, υπό συνθήκες διάφορων μηχανικών καταπονήσεων, ώστε να προσδιοριστούν τα επιτρεπτά όρια φόρτισής τους και οι καταλληλότερες διατομές και διαστάσεις που θα παρέχουν ασφάλεια και λειτουργικότητα. Ο προσδιορισμός επίσης των χαρακτηριστικών φορτίων στις διάφορες καταπονήσεις που υπόκεινται.

Στη θλιπτική αξονική φόρτιση μιας ράβδου με προοδευτικά αυξανόμενο φορτίο γνωρίζουμε πως όταν η ορθή τάση θλίψης περάσει το όριο αναλογίας, θα φτάσει στο όριο διαρροής και θα έχουμε εν τέλει την αστοχία αυτής όταν η τάση λάβει την τιμή του ορίου θραύσης. Αυτό θα συμβεί αν το μήκος της δεν είναι πολύ μεγαλύτερο από τη διατομή της.

Στην περίπτωση που το μήκος της ράβδου είναι πολύ μεγαλύτερο από τις διαστάσεις της διατομής της, θα έχουμε το φαινόμενο του **λυγισμού**.

Εξαιτίας του φαινομένου αυτού διαπιστώνουμε ότι μακρά και λεπτά στοιχεία των κατασκευών, καταστρέφονται ή εξαρθώνονται όταν υποβληθούν σε αξονικό θλιπτικό φορτίο πέρα από μια συγκεκριμένη τιμή. Δηλαδή τα θλιβόμενα μακρά και λεπτά μέλη μιας κατασκευής προκύπτει να παρουσιάζουν μια αντοχή μικρότερη από την αντοχή σε θλίψη. Επομένως πρέπει να λαμβάνουμε σοβαρά υπ' όψιν το γεγονός αυτό, όταν σχεδιάζουμε κατασκευές στις οποίες υπάρχουν μακρά και λεπτά στοιχεία.

2. ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΛΥΓΙΣΜΟΥ

Ο λυγισμός στην επιστήμη αναφέρεται σαν μια μαθηματική αστάθεια που οδηγεί σε μια μορφή δομικής αστοχίας. Όταν ένα δομικό μέλος υπόκειται σε θλιπτικό φορτίο, αν περάσει το όριο θραύσης θα έχουμε την αστοχία του στην περίπτωση που δεν είναι πολύ μεγαλύτερο από τη διατομή του. Σε αντίθετη περίπτωση, που έχουμε δηλαδή μακρά στοιχεία όπως ένα υποστύλωμα, τότε θα έχουμε λυγισμό. Το μέλος θα παραμορφωθεί και μπορεί να χάσει την ικανότητα του να φέρει πλέον φορτία. Αν δεν είναι ολική η καταστροφή θα συνεχίσει να φέρει το φορτίο από το οποίο προκλήθηκε ο λυγισμός. Αν είναι μέλος ενός μεγαλύτερου φορέα όπως ένα κτίριο, κάθε φορτίο που δέχεται ανακατανέμεται εντός της κατασκευής.

Ο λυγισμός λοιπόν είναι θεωρητικά ένα σύνολο διακλαδωτών εξισώσεων στατικής ισορροπίας.

Λυγισμός ονομάζεται το φαινόμενο κατά το οποίο μια ελαστική ράβδος με

ευθύγραμμο άξονα, που υποβάλλεται σε κεντρική θλίψη με συνεχώς αυξανόμενη τιμή φορτίου, μεταπίπτει, μετά από μια οριακή τιμή φορτίου, σε κατάσταση ασταθούς ισορροπίας. Πρόκειται δηλαδή για μια οριακή κατάσταση που από ευσταθής γίνεται ασταθής.

- Η ισορροπία χαρακτηρίζεται ως *ασταθής* διότι στην παραμικρή διαταραχή (επίδραση φορτίου κατά την εγκάρσια κατεύθυνση) επέρχεται κατάρρευση.

- Η διαταραχή στην πράξη δεν προκαλείται με πρόθεση αλλά αυθόρμητα λόγω μικροατελειών που υφίστανται στην κατασκευή και λόγω της όχι απόλυτα αξονικής φόρτισης.

- Η μορφή της παραμορφωμένης ράβδου είναι παρόμοια με αυτή μιας δοκού που δέχεται καμπτικό φορτίο στο μέσο της.

- Γενικά, το φαινόμενο του λυγισμού μίας ράβδου επηρεάζεται από :

(α) τις μηχανικές ιδιότητες του υλικού της,

(β) τη γεωμετρία της διατομής της και

(γ) τον τρόπο στήριξης των άκρων της.

Η κλασική θεωρία λυγισμού θεωρεί ότι οι επιδράσεις των προ-λυγισμού παραμορφώσεων στις μετακινήσεις και τη γεωμετρική δυσκαμψία μπορούν να αμεληθούν, οπότε προκύπτουν και τα γραμμικά φορτία λυγισμού για ελαστικά τόξα. Αυτό μπορεί μεν να ισχύει για υψηλά τόξα όπου οι προ-λυγισμού παραμορφώσεις είναι πολύ μικρές σε σχέση με το ύψος τους, όμως κάτι τέτοιο δεν ισχύει και για ρηχά τόξα. Συνεπώς, αυτές οι παραμορφώσεις πρέπει να ληφθούν υπόψη στα ρηχά 5 τόξα. Επιπλέον μια γραμμική ανάλυση λυγισμού δεν μπορεί να δώσει πληροφορίες για την μεταλυγισμική συμπεριφορά των τόξων.

Προβλήματα ευστάθειας συναντά κανείς σε όλους σχεδόν τους τομείς της φυσικής. Τέτοια προβλήματα είναι η π.χ. η ευστάθεια του αεροπλάνου, η ευστάθεια της ταλάντωσης ενός μηχανικού συστήματος, ο παλμός των πτερυγίων κάτω από την επίδραση του αέρα, ο λυγισμός ενός λεπτού δοχείου ή δακτυλίου κάτω από εξωτερική πίεση, ο λυγισμός μια λεπτής ράβδου κάτω από θλιπτικές δυνάμεις, η θερμοδυναμική ευστάθεια αερίων σε υψηλές θερμοκρασίες κ.α. Στην περίπτωση της ράβδου, το φαινόμενο της ευστάθειας της ισορροπίας της το ονομάζουμε λυγισμό. Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με ραβδωτούς φορείς.

- Τη στιγμή εμφάνισης του φαινομένου του λυγισμού, η κατασκευή αντέχει μικρότερη τιμή φορτίου από αυτήν που άντεχε μέχρι την έναρξη του φαινομένου.

- Η μειωμένη αντοχή οφείλεται στην αλλαγή της τοπολογίας, δηλαδή στο γεγονός ότι η ράβδος έχει ξεφύγει από την ευθύγραμμη κατάσταση

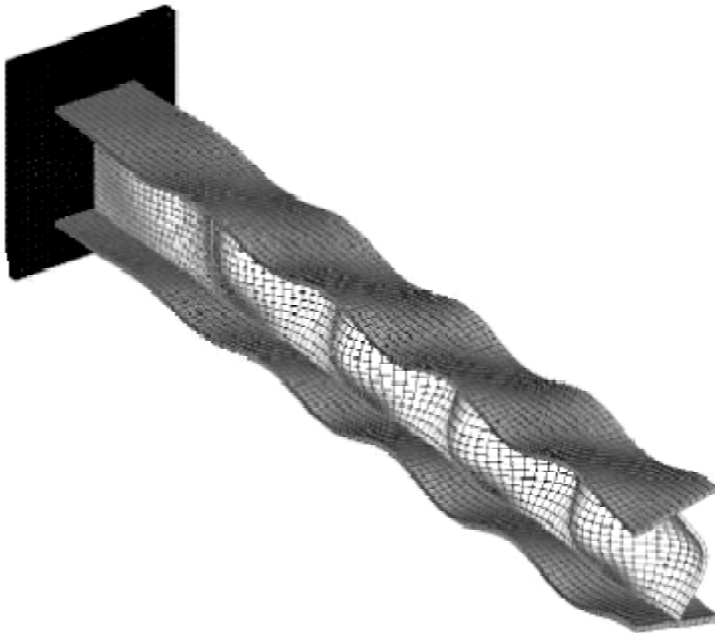
- Συνεπώς το θλιπτικό φορτίο πάνω στις εγκάρσιες διατομές ασκείται πλέον έκκεντρα με αποτέλεσμα στη ράβδο να αναπτύσσεται και ροπή κάμψης η οποία αυξάνει περαιτέρω την εκκεντρότητα, που με την σειρά της επιδρά στη ροπή κάμψης . Οπότε γρήγορα δημιουργείται μεγάλη καμπυλότητα, το υλικό αναπτύσσει πλαστική παραμόρφωση και τέλος αστοχεί.

3. ΕΙΔΗ ΛΥΓΙΣΜΟΥ

Είδη λυγισμού που μπορεί να έχουμε είναι:

3.1 Τοπικός λυγισμός

Υπάρχει ο κίνδυνος επιμέρους τμήματα ενός φορέα να λυγίσουν τοπικά. Αυτό έχει ως συνέπεια την εμφάνιση ανομοιόμορφων τάσεων μειώνοντας την αντοχή του μέλους του φορέα επιφέροντας συχνά την αστοχία του.



Εικόνα 1: Τοπικός λυγισμός
Βιβλιογραφία(5)

3.2 Καθολικός λυγισμός

Χαρακτηρίζεται από καθολική αστάθεια των μελών που υποβιβάζει την αντοχή τους. Παρατηρούνται παραμορφώσεις γύρω από τους κύριους άξονες και στροφές, ενώ ο άξονας παραμένει αμετάβλητος. Συναντάται σε δοκούς μεγάλου μήκους χωρίς ενδιάμεσες στηρίξεις.

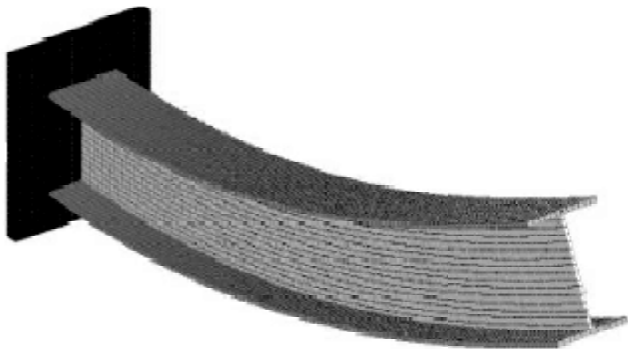


Εικόνα 2: Καθολικός λυγισμός,
Βιβλιογραφία(4)

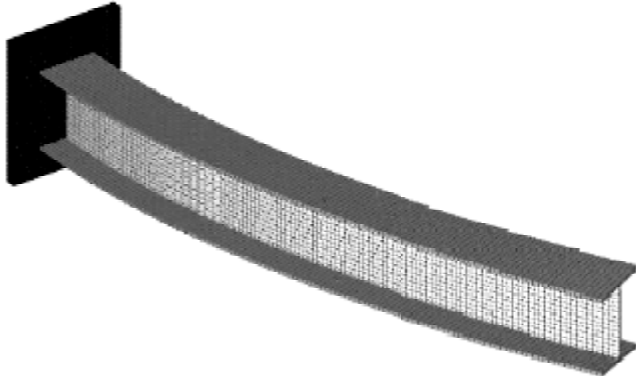
Ο καθολικός λυγισμός διακρίνεται σε επιμέρους μορφές βάσει της θέσης της διατομής στην παραμορφωμένη κατάσταση.

3.2.1 Καμπτικός λυγισμός

Οι παραμορφώσεις των διατομών παρατηρούνται περί τους κύριους άξονες, τον ισχυρό είτε τον ασθενή άξονα.



Εικόνα 3: Καμπτικός λυγισμός περί τον κύριο άξονα
Βιβλιογραφία(5)



Εικόνα 4: Καμπτικός λυγισμός περί τον ασθενή άξονα
Βιβλιογραφία(5)

3.2.2 Στρεπτικός λυγισμός

Οι παραμορφώσεις των διατομών είναι σε στροφές χωρίς να παρατηρούνται μετατοπίσεις.

3.2.3 Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός

Όπως καταλαβαίνουμε είναι ο συνδυασμός του καμπτικού και στρεπτικού λυγισμού και η διατομή έχει παραμορφωθεί περί τους κύριους άξονες αλλά και γύρω από αυτούς σε στροφές.

3.3 Πλευρικός λυγισμός

Πλευρικό λυγισμό έχουμε όταν μετά τον λυγισμό οι διατομές υπόκεινται σε στροφή περί το κέντρο διάτμησης και ταυτόχρονα μετατοπίζονται πλευρικά.



Εικόνα 5: Πλευρικός λυγισμός
Βιβλιογραφία(4)

4. ΑΙΤΙΕΣ ΕΜΦΑΝΙΣΗΣ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ ΛΥΓΙΣΜΟΥ

- Η από κατασκευής μη απόλυτη ευθυγραμμία της ράβδου.
- Η από κατασκευής αδυναμία μετάδοσης του θλιπτικού φορτίου αξονικά, δηλαδή κατά τον ιδεατό άξονα της ράβδου.
- Η ανομοιόμορφη κατανομή των τάσεων στις διάφορες εγκάρσιες διατομές.
- Η πιθανή ελαττωματική κατασκευή του υλικού της ράβδου.
- Οι διάφορες ατέλειες στην κατασκευή της ράβδου.
- Διάφορα άλλα απρόβλεπτα εξωτερικά σημεία πλευρικά φορτία που μπορούν να επενεργήσουν κάθετα προς τον άξονα.
- Οι ιδιότητες του υλικού

5. ΚΡΙΣΙΜΟ ΦΟΡΤΙΟ ΛΥΓΙΣΜΟΥ P_{cr}

Ονομάζεται το θλιπτικό φορτίο κατά το οποίο έχουμε τον λυγισμό, που βάζει το διαχωριστικό όριο μεταξύ μιας ευσταθούς ισορροπίας στην κατάσταση της απλής θλίψης και της ασταθούς ισορροπίας στην κατάσταση του λυγισμού.

Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού (P_{cr}) εξαρτάται από:

- ∅ Τις ελαστικές ιδιότητες του υλικού.
- ∅ Το σχήμα της διατομής.
- ∅ Τον τρόπο στήριξης των άκρων της καταπονούμενης ράβδου.

Το κρίσιμο φορτίο για τον λυγισμό είναι το φορτίο θραύσης για τη θλίψη. Αν αποδεχούμε ομοιόμορφη κατανομή των τάσεων στην καταπονούμενη σε λυγισμό ράβδο, τότε προκύπτει

η κρίσιμη τάση λυγισμού: $\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{F}$

6. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΣΕ ΕΙΚΟΝΕΣ

6.1 Πλευρικός Στρεπτικός Λυγισμός



Εικόνα 6: Πλευρικός στρεπτικός λυγισμός
Βιβλιογραφία(6)

Ο πλευρικός στρεπτικός λυγισμός συμβαίνει όταν ένα εφαρμοζόμενο φορτίο προκαλεί τόσο πλευρική μετατόπιση όσο και στρέψη ενός μέλους. Αυτή η αστοχία συνήθως παρατηρείται όταν ένα φορτίο εφαρμόζεται σε μια μη-περιορισμένη, χαλύβδινη δέσμη I, με τις δύο φλάντζες να δρουν διαφορετικά, μία υπό συμπίεση και την άλλη τάση. Ο όρος «χωρίς περιορισμούς» στην περίπτωση αυτή απλά σημαίνει ότι η φλάντζα υπό συμπίεση είναι ελεύθερη να μετακινείται πλευρικά και επίσης να περιστρέφεται. Ο λυγισμός θα παρατηρηθεί στη φλάντζα συμπίεσης μίας απλά υποστηριζόμενης δοκού.

6.2 Πλευρικός θερμικός λυγισμός



Εικόνα 7: Πλευρικός θερμικός λυγισμός
Βιβλιογραφία(6)

Ο πλευρικός θερμικός λυγισμός είναι μια κοινή αιτία εκτροχιασμών σε διαδρομές συνεχούς συγκολλήσεως σιδηροτροχιάς (CWR). Δεδομένου ότι οι διαδρομές CWR περιορίζονται από την κίνηση κατά μήκος της κατεύθυνσης της διαδρομής, οι ακραίες αλλαγές θερμοκρασίας μπορούν να προκαλέσουν συμπίεση στις ράγες που μπορούν να οδηγήσουν σε λυγισμό τροχιάς.

Σύμφωνα με την Ομοσπονδιακή Υπηρεσία Σιδηροδρόμων (FRA, 2015), τα τελευταία τρία χρόνια σημειώθηκαν 5.977 σιδηροδρομικά ατυχήματα εντός των Ηνωμένων Πολιτειών. Από αυτά, περίπου το 1% (58) αναφέρεται ότι προκαλείται από λυγισμό σιδηροτροχιάς. Σε μια κατάσταση λυγισμού, το μήκος της επισκευής και της αναπροσαρμογής μπορεί να είναι αρκετά μεγάλο. Ως εκ τούτου, για να μειωθεί το κόστος της επισκευής και να εξασφαλιστεί η ασφάλεια, υπάρχει μια σαφής ανάγκη να αναπτυχθούν τεχνικές για την αποφυγή του θερμικού λυγισμού στις σιδηροτροχιάς. Παρά τη μεγάλη έρευνα που διεξάγεται σε αυτόν τον τομέα, η πρόβλεψη του θερμικού λυγισμού των σιδηροδρόμων παραμένει πολύπλοκη εξαιτίας της μη γραμμικής φύσης του φαινομένου και του μεγάλου αριθμού παραμέτρων που επηρεάζουν το πρόβλημα.

6.3 Τοπικός λυγισμός γέφυρας



Εικόνα 8: Τοπικός λυγισμός
Βιβλιογραφία(6)

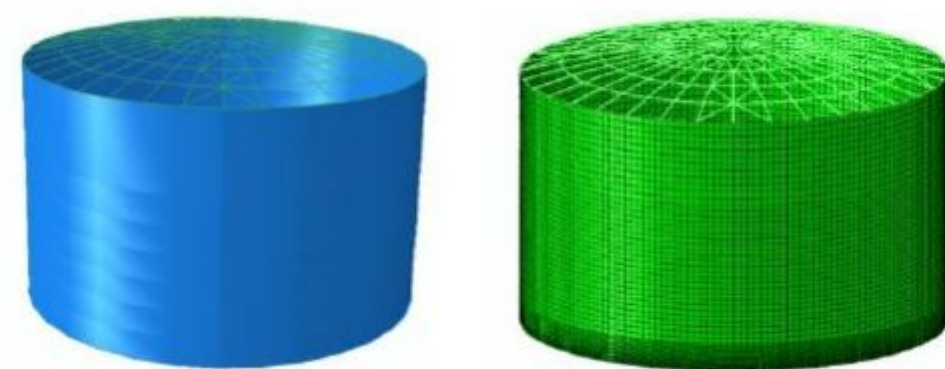
Πρόκειται για μία παλαιά γέφυρα στην Πολιτεία του Αρκάνσας στην Αμερική. Η γέφυρα έχει επιτρεπόμενο όριο βάρους 10 τόνων. Το λεωφορείο της φωτογραφίας που την διασχίζει ζυγίζει 20 τόνους, με αποτέλεσμα τον τοπικό λυγισμό της γέφυρας με κίνδυνο αστοχίας και πτώση του λεωφορείου στο ποτάμι. Μετά το περιστατικό τέθηκε εκτός κυκλοφορίας ώστε να ελεγχθεί από τις αρμόδιες αρχές πρώτου δοθεί σε κυκλοφορία και πάλι.

6.4 Παράδειγμα Τοπικού Λυγισμού με προσομοίωση Πεπερασμένων Στοιχείων

Βλέπουμε μια ατμοσφαιρική δεξαμενή αποθήκευσης υγρών. Αυτές οι δεξαμενές είναι τρωτές σε σεισμικές φορτίσεις. Όταν είναι γεμάτες με υγρά, καθώς αυτά κινούνται κατά τη σεισμική φόρτιση δημιουργούνται στο εσωτερικό τους μεγάλες δυνάμεις και αναπτύσσονται μεγάλες αξονικές τάσεις (εφελκυστικές και θλιπτικές) από ροπές ανατροπής εξαιτίας του σεισμού.

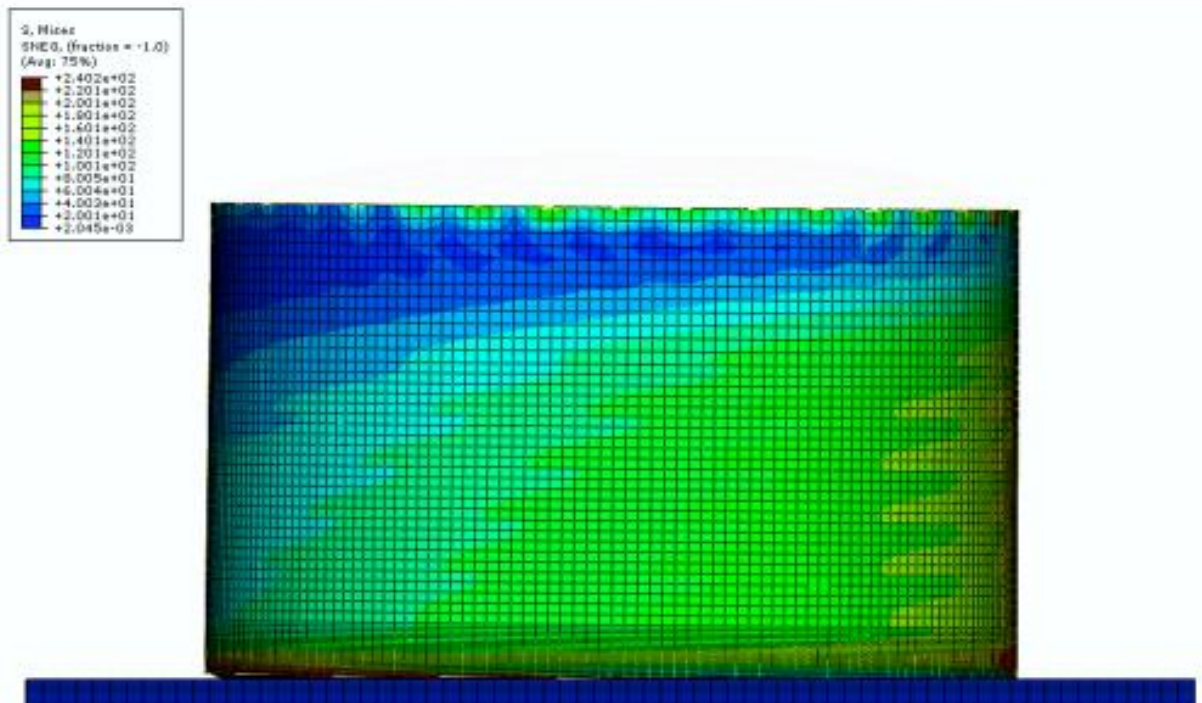
Είναι σημαντική η μελέτη αυτών των δεξαμενών καθώς η επίδραση του σεισμού μπορεί να προκαλέσει σοβαρές ζημιές στην ίδια αλλά και στην εγκατάσταση που την περιβάλλει, ακόμα και σε κοντινές αστικές περιοχές

- Αρχικά βλέπουμε τη γεωμετρία της δεξαμενής



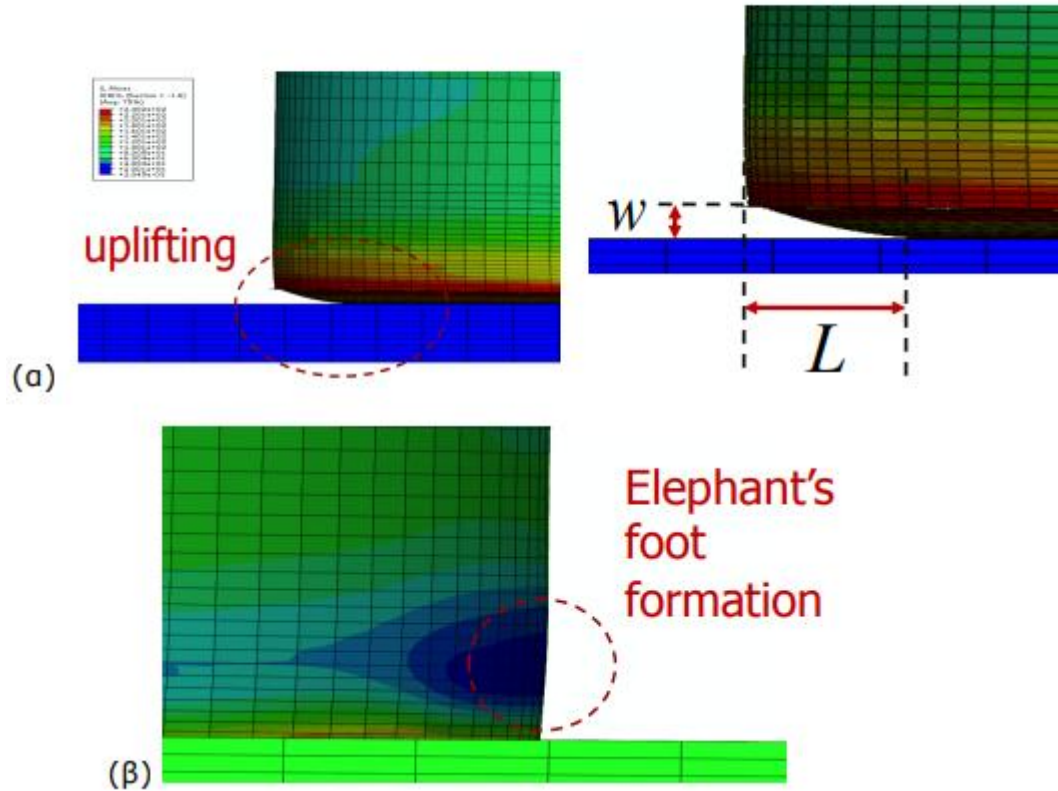
Εικόνα 9: Ατμοσφαιρική δεξαμενή
Βιβλιογραφία(6)

- Στη συνέχεια βλέπουμε την ανάλυση των πεπερασμένων στοιχείων της μη-αγκυρωμένης δεξαμενής υπό οριζόντια φόρτιση



Εικόνα 10: Ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία φόρτισης δεξαμενής
Βιβλιογραφία(6)

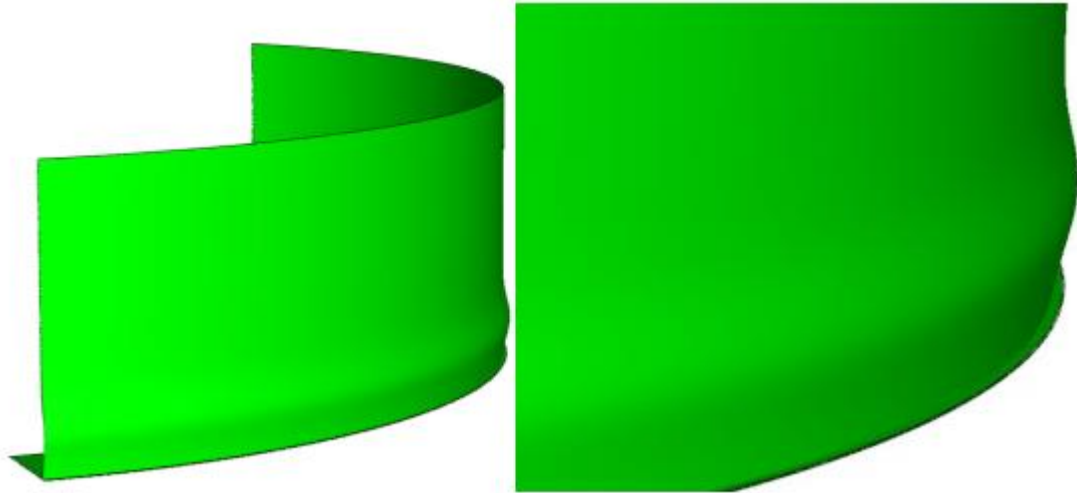
- Βλέπουμε μέσω της ανάλυσης των πεπερασμένων τις φορτίσεις που προκάλεσαν την ανύψωση της βάσης της δεξαμενής(α) και τον τοπικό λυγισμό κοντά στην βάση της(β) (elephant's foot)



Εικόνα 11: Ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων ατμοσφαιρικής δεξαμενής υπό οριζόντια φόρτιση, (α) ανύψωση της βάσης, (β) τοπικός λυγισμός κοντά στη βάση (elephant's foot)

Βιβλιογραφία(6)

- Με την βοήθεια των πεπερασμένων στοιχείων, βλέπουμε τον τοπικό λυγισμό που προκλήθηκε κοντά στη βάση

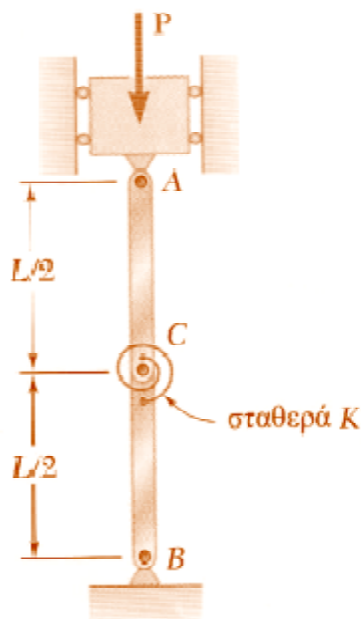


Εικόνα 12: Προσομοίωση δεξαμενής με πεπερασμένα στοιχεία
Βιβλιογραφία(6)

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΛΥΓΙΣΜΟ ΚΑΙ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΚΡΙΣΙΜΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ ΚΑΙ ΤΥΠΟΥ EULER

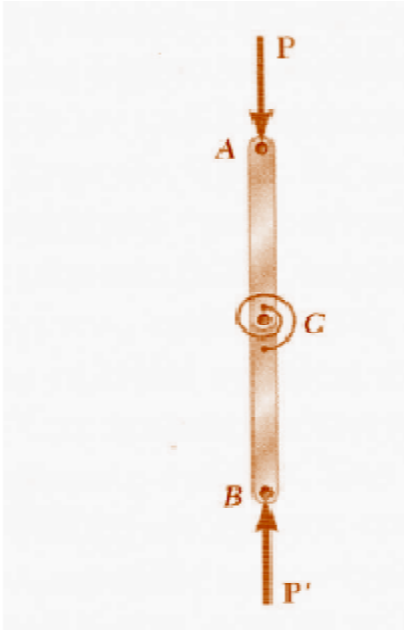
1.1 ΓΕΝΙΚΑ

Για να κατανοήσουμε το πρόβλημα του λυγισμού θα πάρουμε ένα απλουστευμένο μοντέλο 2 άκαμπτων ράβδων AB και BC για να δώσουμε μία γενική εικόνα του φαινομένου. Αυτές συνδέονται με έναν πείρο στο σημείο C και ένα στρεπτικό ελατήριο σταθεράς K.



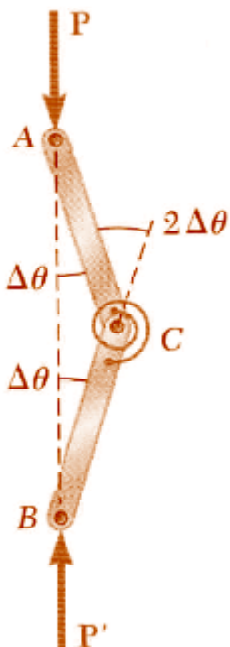
Σχήμα 1: Σύστημα ράβδων με ελατήριο
Βιβλιογραφία(1)

Αν υποθέσουμε ότι οι δύο ράβδοι και οι δυνάμεις **P** και **P'** είναι τέλεια ευθυγραμμισμένες, τότε το σύστημά μας θα παραμείνει στη θέση ισορροπίας αν δεν διαταράσσεται από άλλους παράγοντες.



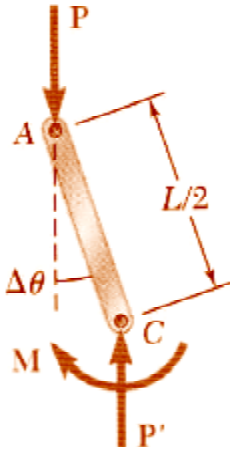
Σχήμα 2: Σύστημα ράβδων υπό φόρτιση
Βιβλιογραφία(1)

Στη συνέχεια θα μετακινήσουμε το σημείο C προς τα δεξιά, με αποτέλεσμα οι ράβδοι να σχηματίζουν με την αρχική τους κατακόρυφη θέση μία γωνία $\Delta\theta$.



Σχήμα 3: Σύστημα ράβδων σε θέση λυγισμού
Βιβλιογραφία(1)

Για να είναι το σύστημά μας ευσταθές πρέπει να επανέλθει στην αρχική θέση ισορροπίας. Τα ζεύγη των δυνάμεων που ασκούνται στο σύστημα είναι οι P και P' και το ζεύγος M από το ελατήριο που τείνει να το επαναφέρει στην αρχική κατάσταση.



Σχήμα 4: Βιβλιογραφία(1)

Οι ροπές που δρουν από το ζεύγος P και P' είναι $P \cdot \frac{L}{2} \cdot \sin \Delta\theta$ και η P θα είναι P_{cr} .

Και από το ζεύγος M του ελατηρίου είναι $K \cdot 2\Delta\theta$

Για να έχουμε κατάσταση ισορροπίας πρέπει:

$$P_{cr} \cdot \frac{L}{2} \cdot \sin \Delta\theta = K \cdot 2\Delta\theta$$

Και επειδή $\sin \Delta\theta \approx \Delta\theta$

$$P_{cr} = \frac{4 \cdot K}{L}$$

Οι τιμές λοιπόν του φορτίου πρέπει να είναι μικρότερες από το κρίσιμο φορτίο

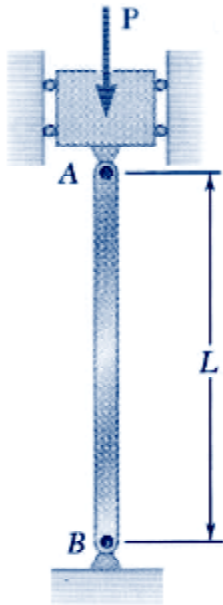
$$P < P_{cr}$$

Σε αντίθετη περίπτωση, δηλαδή που οι τιμές είναι μεγαλύτερες του κρίσιμου φορτίου $P > P_{cr}$, το σύστημα θα είναι ασταθές.

1.2 ΤΥΠΟΣ EULER ΓΙΑ ΔΙΑΡΘΡΩΤΑ ΥΠΟΣΤΗΛΩΜΑΤΑ

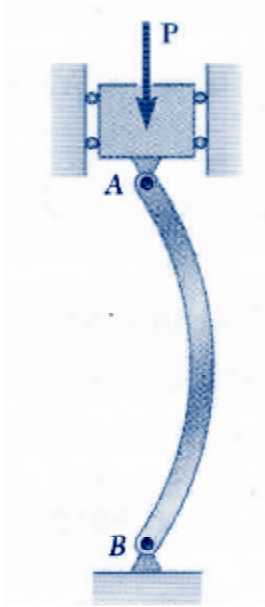
Θα αποδείξουμε τον τύπο του Euler για την εύρεση του κρίσιμου φορτίου P_{cr} για διαρθρωτά υποστυλώματα.

Έστω ότι έχουμε ένα διαρθρωτό υποστύλωμα AB



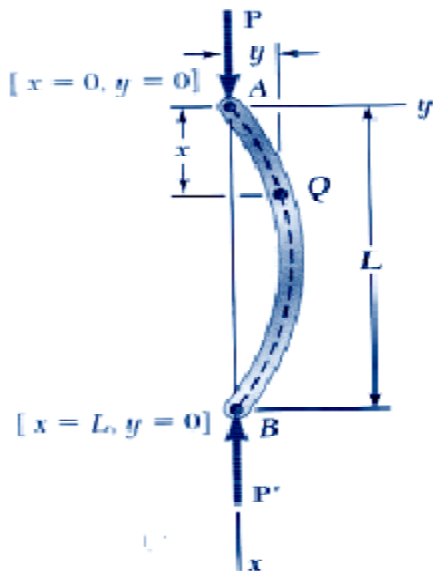
Σχήμα 5: Διαρθρωτό υποστύλωμα
Βιβλιογραφία(1)

Θα προσδιορίσουμε την τιμή του φορτίου P για την οποία το σύστημα δεν θα είναι ευσταθές, $P > P_{cr}$, δηλαδή την κρίσιμη τιμή που θα κάνει το υποστύλωμα να λυγίσει και να αποκτήσει ένα καμπύλο σχήμα όπως βλέπουμε παρακάτω.



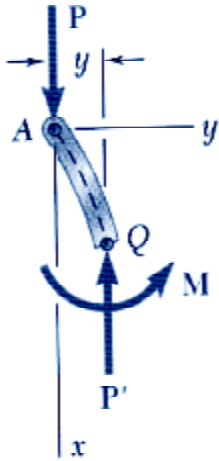
Σχήμα 6: Υποστύλωμα υπό λυγισμό
Βιβλιογραφία(1)

Μπορούμε να θεωρήσουμε το υποστύλωμα σαν μία κατακόρυφα τοποθετημένη δοκό που υπόκειται σε ένα αξονικό φορτίο.



Σχήμα 7: Υποστύλωμα υπό λυγισμό
Βιβλιογραφία(1)

Θεωρούμε τον άξονα x κατακόρυφο με διεύθυνση προς τα κάτω και τον άξονα y οριζόντιο με διεύθυνση προς τα δεξιά. Ονομάζουμε Q ένα δεδομένο σημείο της ελαστικής γραμμής του υποστυλώματος και συμβολίζουμε x την απόσταση από το σημείο A .



Σχήμα 8: Βιβλιογραφία(1)

Η καμπτική ροπή στο σημείο Q από την ισορροπία του ελεύθερου σώματος AQ είναι $M = -P \cdot y$

Γνωρίζουμε ότι:

Η καμπυλότητα της ελεύθερης επιφάνειας εκφράζεται από τη σχέση

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot I}$$

Από τα μαθηματικά γνωρίζουμε ότι:

Η καμπυλότητα σε ένα σημείο Q(x,y) μιας επίπεδης καμπύλης εκφράζεται ως:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

Όπου $\frac{dy}{dx}$ και $\frac{d^2y}{dx^2}$ είναι η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης y(x) που παριστάνεται από την καμπύλη αυτή. Στην περίπτωση της ελαστικής γραμμής μιας δοκού η κλίση $\frac{dy}{dx}$ είναι πολύ μικρή και το τετράγωνό της αμελητέο σε σχέση με την μονάδα. Οπότε η εξίσωση μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Που είναι γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης και είναι η διαφορική εξίσωση της ελαστικής γραμμής.

Αντικαθιστώντας λοιπόν έχουμε:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{E \cdot I} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-P}{E \cdot I} \cdot y$$

(1.1)

Μεταφέροντάς τα όλα στο πρώτο μέλος έχουμε:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{E \cdot I} \cdot y = 0$$

(1.2)

Αυτή είναι ομογενής, γραμμική εξίσωση δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές

$$\text{Θέτουμε όπου } \frac{P}{E \cdot I} = p^2 \quad (1.3)$$

και παίρνουμε μια διαφορική εξίσωση που περιγράφει μια απλή αρμονική κίνηση με ανεξάρτητη μεταβλητή την απόσταση x και έχει γενική λύση:

$$y = A \cdot \sin px + B \cdot \cos px \quad (1.4)$$

Θα βρούμε τις τιμές των σταθερών A και B βάσει των οριακών συνθηκών που πρέπει να ικανοποιούνται στα άκρα του υποστυλώματος.

Θέτουμε $x = 0$ και $y = 0$ και η εξίσωση παίρνει την εξής μορφή:

$$0 = A \cdot \sin 0 + B \cdot \cos 0, \quad \cos 0 = 1 \quad \text{και} \quad \sin 0 = 0$$

Οπότε πρέπει $B = 0$

Έπειτα αντικαθιστούμε όπου $x = L$ και $y = 0$ και η εξίσωση παίρνει την μορφή:

$$A \cdot \sin p \cdot L = 0$$

(1.5)

Για να ικανοποιείται η εξίσωση πρέπει $A = 0$ ή $\sin p \cdot L = 0$

Αν ικανοποιείται η πρώτη συνθήκη τότε έχουμε $y = 0$ και το υποστύλωμα παραμένει ευθύγραμμο

☐ Αν ικανοποιείται η δεύτερη συνθήκη πρέπει να έχουμε $p \times L = n \times \pi$

Αντικαθιστώντας το p στη σχέση (1.3) έχουμε

$$\frac{n^2 \cdot \pi^2}{L^2} = \frac{P}{E \cdot I} \Rightarrow$$

$$P = \frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2}$$

Η μικρότερη τιμή του P που ορίζεται από αυτή την εξίσωση είναι για $n = 1$ και έχουμε:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2}$$

(1.6)

Αυτός είναι ο τύπος της εύρεσης της P_{cr} του Ελβετού μαθηματικού Leonhard Euler Γνωρίζοντας ότι $B = 0$ και αντικαθιστώντας την έκφραση αυτή του P και την τιμή του p στην εξίσωση (1.4) :

$$y = a \cdot \sin \frac{\pi \cdot x}{L}$$

(1.7)

Αυτή είναι η εξίσωση ελαστικής γραμμής μετά το λυγισμό του υποστυλώματος

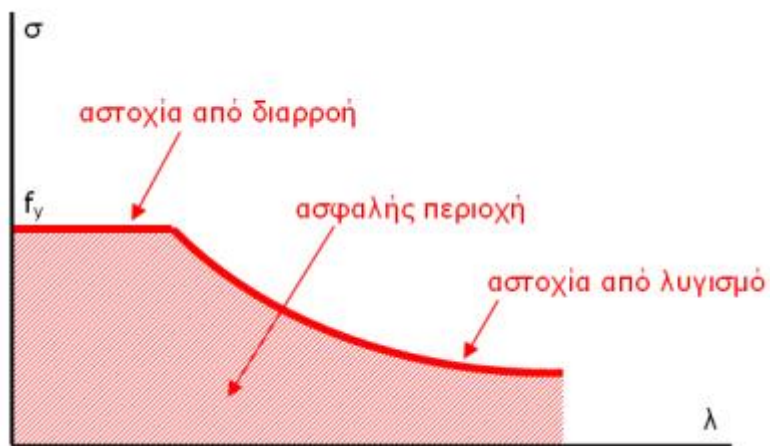
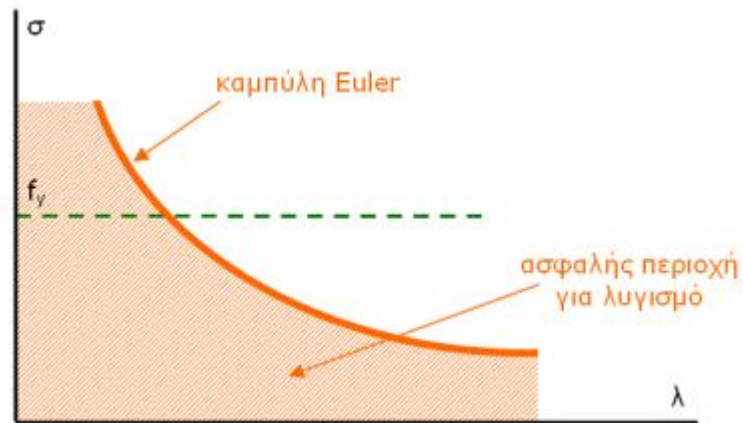
Για άλλα σχήματα εγκάρσιων διατομών, υπολογίζουμε το κρίσιμο φορτίο βάζοντας όπου $I = I_{\min}$.

Η τάση που αντιστοιχεί στο κρίσιμο φορτίο είναι η κρίσιμη τάση σ_{cr} και βάζοντας όπου $I = A \times r^2$, A: εμβαδόν διατομής
r : ακτίνα αδράνειας

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot A \cdot r^2}{A \cdot L^2} \Rightarrow$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{(L/r)^2}$$

Ο λόγος L/r είναι ο λόγος λυγηρότητας του υποστυλώματος και για την εύρεση της κρίσιμης τάσης και του λόγου αυτού χρησιμοποιούμε την ελάχιστη τιμή της ακτίνας αδράνειας r για την εύρεσή του.



Σχήμα 9: Διάγραμμα Euler
Βιβλιογραφία(6)

$$\lambda = \frac{L}{r}$$

(λυγηρότητα)

Ειδικοί τύποι σχεδιασμού υποστυλωμάτων χάλυβα υπό κεντρικό φορτίο

Αυτοί οι τύποι είναι ορισμένοι υπό τις Προδιαγραφές για Κτίρια από Δομικό Χάλυβα του Αμερικανικού Ινστιτούτου Χαλύβδινων Κατασκευών AISC (Manual of Steel Construction - 13th Edition, American Institute of Steel Construction).

Για τα επιμήκη υποστυλώματα χρησιμοποιείται ένας τύπος που βασίζεται σε αυτόν του Euler

$$\sigma_{cr} = 0,877 \cdot \sigma_e \quad (1.8)$$

Αν ο λόγος της λυγηρότητας ισούται με μηδέν ($L/r = 0$) τότε η κρίσιμη τάση ισούται με το όριο διαρροής ($\sigma_{cr} = \sigma_y$)

Στην περίπτωση αυτή ο λόγος λυγηρότητας βρίσκεται από την εξής σχέση:

$$\frac{L}{r} = 4,71 \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_y}} \quad (1.9)$$

Αν ο λόγος είναι μεγαλύτερος από αυτή την σχέση η κρίσιμη τάση σ_{cr} υπολογίζεται από την εξίσωση (1.8) που προαναφέραμε

Για τους τελικούς τύπους πρέπει να εισάγουμε συντελεστή ασφαλείας με τιμή 1,67 καθορισμένη από τις προδιαγραφές του AISC.

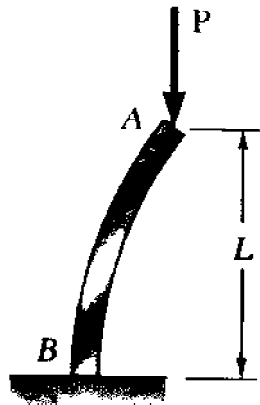
Έχουμε:

$$\sigma_{cr} = 1,67 \cdot \sigma_{all} \quad (1.10)$$

1.3 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΚΑΤ' ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΤΥΠΟΥ EULER

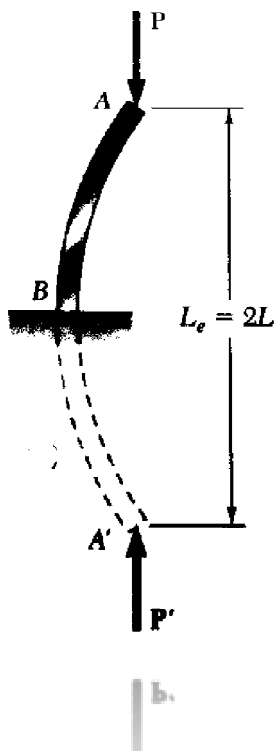
Σε αυτή την ενότητα παραθέσουμε διαφορετικούς τρόπους στήριξης στα άκρα ενός υποστυλώματος, συνήθεις προβλήματα λυγισμού που συναντάμε, παρατηρώντας το τμήμα του υποστυλώματος που επηρεάζεται ($L_e = \text{effective length}$) κάθε φορά ανάλογα με τον τρόπο στήριξης και αντικαθιστώντας το στον τύπο του Euler για την εύρεση του κρίσιμου φορτίου και της κρίσιμης τάσης.

1) Ένα πακτωμένο άκρο και ένα ελεύθερο



Σχήμα 10: Υποστύλωμα υπό λυγισμό με ένα άκρο ελεύθερο
Βιβλιογραφία(1)

Στην περίπτωση αυτή παρατηρούμε ότι το υποστύλωμα συμπεριφέρεται σαν το ένα μισό άκρο διαρθρωτού υποστυλώματος.



Σχήμα 11: Υποστύλωμα υπό λυγισμό με ένα άκρο ελεύθερο
Βιβλιογραφία(1)

Οπότε μπορούμε να βρούμε το κρίσιμο φορτίο από τον τύπο του Euler για διαρθρωτά υποστυλώματα χρησιμοποιώντας το διπλάσιο μήκος L , οπότε το ισοδύναμο μήκος L_e (effective length) του υποστυλώματος ισούται με $2L$ και αντικαθιστώντας στον τύπο έχουμε:

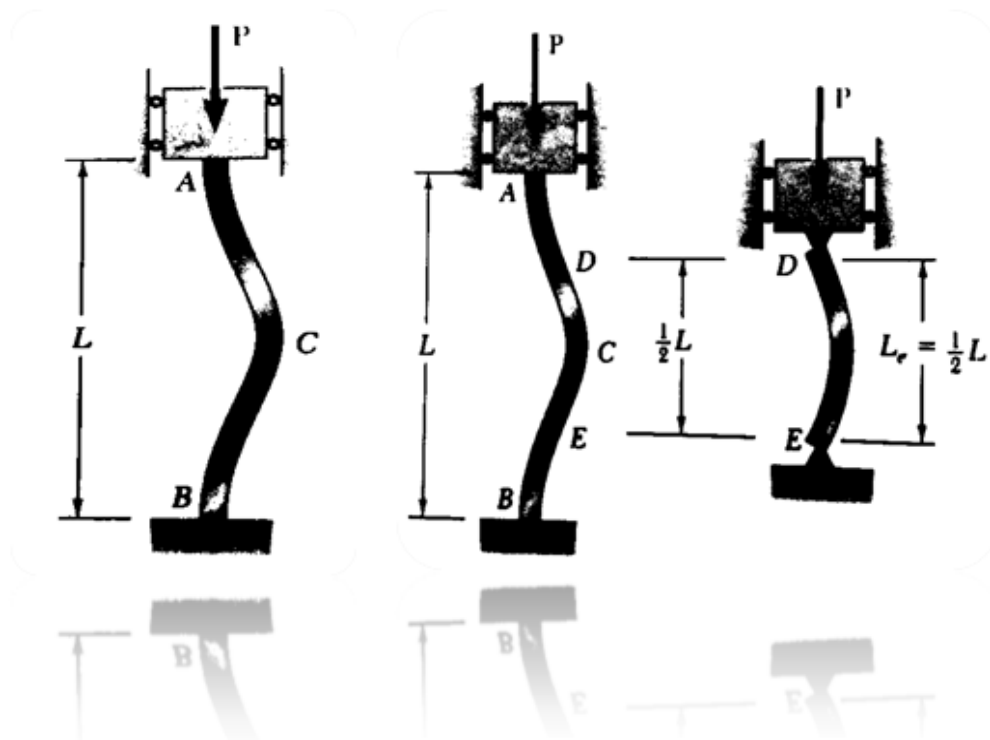
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L_e^2}$$

Και αντίστοιχα η κρίσιμη τάση:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{(L_e/r)^2}$$

Σε αυτή την περίπτωση όπου $L_e = 2L$

2) Και τα δύο άκρα πακτωμένα



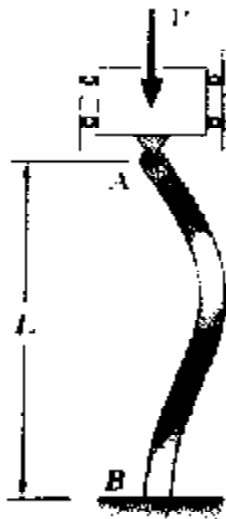
Σχήμα 12: Υποστύλωμα με δύο πακτωμένα άκρα υπό λυγισμό
Βιβλιογραφία(1)

Λόγω της συμμετρίας των στηρίξεων και της φόρτισης που διέρχεται από άξονα που περνά από το μέσον C της ράβδου, οι συνιστώσες των δυνάμεων στα σημεία A και B .

Στα τμήματα AC και CB τίθενται οι ίδιοι περιορισμοί λόγω συμμετρίας. Το τμήμα AC είναι συμμετρικό ως προς το σημείο D που είναι ένα σημείο καμπής στο οποίο η καμπτική ροπή είναι ίση με μηδέν. Το ίδιο ακριβώς ισχύει για το τμήμα CB ως προς το σημείο E . Στα σημεία D και E η καμπτική ροπή είναι μηδέν μπορούμε να θεωρήσουμε πως συμπεριφέρεται σαν ένα διαρθρωτό υποστύλωμα το τμήμα DE , καθώς γνωρίζουμε ότι στα άκρα διαρθρωτού υποστυλώματος η καμπτική ροπή είναι μηδέν.

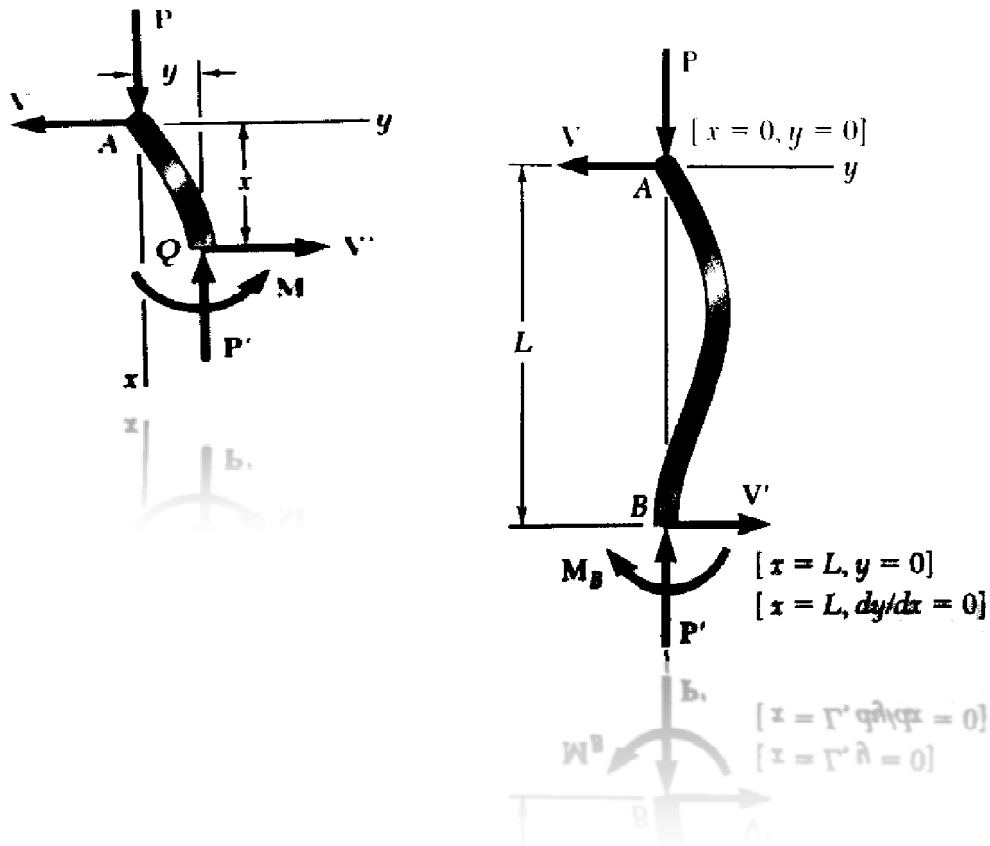
Επομένως πρέπει να βάλουμε στον τύπο όπου $L_e = L/2$

3) Ένα άκρο αρθρωμένο και ένα πακτωμένο



Σχήμα 13: Υποστύλωμα με ένα άκρο πακτωμένο και ένα διαρθρωτό υπό λυγισμό
Βιβλιογραφία(1)

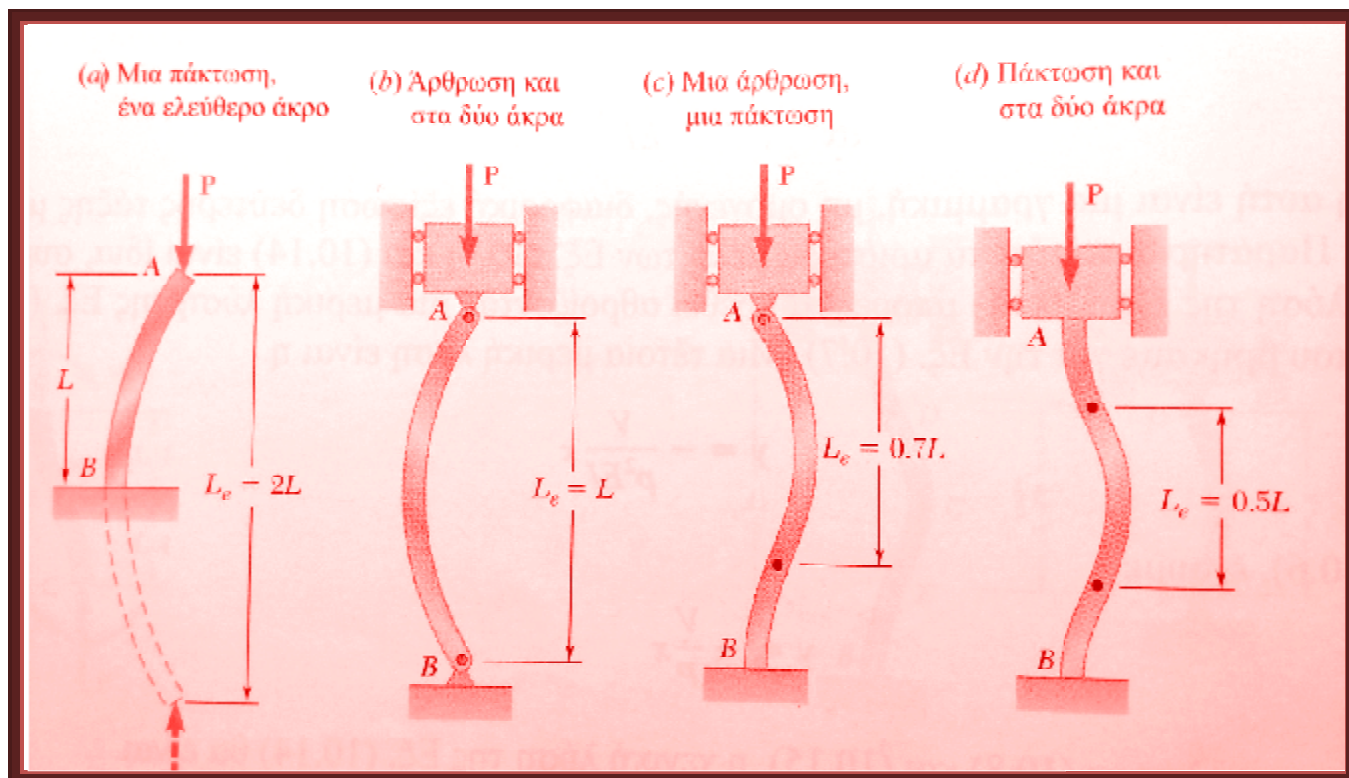
Σε αυτή την περίπτωση για να υπολογίσουμε το μήκος του υποστυλώματος L_e , πρέπει να λύσουμε την διαφορική εξίσωση ελαστικής γραμμής



Σχήμα 14: Επαναληπτικό
Βιβλιογραφία(1)

Το ισοδύναμο μήκος που προκύπτει σε αυτή την περίπτωση είναι $L_e = 0,7L$

Συνοψίζοντας και από το προηγούμενο κεφάλαιο, βλέπουμε παρακάτω τα μήκη που προκύπτουν για την εύρεση των κρίσιμων τιμών ανάλογα με τον τρόπο στήριξης τους.



Σχήμα 15: Υποστυλώματα υπό διαφορετικές συνθήκες στήριξης
Βιβλιογραφία(1)

2. ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΛΥΓΙΣΜΟΥ

2.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΣΦΑΛΟΥΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ ΞΥΛΙΝΟΥ ΔΙΑΡΘΡΩΤΟΥ ΥΠΟΣΤΗΛΩΜΑΤΟΣ

Το διαρθρωτό υποστύλωμα θα κατασκευαστεί από ξύλο με μήκος $L = 2,5\text{m}$ και θα έχει τετραγωνική εγκάρσια διατομή. Θεωρούμε ότι $E = 12 \text{ GP}_a$, $\sigma_{\text{all}} = 10 \text{ MP}_a$ και χρησιμοποιούμε έναν συντελεστή ασφαλείας για τον υπολογισμό του κρίσιμου φορτίου του Euler για λυγισμό ίσο με 2,5.

Θα προσδιορίσουμε το μέγεθος της εγκάρσιας διατομής ώστε το υποστύλωμα να φέρει με ασφάλεια:

- i) Φορτίο ίσο με **90 KN**
- ii) Φορτίο ίσο με **180 KN**

ΛΥΣΗ

i) Για το φορτίο των 90 KN

Χρησιμοποιούμε τον συντελεστή ασφαλείας που αναφέραμε παραπάνω και έχουμε:

$$P_{cr} = 2,5 \cdot (90 \text{ KN}) = 225 \text{ KN}$$

$$L = 2,5 \text{ m}$$

$$E = 12 \text{ MP}_a$$

Παίρνουμε τον τύπο του Euler $P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{L^2}$ και λύνουμε ως προς I

$$I = \frac{P_{cr} L^2}{\pi^2 E} = \frac{(225 \cdot 10^3) \text{ N} \cdot (2,5 \text{ m})^2}{(3,14)^2 \cdot (12 \cdot 10^9) \text{ Pa}} = \frac{1406,25 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^2}{118,3152 \cdot 10^9 \text{ Pa}} =$$

$$= 11,9 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

Ξέρουμε ότι για τετραγωνική διατομή πλευράς a η ροπή αδράνειας είναι:

$$I = \frac{a^4}{12}$$

Αφού έχουμε βρει την ροπή αδράνειας αντικαθιστώντας στον τύπο αυτό έχουμε:

$$11,9 \cdot 10^{-6} = \frac{a^4}{12}$$

Και λύνουμε ως προς α

$$\alpha^4 = 11,9 \cdot 10^{-6} m^4 \times 12 \Rightarrow$$

$$\alpha = \sqrt[4]{142,8 \cdot 10^{-6} m^4} \Rightarrow$$

$$\alpha = 0,109 m \text{ ή } 109 mm$$

Ελέγχουμε για το φορτίο των 90 kN την τιμή της ορθής τάσης

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{90 \cdot 10^3 N}{(0,109 m)^2} = 7500000 Pa$$

$$\text{Ή } \sigma = 7,5 MPa < \sigma_{all}$$

Η τάση που βρήκαμε είναι μικρότερη από την επιτρεπόμενη, οπότε δεχόμαστε την διατομή 109×109 mm

ii) Για το φορτίο των 180 kN

Ομοίως παίρνοντας τον συντελεστή ασφαλείας έχουμε:

$$P_{cr} = 2,5 \times 180 kN = 450 kN$$

Λύνουμε τον τύπο του Euler ως προς I

$$I = \frac{(450 \cdot 10^3) N \cdot (2,5 m)^2}{3,14^2 \cdot (12 \cdot 10^9) Pa} = 23,8 \cdot 10^{-6} m^4$$

Λύνουμε ομοίως ως προς α

$$a = \sqrt[4]{23,8 \cdot 10^{-6} \times 12}$$

$$a = 0,130 \text{ m} \quad \text{ή} \quad a = 130 \text{ mm}$$

Ελέγχουμε για το φορτίο των 180 kN τώρα και έχουμε:

$$\sigma = \frac{180 \cdot 10^3 \text{ N}}{(0,130 \text{ m})^2} = 9000000 \text{ Pa}$$

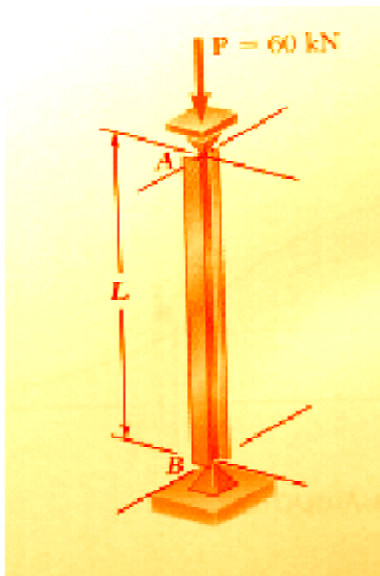
ή

$$\sigma = 9 \text{ MPa} < \sigma_{all}$$

Η τάση που βρήκαμε είναι μικρότερη από την επιτρεπόμενη, οπότε δεχόμαστε την διατομή 130×130 mm

2.2 ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΑΣΤΗΡΙΚΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΧΑΛΥΒΔΙΝΗΣ ΔΟΚΟΥ ΠΡΟΤΥΠΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ ΥΠΟ ΚΕΝΤΡΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ

Έχουμε μία δοκό ελατού χάλυβα AB πρότυπης διατομής **S100x14,1** η οποία θλίβεται. Θα βρούμε το μέγιστο αστήρικτο μήκος L που μπορεί να έχει ώστε να φέρει με ασφάλεια το κεντρικό φορτίο που βλέπουμε παρακάτω



Εικόνα 13: Δοκός υπό κεντρικό φορτίο
Βιβλιογραφία(1)

Υποθέτουμε μία $\sigma_y = 250 \text{ MP}_a$ και μέτρο ελαστικότητας $E = 200 \text{ GP}_a$.
 Από το παράρτημα **A** βρίσκουμε τις διαστάσεις της διατομής που έχουμε:
 Εμβαδόν $A = 1800 \text{ mm}^2$
 $r_x = 39,6 \text{ mm}$, $r_y = 14,3 \text{ mm}$

Θέλουμε να φέρει με ασφάλεια το φορτίο $P = 60 \text{ KN}$. Για να γίνει αυτό πρέπει:

$$\sigma_{all} = \frac{P}{A} = \frac{60 \cdot 10^3 \text{ N}}{1800 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = 33,3 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

$$\sigma_{all} = 33,3 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

Πρέπει να βρούμε την κρίσιμη τάση σ_{cr} .

Υποθέτοντας ότι ο λόγος λυγηρότητας είναι μεγαλύτερος από αυτόν που καθορίζει η εξίσωση (1.9), χρησιμοποιούμε τον τύπο για επιμήκη υποστυλώματα που βασίζεται σε αυτόν του Euler (1.8)

$$\sigma_{cr} = 0,877 \cdot \sigma_e$$

Και αντικαθιστούμε με τον τύπο του Euler

$$\begin{aligned} \sigma_{cr} &= 0,877 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E}{(L|r)^2} = 0,877 \cdot \frac{3,14^2 \cdot 200 \cdot 10^9 \text{ Pa}}{(L|r)^2} = \\ &= \frac{1,73 \cdot 10^{12} \text{ Pa}}{(L|r)^2} \end{aligned}$$

Καθώς αυτός ο τύπος δεν περιλαμβάνει συντελεστή ασφαλείας, χρησιμοποιούμε την εξίσωση (1.10)

$$\sigma_{cr} = 1,67 \cdot \sigma_{all}$$

Αντικαθιστούμε από την παραπάνω τιμή του σ_{cr} και έχουμε

$$\frac{1,73 \cdot 10^{12} \text{ Pa}}{(L|r)^2} = 1,67 \cdot \sigma_{all} \Rightarrow$$

$$\sigma_{all} = \frac{1,04 \cdot 10^{12} Pa}{(L|r)^2}$$

Έπειτα εξισώνοντας με το απαιτούμενο σ_{all} που βρήκαμε προηγουμένως

$$33,3 \times 10^6 Pa = \frac{1,04 \cdot 10^{12} Pa}{(L|r)^2} \Rightarrow$$

$$(L|r)^2 = \frac{1,04 \cdot 10^{12} Pa}{33,3 \cdot 10^6 Pa} \Rightarrow$$

$$\frac{L}{r} = 176,7$$

Θα υπολογίσουμε το λόγο λυγηρότητας από την εξίσωση (1.9)

$$\frac{L}{r} = 4,71 \times \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\gamma}}} = 4,71 \times \sqrt{\frac{200 \cdot 10^9 Pa}{250 \cdot 10^6 Pa}} = 4,71 \cdot 28,3$$

$$\frac{L}{r} = 133,3$$

Σωστά λοιπόν υποθέσαμε ότι ο λόγος λυγηρότητας είναι μεγαλύτερος από αυτόν που καθορίζει η εξίσωση (1.9) και χρησιμοποιούμε την εξίσωση που βρήκαμε χρησιμοποιώντας την (1.8) για να βρούμε το ελάχιστο μήκος L . Οπότε:

$$\frac{L}{r} = 176,7$$

Γνωρίζουμε από τον τύπο του Euler ότι πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την μικρότερη ακτίνα αδράνειας

$$\frac{L}{r_y} = \frac{L}{14,3 \cdot 10^{-3} m} = 176,7$$

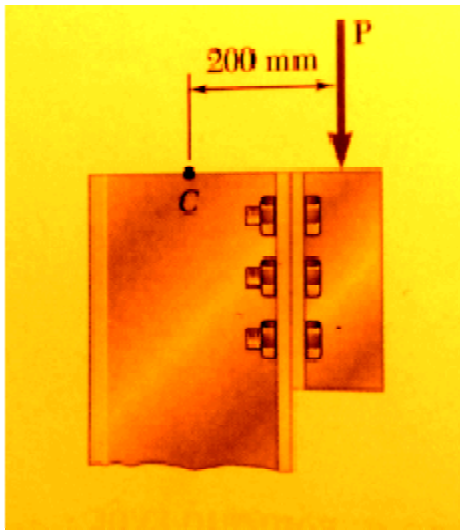
$$L = 176,7 \cdot 14,3 \cdot 10^{-3} m$$

$$L = 2,53 m$$

Άρα το αστήρικο μήκος L πρέπει να είναι $L \geq 2,53m$

2.3 ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΕΠΙΤΡΕΠΟΜΕΝΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ ΧΑΛΥΒΔΙΝΟΥ ΥΠΟΣΤΗΛΩΜΑΤΟΣ ΠΡΟΤΥΠΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ ΥΠΟ ΕΚΚΕΝΤΡΟ ΦΟΡΤΙΟ

Θα υπολογίσουμε το μέγιστο φορτίο P που μπορεί να φέρει με ασφάλεια η δοκός που βλέπουμε παρακάτω, με πρότυπη διατομή $W310x52$ και μήκος $L = 4,5m$



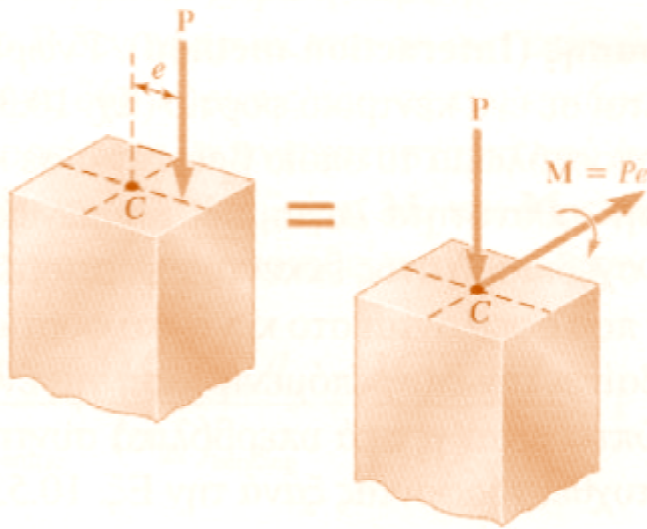
Εικόνα 14: Δοκός υπό έκκεντρο φορτίο
Βιβλιογραφία(1)

Για την εύρεση του μέγιστου φορτίου P θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της επιτρεπόμενης τάσης με $E = 200 \text{ GP}_a$ και $\sigma_y = 250 \text{ MP}_a$

Ø Μέθοδος επιτρεπόμενης τάσης

Όταν εφαρμόζεται ένα έκκεντρο αξονικό φορτίο P σε ένα επίπεδο συμμετρίας ενός υποστυλώματος μπορούμε να το αντικαταστήσουμε με το άθροισμα του φορτίου P

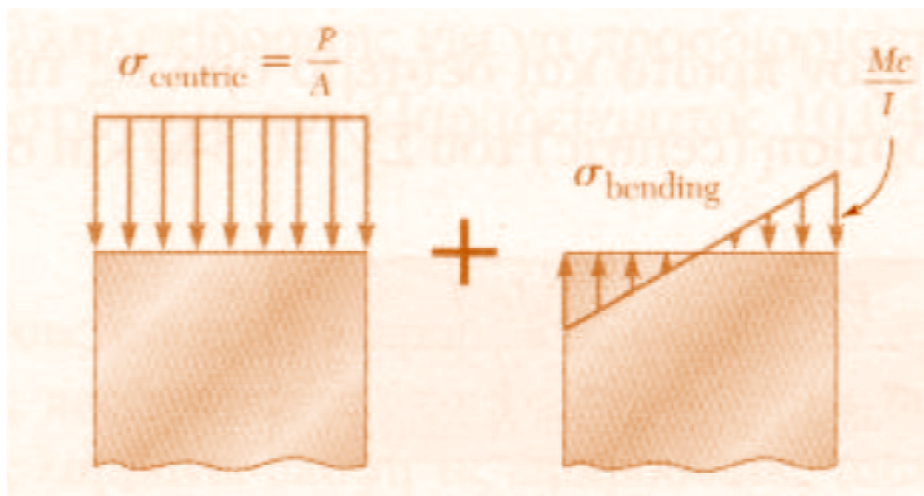
σαν να ήταν κεντρικό και μιας ροπής M που ισούται με το γινόμενο του φορτίου P επί την απόσταση του φορτίου από το κέντρο συμμετρίας.



e : Απόσταση από το κέντρο C

Με τη μέθοδο αυτή λοιπόν το υποστύλωμα αντιμετωπίζεται σαν να ήταν κεντρικά φορτισμένο, πρέπει όμως η διατομή να μην είναι πολύ κοντά σε κάποιο άκρο του υποστηλώματος και οι τάσεις να μην υπερβαίνουν το όριο αναλογίας του υλικού.

Εικόνα 15: Υποστύλωμα υπό έκκεντρο φορτίο
Βιβλιογραφία(1)



Εικόνα 16: Υποστύλωμα υπό έκκεντρο φορτίο
Βιβλιογραφία(1)

Επομένως η συνολική τάση που δέχεται το υποστύλωμα είναι:

$$\sigma_{all} = \frac{P}{A} + \frac{M_C}{I}$$

$$\frac{M_C}{I} = \frac{M}{S}$$

Η τιμή της συνολικής τάσης δεν πρέπει να υπερβαίνει την επιτρεπόμενη τάση σ_{max} .
 $\sigma_{all} \leq \sigma_{max}$

Αρχικά πηγαίνουμε στο παράρτημα **A** των πρότυπων διατομών και βρίσκουμε ότι για **W310x52** έχουμε:

$$A = 6650 \text{ mm}^2, \quad r_x = 133 \text{ mm}, \quad r_y = 39,1 \text{ mm}, \quad S_x = 747 \text{ mm}^3, \quad S_y = 122 \text{ mm}^3$$

Χρησιμοποιώντας την μικρότερη ακτίνα αδράνειας βρίσκουμε το λόγο λυγηρότητας:

$$\frac{L}{r_y} = \frac{4,5\text{m}}{39,1 \cdot 10^{-3}\text{m}} = 115,1$$

Και συνεχίζουμε βρίσκοντας την κρίσιμη τάση

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{(L/r)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 250 \cdot 10^9 \text{Pa}}{(115,1)^2} = 186 \times 10^6 \text{Pa}$$

ή

$$\sigma_{cr} = 186 \text{ MPa}$$

Χρησιμοποιούμε ένα συντελεστή ασφαλείας 1,67

$$\sigma_{all} = \frac{\sigma_{cr}}{1,67} = \frac{186 \text{ MPa}}{1,67} = 111,4 \text{ MPa}$$

Η συνολική τάση που έχουμε στο υποστήλωμα είναι:

$$\sigma_{all} = \frac{P}{A} + \frac{M_C}{I}$$

Έχουμε:

$$\frac{P}{A} = \frac{P}{6650 \cdot 10^{-6} \text{m}^2}$$

$$\frac{M_C}{I} = \frac{M}{S_x} = \frac{P \cdot 0,2 \text{ m}}{747 \cdot 10^{-6} \text{ m}}$$

Οπότε

$$111,4 \cdot 10^6 \text{ Pa} = \frac{P}{6,65 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2} + \frac{P \times 0,2 \text{ m}}{0,747 \cdot 10^{-3} \text{ m}} =$$

$$111,4 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = P \cdot 0,15 \cdot 10^3 \text{ m}^{-2} + P \cdot 0,3 \cdot 10^3 =$$

$$P = \frac{111,4 \cdot 10^6 \text{ N}}{0,45 \cdot 10^3 \text{ m}^{-2} \cdot \text{m}^2}$$

$$P = 247555,5 \text{ N}$$

Το μέγιστο φορτίο που μπορεί να φέρει με ασφάλεια το υποστήλωμα είναι:

$$\mathbf{P = 247,5 \text{ KN}}$$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

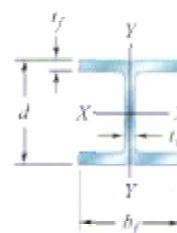
Η μελέτη της Ευστάθειας των Κατασκευών - λυγισμού είναι ένα πολύ σημαντικό κεφάλαιο της Μηχανικής των υλικών. Είδαμε ότι προβλήματα ευστάθειας συναντάμε καθημερινά. Αυτά μπορεί να είναι από μία απλή κατασκευή, ένα σπίτι μέχρι τις μεγαλύτερες γέφυρες του κόσμου. Καταλαβαίνουμε λοιπόν πόσο σημαντική είναι η μελέτη αυτών, καθώς η σωστή μελέτη εξασφαλίζει την ασφάλεια μας.

Είναι πολλοί οι παράγοντες που μπορούν να επηρεάσουν το φαινόμενο του λυγισμού. Μεγάλη σημασία είδαμε πως έχει ο τρόπος με τον οποίο αποφασίζεται να στηριχθεί μία κατασκευή διότι επηρεάζει το ποσοστό και τα σημεία κατά μήκος της κατασκευής που κινδυνεύουν να παραμορφωθούν. Επίσης επηρεάζεται το κρίσιμο φορτίο, καθώς με διαφορετικούς τρόπους στήριξης μπορούμε να πετύχουμε μεγαλύτερη αντοχή και συνεπώς να μπορεί να φέρει με ασφάλεια μεγαλύτερα φορτία.

Κάνοντας μια σύντομη ιστορική αναδρομή, ο τύπος του Euler που αφορά τις ελαστικές παραμορφώσεις, έγινε αφορμή για να μελετηθεί η συμπεριφορά των ράβδων μέσα από ραγδαίες έρευνες και ανάπτυξη θεωριών εκτατό χρόνια μετά. Πολλοί επιστήμονες συνέχισαν τις έρευνες για τον λυγισμό. Καταλαβαίνουμε λοιπόν πόσο σημαντικός είναι ο τύπος του Ελβετού μαθηματικού Leonhard Euler.

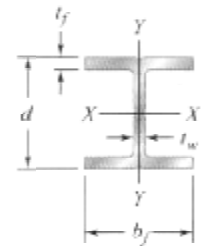
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

ΠΡΟΤΥΠΕΣ ΔΙΑΤΟΜΕΣ W



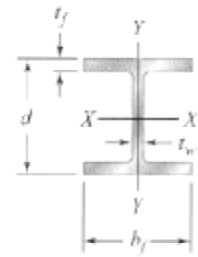
Συμβολισμός †	Εμβαδόν A, in^2	Ύψος $d, in.$	Πέλμα		Πάχος Κορμού $t_w, in.$	Άξονας X-X			Άξονας Y-Y		
			Πλάτος $b_f, in.$	Πάχος $t_f, in.$		I_x, in^4	S_x, in^3	$r_x, in.$	I_y, in^4	S_y, in^3	$r_y, in.$
W36 × 302	88.8	37.3	16.7	1.68	0.945	21100	1130	15.4	1300	156	3.82
135	39.7	35.6	12.0	0.790	0.600	7800	439	14.0	225	37.7	2.38
W33 × 201	59.2	33.7	15.7	1.15	0.715	11600	686	14.0	749	95.2	3.56
118	34.7	32.9	11.5	0.740	0.550	5900	359	13.0	187	32.6	2.32
W30 × 173	51.0	30.4	15.0	1.07	0.655	8230	541	12.7	598	79.8	3.42
99	29.1	29.7	10.50	0.670	0.520	3990	269	11.7	128	24.5	2.10
W27 × 146	43.1	27.4	14.0	0.975	0.605	5660	414	11.5	443	63.5	3.20
84	24.8	26.70	10.0	0.640	0.460	2850	213	10.7	106	21.2	2.07
W24 × 104	30.6	24.1	12.8	0.750	0.500	3100	258	10.1	259	40.7	2.91
68	20.1	23.7	8.97	0.585	0.415	1830	154	9.55	70.4	15.7	1.87
W21 × 101	29.8	21.4	12.3	0.800	0.500	2420	227	9.02	248	40.3	2.89
62	18.3	21.0	8.24	0.615	0.400	1330	127	8.54	57.5	14.0	1.77
44	13.0	20.7	6.50	0.450	0.350	843	81.6	8.06	20.7	6.37	1.26
W18 × 106	31.1	18.7	11.2	0.940	0.590	1910	204	7.84	220	39.4	2.66
76	22.3	18.2	11.0	0.680	0.425	1330	146	7.73	152	27.6	2.61
50	14.7	18.0	7.50	0.570	0.355	800	88.9	7.38	40.1	10.7	1.65
35	10.3	17.7	6.00	0.425	0.300	510	57.6	7.04	15.3	5.12	1.22
W16 × 77	22.6	16.5	10.3	0.76	0.455	1110	134	7.00	138	26.9	2.47
57	16.8	16.4	7.12	0.715	0.430	758	92.2	6.72	43.1	12.1	1.60
40	11.8	16.0	7.00	0.505	0.305	518	64.7	6.63	28.9	8.25	1.57
31	9.13	15.9	5.53	0.440	0.275	375	47.2	6.41	12.4	4.49	1.17
26	7.68	15.7	5.50	0.345	0.250	301	38.4	6.26	9.59	3.49	1.12
W14 × 370	109	17.9	16.5	2.66	1.66	5440	607	7.07	1990	241	4.27
145	42.7	14.8	15.5	1.09	0.680	1710	232	6.33	677	87.3	3.98
82	24.0	14.3	10.1	0.855	0.510	881	123	6.05	148	29.3	2.48
68	20.0	14.0	10.0	0.720	0.415	722	103	6.01	121	24.2	2.46
53	15.6	13.9	8.06	0.660	0.370	541	77.8	5.89	57.7	14.3	1.92
43	12.6	13.7	8.00	0.530	0.305	428	62.6	5.82	45.2	11.3	1.89
38	11.2	14.1	6.77	0.515	0.310	385	54.6	5.87	26.7	7.88	1.55
30	8.85	13.8	6.73	0.385	0.270	291	42.0	5.73	19.6	5.82	1.49
26	7.69	13.9	5.03	0.420	0.255	245	35.3	5.65	8.91	3.55	1.08
22	6.49	13.7	5.00	0.335	0.230	199	29.0	5.54	7.00	2.80	1.04

Πίνακας 1: Πρότυπες Διατομές W
Βιβλιογραφία(1)



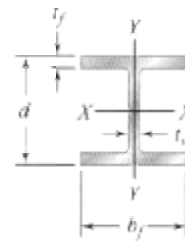
Συμβολισμός †	Εμβαδόν A , mm ²	Ύψος d , mm	Πέδιμα		Πάχος Κορμού t_w , mm	Αξονας X-X			Αξονας Y-Y		
			Πλάτος b_f , mm	Πάχος t_f , mm		I_x 10 ⁶ mm ⁴	S_x 10 ³ mm ³	r_x mm	I_y 10 ⁶ mm ⁴	S_y 10 ³ mm ³	r_y mm
W920 × 449	57300	947	424	42.7	24.0	8780	18500	391	541	2560	97.0
201	25600	904	305	20.1	15.2	3250	7190	356	93.7	618	60.5
W840 × 299	38200	856	399	29.2	18.2	4830	11200	356	312	1560	90.4
176	22400	836	292	18.8	14.0	2460	5880	330	77.8	534	58.9
W760 × 257	32900	772	381	27.2	16.6	3430	8870	323	249	1310	86.9
147	18800	754	267	17.0	13.2	1660	4410	297	53.3	401	53.3
W690 × 217	27800	696	356	24.8	15.4	2360	6780	292	184	1040	81.3
125	16000	678	254	16.3	11.7	1190	3490	272	44.1	347	52.6
W610 × 155	19700	612	325	19.1	12.7	1290	4230	257	108	667	73.9
101	13000	602	228	14.9	10.5	762	2520	243	29.3	257	47.5
W530 × 150	19200	544	312	20.3	12.7	1010	3720	229	103	660	73.4
92	11800	533	209	15.6	10.2	554	2080	217	23.9	229	45.0
66	8390	526	165	11.4	8.89	351	1340	205	8.62	104	32.0
W460 × 158	20100	475	284	23.9	15.0	795	3340	199	91.6	646	67.6
113	14400	462	279	17.3	10.8	554	2390	196	63.3	452	66.3
74	9480	457	191	14.5	9.02	333	1460	187	16.7	175	41.9
52	6650	450	152	10.8	7.62	212	944	179	6.37	83.9	31.0
W410 × 114	14600	419	262	19.3	11.6	462	2200	178	57.4	441	62.7
85	10800	417	181	18.2	10.9	316	1510	171	17.9	198	40.6
60	7610	406	178	12.8	7.75	216	1060	168	12.0	135	39.9
46.1	5890	404	140	11.2	6.99	156	773	163	5.16	73.6	29.7
38.8	4950	399	140	8.76	6.35	125	629	159	3.99	57.2	28.4
W360 × 551	70300	455	419	67.6	42.2	2260	9950	180	828	3950	108
216	27500	376	394	27.7	17.3	712	3800	161	282	1430	101
122	15500	363	257	21.7	13.0	367	2020	154	61.6	480	63.0
101	12900	356	254	18.3	10.5	301	1690	153	50.4	397	62.5
79	10100	353	205	16.8	9.40	225	1270	150	24.0	234	48.8
64	8130	348	203	13.5	7.75	178	1030	148	18.8	185	48.0
57.8	7230	358	172	13.1	7.87	160	895	149	11.1	129	39.4
44	5710	351	171	9.78	6.86	121	688	146	8.16	95.4	37.8
39	4960	353	128	10.7	6.48	102	578	144	3.71	58.2	27.4
32.9	4190	348	127	8.51	5.84	82.8	475	141	2.91	45.9	26.4

Πίνακας 2: Πρότυπες Διατομές W
Βιβλιογραφία(1)



Συμβολισμός †	Εμβαδόν A, in^2	Ύψος $d, \text{in.}$	Πέλμα		Πάχος Κορμού $t_w, \text{in.}$	Αξονας X-X			Αξονας Y-Y		
			Πλάτος $b_f, \text{in.}$	Πάχος $t_f, \text{in.}$		I_x, in^4	S_x, in^3	$r_x, \text{in.}$	I_y, in^4	S_y, in^3	$r_y, \text{in.}$
W12 × 96	28.2	12.7	12.2	0.900	0.550	833	131	5.44	270	44.4	3.09
72	21.1	12.3	12.0	0.670	0.430	597	97.4	5.31	195	32.4	3.04
50	14.6	12.2	8.08	0.640	0.370	391	64.2	5.18	56.3	13.9	1.96
40	11.7	11.9	8.01	0.515	0.295	307	51.5	5.13	44.1	11.0	1.94
35	10.3	12.5	6.56	0.520	0.300	285	45.6	5.25	24.5	7.47	1.54
30	8.79	12.3	6.52	0.440	0.260	238	38.6	5.21	20.3	6.24	1.52
26	7.65	12.2	6.49	0.380	0.230	204	33.4	5.17	17.3	5.34	1.51
22	6.48	12.3	4.03	0.425	0.260	156	25.4	4.91	4.66	2.31	0.848
16	4.71	12.0	3.99	0.265	0.220	103	17.1	4.67	2.82	1.41	0.773
W10 × 112	32.9	11.4	10.4	1.25	0.755	716	126	4.66	236	45.3	2.68
68	20.0	10.4	10.1	0.770	0.470	394	75.7	4.44	134	26.4	2.59
54	15.8	10.1	10.0	0.615	0.370	303	60.0	4.37	103	20.6	2.56
45	13.3	10.1	8.02	0.620	0.350	248	49.1	4.32	53.4	13.3	2.01
39	11.5	9.92	7.99	0.530	0.315	209	42.1	4.27	45.0	11.3	1.98
33	9.71	9.73	7.96	0.435	0.290	171	35.0	4.19	36.6	9.20	1.94
30	8.84	10.5	5.81	0.510	0.300	170	32.4	4.38	16.7	5.75	1.37
22	6.49	10.2	5.75	0.360	0.240	118	23.2	4.27	11.4	3.97	1.33
19	5.62	10.2	4.02	0.395	0.250	96.3	18.8	4.14	4.29	2.14	0.874
15	4.41	10.0	4.00	0.270	0.230	68.9	13.8	3.95	2.89	1.45	0.810
W8 × 58	17.1	8.75	8.22	0.810	0.510	228	52.0	3.65	75.1	18.3	2.10
48	14.1	8.50	8.11	0.685	0.400	184	43.2	3.61	60.9	15.0	2.08
40	11.7	8.25	8.07	0.560	0.360	146	35.5	3.53	49.1	12.2	2.04
35	10.3	8.12	8.02	0.495	0.310	127	31.2	3.51	42.6	10.6	2.03
31	9.12	8.00	8.00	0.435	0.285	110	27.5	3.47	37.1	9.27	2.02
28	8.24	8.06	6.54	0.465	0.285	98.0	24.3	3.45	21.7	6.63	1.62
24	7.08	7.93	6.50	0.400	0.245	82.7	20.9	3.42	18.3	5.63	1.61
21	6.16	8.28	5.27	0.400	0.250	75.3	18.2	3.49	9.77	3.71	1.26
18	5.26	8.14	5.25	0.330	0.230	61.9	15.2	3.43	7.97	3.04	1.23
15	4.44	8.11	4.01	0.315	0.245	48.0	11.8	3.29	3.41	1.70	0.876
13	3.84	7.99	4.00	0.255	0.230	39.6	9.91	3.21	2.73	1.37	0.843
W6 × 25	7.34	6.38	6.08	0.455	0.320	53.4	16.7	2.70	17.1	5.61	1.52
20	5.87	6.20	6.02	0.365	0.260	41.4	13.4	2.66	13.3	4.41	1.50
16	4.74	6.28	4.03	0.405	0.260	32.1	10.2	2.60	4.43	2.20	0.967
12	3.55	6.03	4.00	0.280	0.230	22.1	7.31	2.49	2.99	1.50	0.918
9	2.68	5.90	3.94	0.215	0.170	16.4	5.56	2.47	2.20	1.11	0.905
W5 × 19	5.56	5.15	5.03	0.430	0.270	26.3	10.2	2.17	9.13	3.63	1.28
16	4.71	5.01	5.00	0.360	0.240	21.4	8.55	2.13	7.51	3.00	1.26
W4 × 13	3.83	4.16	4.06	0.345	0.280	11.3	5.46	1.72	3.86	1.90	1.00

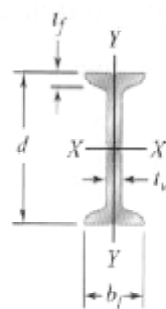
Πίνακας 3: Πρότυπες Διατομές W
Βιβλιογραφία(1)



Συμβολισμός †	Εμβαδόν A , mm ²	Ύψος d , mm	Πέλμα		Πάχος Κορμού t_w , mm	Αξονας X-X			Αξονας Y-Y		
			Πλάτος b_f , mm	Πάχος t_f , mm		I_x 10 ⁶ mm ⁴	S_x 10 ³ mm ³	r_x mm	I_y 10 ⁶ mm ⁴	S_y 10 ³ mm ³	r_y mm
W310 × 143	18200	323	310	22.9	14.0	347	2150	138	112	728	78.5
107	13600	312	305	17.0	10.9	248	1600	135	81.2	531	77.2
74	9420	310	205	16.3	9.40	163	1050	132	23.4	228	49.8
60	7550	302	203	13.1	7.49	128	844	130	18.4	180	49.3
52	6650	318	167	13.2	7.62	119	747	133	10.2	122	39.1
44.5	5670	312	166	11.2	6.60	99.1	633	132	8.45	102	38.6
38.7	4940	310	165	9.65	5.84	84.9	547	131	7.20	87.5	38.4
32.7	4180	312	102	10.8	6.60	64.9	416	125	1.94	37.9	21.5
23.8	3040	305	101	6.73	5.59	42.9	280	119	1.17	23.1	19.6
W250 × 167	21200	290	264	31.8	19.2	298	2060	118	98.2	742	68.1
101	12900	264	257	19.6	11.9	164	1240	113	55.8	433	65.8
80	10200	257	254	15.6	9.4	126	983	111	42.9	338	65.0
67	8580	257	204	15.7	8.89	103	805	110	22.2	218	51.1
58	7420	252	203	13.5	8.00	87.0	690	108	18.7	185	50.3
49.1	6260	247	202	11.0	7.37	71.2	574	106	15.2	151	49.3
44.8	5700	267	148	13.0	7.62	70.8	531	111	6.95	94.2	34.8
32.7	4190	259	146	9.14	6.10	49.1	380	108	4.75	65.1	33.8
28.4	3630	259	102	10.0	6.35	40.1	308	105	1.79	35.1	22.2
22.3	2850	254	102	6.86	5.84	28.7	226	100	1.20	23.8	20.6
W200 × 86	11000	222	209	20.6	13.0	94.9	852	92.7	31.3	300	53.3
71	9100	216	206	17.4	10.2	76.6	708	91.7	25.3	246	52.8
59	7550	210	205	14.2	9.14	60.8	582	89.7	20.4	200	51.8
52	6650	206	204	12.6	7.87	52.9	511	89.2	17.7	174	51.6
46.1	5880	203	203	11.0	7.24	45.8	451	88.1	15.4	152	51.3
41.7	5320	205	166	11.8	7.24	40.8	398	87.6	9.03	109	41.1
35.9	4570	201	165	10.2	6.22	34.4	342	86.9	7.62	92.3	40.9
31.3	3970	210	134	10.2	6.35	31.3	298	88.6	4.07	60.8	32.0
26.6	3390	207	133	8.38	5.84	25.8	249	87.1	3.32	49.8	31.2
22.5	2860	206	102	8.00	6.22	20.0	193	83.6	1.42	27.9	22.3
19.3	2480	203	102	6.48	5.84	16.5	162	81.5	1.14	22.5	21.4
W150 × 37.1	4740	162	154	11.6	8.13	22.2	274	68.6	7.12	91.9	38.6
29.8	3790	157	153	9.27	6.60	17.2	220	67.6	5.54	72.3	38.1
24	3060	160	102	10.3	6.60	13.4	167	66.0	1.84	36.1	24.6
18	2290	153	102	7.11	5.84	9.20	120	63.2	1.24	24.6	23.3
13.5	1730	150	100	5.46	4.32	6.83	91.1	62.7	0.916	18.2	23.0
W130 × 28.1	3590	131	128	10.9	6.86	10.9	167	55.1	3.80	59.5	32.5
23.8	3040	127	127	9.14	6.10	8.91	140	54.1	3.13	49.2	32.0
W100 × 19.3	2470	106	103	8.76	7.11	4.70	89.5	43.7	1.61	31.1	25.4

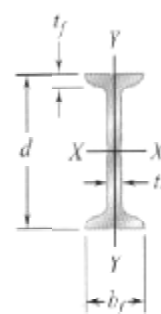
Πίνακας 4: Πρότυπες διατομές W
Βιβλιογραφία(1)

ΠΡΟΤΥΠΕΣ ΔΙΑΤΟΜΕΣ S



Συμβολισμός †	Εμβαδόν $A, \text{ in}^2$	Ύψος $d, \text{ in.}$	Πέλιμα		Πάχος Κορμού $t_w, \text{ in.}$	Αξονας X-X			Αξονας Y-Y		
			Πλάτος $b_f, \text{ in.}$	Πάχος $t_f, \text{ in.}$		$I_x, \text{ in}^4$	$S_x, \text{ in}^3$	$r_{xx}, \text{ in.}$	$I_y, \text{ in}^4$	$S_y, \text{ in}^3$	$r_{yy}, \text{ in.}$
S24 × 121	35.5	24.5	8.05	1.09	0.800	3160	258	9.43	83.0	20.6	1.53
106	31.1	24.5	7.87	1.09	0.620	2940	240	9.71	76.8	19.5	1.57
100	29.3	24.0	7.25	0.870	0.745	2380	199	9.01	47.4	13.1	1.27
90	26.5	24.0	7.13	0.870	0.625	2250	187	9.21	44.7	12.5	1.30
80	23.5	24.0	7.00	0.870	0.500	2100	175	9.47	42.0	12.0	1.34
S20 × 96	28.2	20.3	7.20	0.920	0.800	1670	165	7.71	49.9	13.9	1.33
86	25.3	20.3	7.06	0.920	0.660	1570	155	7.89	46.6	13.2	1.36
75	22.0	20.0	6.39	0.795	0.635	1280	128	7.62	29.5	9.25	1.16
66	19.4	20.0	6.26	0.795	0.505	1190	119	7.83	27.5	8.78	1.19
S18 × 70	20.5	18.0	6.25	0.691	0.711	923	103	6.70	24.0	7.69	1.08
54.7	16.0	18.0	6.00	0.691	0.461	801	89.0	7.07	20.7	6.91	1.14
S15 × 50	14.7	15.0	5.64	0.622	0.550	485	64.7	5.75	15.6	5.53	1.03
42.9	12.6	15.0	5.50	0.622	0.411	446	59.4	5.95	14.3	5.19	1.06
S12 × 50	14.6	12.0	5.48	0.659	0.687	303	50.6	4.55	15.6	5.69	1.03
40.8	11.9	12.0	5.25	0.659	0.462	270	45.1	4.76	13.5	5.13	1.06
35	10.2	12.0	5.08	0.544	0.428	228	38.1	4.72	9.84	3.88	0.980
31.8	9.31	12.0	5.00	0.544	0.350	217	36.2	4.83	9.33	3.73	1.00
S10 × 35	10.3	10.0	4.94	0.491	0.594	147	29.4	3.78	8.30	3.36	0.899
25.4	7.45	10.0	4.66	0.491	0.311	123	24.6	4.07	6.73	2.89	0.950
S8 × 23	6.76	8.00	4.17	0.425	0.441	64.7	16.2	3.09	4.27	2.05	0.795
18.4	5.40	8.00	4.00	0.425	0.271	57.5	14.4	3.26	3.69	1.84	0.827
S6 × 17.2	5.06	6.00	3.57	0.359	0.465	26.2	8.74	2.28	2.29	1.28	0.673
12.5	3.66	6.00	3.33	0.359	0.232	22.0	7.34	2.45	1.80	1.08	0.702
S5 × 10	2.93	5.00	3.00	0.326	0.214	12.3	4.90	2.05	1.19	0.795	0.638
S4 × 9.5	2.79	4.00	2.80	0.293	0.326	6.76	3.38	1.56	0.887	0.635	0.564
7.7	2.26	4.00	2.66	0.293	0.193	6.05	3.03	1.64	0.748	0.562	0.576
S3 × 7.5	2.20	3.00	2.51	0.260	0.349	2.91	1.94	1.15	0.578	0.461	0.513
5.7	1.66	3.00	2.33	0.260	0.170	2.50	1.67	1.23	0.447	0.383	0.518

Πίνακας 5: Πρότυπες Διατομές S
Βιβλιογραφία(1)



Συμβολισμός †	Εμβαδόν A, mm^2	Ύψος d, mm	Πέλμα		Πάχος Κορμού t_w, mm	Αξονας X-X			Αξονας Y-Y		
			Πλάτος b_f, mm	Πάχος t_f, mm		I_x 10^6mm^4	S_x 10^3mm^3	r_x mm	I_y 10^6mm^4	S_y 10^3mm^3	r_y mm
S610 × 180	22900	622	204	27.7	20.3	1320	4230	240	34.5	338	38.9
158	20100	622	200	27.7	15.7	1220	3930	247	32.0	320	39.9
149	18900	610	184	22.1	18.9	991	3260	229	19.7	215	32.3
134	17100	610	181	22.1	15.9	937	3060	234	18.6	205	33.0
119	15200	610	178	22.1	12.7	874	2870	241	17.5	197	34.0
S510 × 143	18200	516	183	23.4	20.3	695	2700	196	20.8	228	33.8
128	16300	516	179	23.4	16.8	653	2540	200	19.4	216	34.5
112	14200	508	162	20.2	16.1	533	2100	194	12.3	152	29.5
98.2	12500	508	159	20.2	12.8	495	1950	199	11.4	144	30.2
S460 × 104	13200	457	159	17.6	18.1	384	1690	170	10.0	126	27.4
81.4	10300	457	152	17.6	11.7	333	1460	180	8.62	113	29.0
S380 × 74	9480	381	143	15.8	14.0	202	1060	146	6.49	90.6	26.2
64	8130	381	140	15.8	10.4	186	973	151	5.95	85.0	26.9
S310 × 74	9420	305	139	16.7	17.4	126	829	116	6.49	93.2	26.2
60.7	7680	305	133	16.7	11.7	112	739	121	5.62	84.1	26.9
52	6580	305	129	13.8	10.9	94.9	624	120	4.10	63.6	24.9
47.3	6010	305	127	13.8	8.89	90.3	593	123	3.88	61.1	25.4
S250 × 52	6650	254	125	12.5	15.1	61.2	482	96.0	3.45	55.1	22.8
37.8	4810	254	118	12.5	7.90	51.2	403	103	2.80	47.4	24.1
S200 × 34	4360	203	106	10.8	11.2	26.9	265	78.5	1.78	33.6	20.2
27.4	3480	203	102	10.8	6.88	23.9	236	82.8	1.54	30.2	21.0
S150 × 25.7	3260	152	90.7	9.12	11.8	10.9	143	57.9	0.953	21.0	17.1
18.6	2360	152	84.6	9.12	5.89	9.16	120	62.2	0.749	17.7	17.8
S130 × 15	1890	127	76.2	8.28	5.44	5.12	80.3	52.1	0.495	13.0	16.2
S100 × 14.1	1800	102	71.1	7.44	8.28	2.81	55.4	39.6	0.369	10.4	14.3
11.5	1460	102	67.6	7.44	4.90	2.52	49.7	41.7	0.311	9.21	14.6
S75 × 11.2	1420	76.2	63.8	6.60	8.86	1.21	31.8	29.2	0.241	7.55	13.0
8.5	1070	76.2	59.2	6.60	4.32	1.04	27.4	31.2	0.186	6.28	13.2

Πίνακας 6: Πρότυπες Διατομές S
Βιβλιογραφία(1)

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ^(*)

1. Ferdinand P. Beer, E. Russell Johnston, Jr. John DeWolf, David F. Mazurek, ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ, 6^η Έκδοση, ΕΔΟΣΕΙΣ ΤΖΙΟΛΑ , Copyright 2014
2. Γεώργιος Μπαράκος, ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΤΟΧΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ, Πάτρα 2000
3. Σημειώσεις Δρ. Γεωργατζίνου Κ. ΑΝΤΟΧΗ ΥΛΙΚΩΝ- Λυγισμός
4. Διπλωματική εργασία Νικόλαου Ε. Βαονάκη, Πλευρικός Λυγισμός Δοκών υπό Κάμψη και Αξονικό φορτίο, Αθήνα 2013
5. Ανοιχτά Ακαδημαϊκά μαθήματα ΕΜΠ, ΣΙΔΗΡΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ Ι- ΔΙΑΛΕΞΗ 6 – ΘΛΙΒΟΜΕΝΑ ΜΕΛΗ, Αθήνα 2014
6. Ηλ. Διευθύνσεις: <https://google.com>, <https://Civildigital.com>, <https://repository.kallipos.gr>, <https://groups.tti.tamu.edu>, <https://engineeringcivil.org>, <https://rasor.ntua.gr>
7. Κωνσταντίνος Ι. Γιαννακόπουλος, Ανοιχτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Ανώτατο Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Πειραιά Τεχνολογικού Τομέα

^(*) Οι παραπάνω καταχωρήσεις αφορούν τα εξής:

1. Ελληνικό Βιβλίο, 2. Ξενόγλωσσο Βιβλίο, 3. Δημοσίευση σε περιοδικό, 4. Δημοσίευση σε πρακτικά συνεδρίου.

