



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Πτυχιακή Εργασία

**ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΡΟΗΣ ΓΥΡΩ ΑΠΟ
ΤΥΠΙΚΕΣ ΔΙΑΤΟΜΕΣ ΜΕΣΟΒΑΘΡΟΥ ΓΕΦΥΡΑΣ**

ΔΗΜΗΤΡΑ Ε. ΤΣΕΛΛΟΥ

Αριθμός μητρώου: **7154**

Επιβλέπων

ΝΙΚΟΛΑΟΣ Θ. ΦΟΥΡΝΙΩΤΗΣ
Επίκουρος Καθηγητής

Πάτρα, 2020

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή μου, κ. Φουρνιώτη Νικόλαο, Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Πελοποννήσου, που με τις πολύτιμες υποδείξεις και παρατηρήσεις του συνέβαλε στη διαμόρφωση μιας πιο ολοκληρωμένης εικόνας γύρω από το επάγγελμα του Πολιτικού Μηχανικού και διεύρυνε τους ορίζοντές μου και το ενδιαφέρον μου για την έρευνα.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες αποδίδονται στον κ. Τζιρτζιλάκη Ευστράτιο, Αναπληρωτή Καθηγητή και πρόεδρο του Τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών του Πανεπιστημίου Πελοποννήσου καθώς και στο Εργαστήριο Ρευστομηχανικής του Τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών για την ευγενική παραχώρηση του κώδικα ANSYS FLUENT 14.5.

Τέλος, οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένειά μου και στα κοντινά μου πρόσωπα για την αμέριστη τους κατανόηση και στήριξη σε όλη την διάρκεια τόσο των σπουδών μου.

Τσέλλου Δήμητρα
Πάτρα, 2020

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα πτυχιακή εργασία πραγματεύεται την ανάλυση τυρβώδους ροής σε ανοικτούς αγωγούς παρουσία βάθρων γέφυρας. Μελετώνται δύο περιπτώσεις ως προς τη διατομή του βάθρου. Η περίπτωση κυλινδρικού βάθρου καθώς και βάθρου ορθογωνικής διατομής με ημικυκλικό ρύγχος και ουρά. Κάθε βάθρο ξεχωριστά τοποθετείται στον πυθμένα ενός καναλιού με κανονικό βάθος ροής 0,1 m και μελετάται το πεδίο ροής που προκύπτει λόγω της παρουσίας του βάθρου. Η ροή είναι υποκρίσιμη και η κλίση του πυθμένα του καναλιού είναι 1:1000.

Για την επίλυση αξιοποιούνται οι εξισώσεις Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS) και για το κλείσιμο τύρβης χρησιμοποιείται το μοντέλο δύο εξισώσεων $k-\epsilon$. Η διαχείριση της ελεύθερης επιφάνειας γίνεται με τη μέθοδο Volume of Fluid (VOF), ενώ η αριθμητική επίλυση βασίζεται στη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων και πραγματοποιείται με το υπολογιστικό πακέτο Fluent 14.5 CFD της εταιρίας ANSYS Inc, το οποίο παραχωρήθηκε από το Εργαστήριο Ρευστομηχανικής του Τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών του Πανεπιστημίου Πελοποννήσου.

Αφορμή για το συγκεκριμένη διερεύνηση αποτέλεσε η ανάγκη που υπάρχει να κατανοηθεί το πεδίο ροής ανάντη μιας κατασκευής όπως είναι το βάθρο γέφυρας που τοποθετείται σε ανοικτό αγωγό., όπως , Η κατανόηση του πεδίου ροής μπορεί να προσφέρει σημαντικές πληροφορίες για την κατανομή των διατμητικών τάσεων που αναπτύσσονται στον πυθμένα κυρίως στην άμεση γειτονία του βάθρου, για την πρόβλεψη και αποφυγή φαινομένων υποσκαφής.

Στη μνήμη του παππού μου Ανδρέα...

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	iii
ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	1
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΓΕΦΥΡΕΣ ΚΑΙ Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΟΥΣ ΣΤΗ ΡΟΗ.....	3
1.1 ΓΕΝΙΚΑ	3
1.2 ΕΙΔΗ ΓΕΦΥΡΩΝ	4
1.3 ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣ ΤΩΝ ΒΑΘΡΩΝ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΡΟΗΣ ΤΟΥ ΠΟΤΑΜΟΥ	6
1.3.1 ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΡΟΗ.....	7
1.3.2 ΑΝΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΡΟΗ	10
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΤΥΡΒΩΔΗΣ ΡΟΗ ΣΕ ΑΝΟΙΚΤΟΥΣ ΑΓΩΓΟΥΣ.....	11
2.1 ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΤΙΣ ΤΥΡΒΩΔΕΙΣ ΡΟΕΣ.....	11
2.2 ΟΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΔΙΕΠΟΥΝ ΤΗΝ ΤΥΡΒΩΔΗ ΡΟΗ ΜΕ ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ	13
2.2.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ RAYNOLDS AVERAGE NAVIER – STOKES.....	13
2.2.2 ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ ΤΗΣ ΕΛΕΥΘΕΡΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ	14
2.2.3 Η ΜΕΘΟΔΟΣ VOF ΓΙΑ ΤΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΕΛΕΥΘΕΡΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ.....	16
2.3 ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΛΕΙΣΙΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΤΥΡΒΗΣ.....	17
2.3.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΤΥΡΒΩΔΟΥΣ ΙΞΩΔΟΥΣ.....	17
2.3.2 ΜΟΝΤΕΛΑ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ.....	19
2.3.2.1 ΣΤΑΘΕΡΟ ΤΥΡΒΩΔΕΣ ΙΞΩΔΕΣ – ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΤΥΡΒΩΔΟΥΣ ΔΙΑΧΥΣΕΩΣ.....	20
2.3.2.2 ΜΟΝΤΕΛΑ ΜΗΚΟΥΣ ΑΝΑΜΕΙΞΕΩΣ.....	21
2.3.3 ΜΟΝΤΕΛΑ ΜΙΑΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ	22
2.3.4 ΜΟΝΤΕΛΑ ΔΥΟ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ.....	22
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ ΡΟΗΣ ΣΕ ΑΝΟΙΚΤΟΥΣ ΑΓΩΓΟΥΣ	29
3.1 ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΟΡΙΑΚΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ ΕΙΣΟΔΟΥ-ΕΞΟΔΟΥ	29
3.2 ΔΙΑΧΕΙΡΗΣΗ ΤΟΙΧΩΜΑΤΟΣ.....	30
3.2.1 Η ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΗ ΤΑΣΗ ΠΛΗΣΙΟΝ ΤΟΥ ΤΟΙΧΩΜΑΤΟΣ.....	31
3.2.2 ΤΑ ΜΕΣΑ ΠΡΟΦΙΛ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ.....	33
3.2.3 Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ ΤΟΙΧΩΜΑΤΟΣ (LAW OF THE WALL).....	34
3.2.4 ΤΟ ΙΞΩΔΕΣ ΥΠΟΣΤΡΩΜΑ	34
3.2.5 Ο ΝΟΜΟΣ ΑΠΟΚΛΙΣΕΩΣ ΤΗΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ (ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΣΤΗΝ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ ΖΩΝΗ).....	36

3.2.7 ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΤΟΥ ΤΟΙΧΩΜΑΤΟΣ.....	38
3.2.8 ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΣΤΟ ΤΟΙΧΩΜΑ	42
3.2.9 ΔΙΑΧΕΙΡΗΣΗ ΤΗΣ ΕΛΕΥΘΕΡΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ.....	43
3.3 ΜΕΛΕΤΗ ΑΥΞΗΣΗΣ ΤΗΣ ΕΛΕΥΘΕΡΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΛΟΓΟΥ ΤΗΣ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣ ΒΑΘΡΟΥ (BACKWATER EFFECT).....	44
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ.....	45
4.1 ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΗ ΑΝΑΛΥΣΗ	45
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ FLUENT	51
5.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗ.....	51
5.1.1 ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΣΤΟ ANSYS-FLUENT	53
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ	59
6.1 ΚΑΝΑΛΙ ΧΩΡΙΣ ΒΑΘΡΟ – ΕΠΠΕΔΟΣ ΠΥΘΜΕΝΑΣ.....	59
6.2 ΚΑΝΑΛΙ ΜΕ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΒΑΘΡΟ	65
6.3 ΚΑΝΑΛΙ ΜΕ ΒΑΘΡΟ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ ΜΕ ΗΜΙΚΥΚΛΙΚΟ ΡΥΓΧΟΣ ΚΑΙ ΟΥΡΑ.....	72
6.4 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ.....	76
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	77

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στις μέρες μας οι μεταφορές αποτελούν βασικό «αγαθό» και είναι ένας δείκτης ανάπτυξης κάθε χώρας. Η ανάπτυξη της τεχνολογίας, του διεθνούς εμπορίου και η απαίτηση ελεύθερης διακίνησης προϊόντων και ατόμων καθιστούν την δημιουργία συστημάτων μεταφοράς αναγκαία. Οι γέφυρες απαρτίζουν σημαντικό μέρος των συγκοινωνιακών υποδομών καθώς συνδέουν τμήματα που μέχρι πριν ήταν αποκομμένα.

Πέραν των πλεονεκτημάτων που έχει μία γέφυρα για τα συστήματα μεταφοράς, αποτελεί ταυτόχρονα και αντικείμενο εκτενούς μελέτης για τους υδραυλικούς μηχανικούς διότι η τοποθέτησή τους σε ένα υδάτινο περιβάλλον, για παράδειγμα την κοίτη ενός ποταμού προκαλεί μία σειρά από επιπτώσεις. Πιο συγκεκριμένα, η παρουσία ενός βάθρου στην ροή του νερού έχει ως αποτελέσματα την εμφάνιση κάποιων φαινομένων, όπως είναι η στερεομεταφορά, η παραμόρφωση της κοίτης του ποταμού, η υποσκαφή και η πλημμύρα. Τα παραπάνω φαινόμενα πρέπει να λαμβάνονται υπόψιν πριν την κατασκευή τέτοιων έργων για την αποφυγή εμφάνισης βλαβών ή ακόμη και ολικής κατάρρευσης.

Στη πλειονότητα των περιπτώσεων, τα υδάτινα σώματα που συναντώνται στη φύση αποτελούν ροές με ελεύθερη επιφάνεια. Ο ποταμός αποτελεί ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτών των ροών και μάλιστα η τοποθέτηση υδραυλικών κατασκευών στη ροή του βρίσκει εφαρμογή σε πολλά πρακτικά προβλήματα που καλείται να αντιμετωπίσει ένας υδραυλικός μηχανικός. Στα πλαίσια της παρούσας πτυχιακής εργασίας μελετάται η περίπτωση ανοικτού καναλιού, ορθογωνικής διατομής, και το πεδίο ροής που διαμορφώνεται εξαιτίας της παρουσίας ενός βάθρου στη ροή που αναπτύσσεται εντός του ανοικτού αγωγού.

Ειδικότερα, πραγματοποιούνται αριθμητικές προσομοιώσεις για την περίπτωση ανοικτού αγωγού πλάτους $b=0,30$ m και μήκους $l=8,0$ m, ενώ το κανονικό βάθος ροής στον αγωγό είναι $y_n=0,1$ m. Για τη ροή στον υπό εξέταση αγωγό θεωρήθηκε αριθμός Reynolds $Re \approx 4,83 \times 10^4$, ύψος τραχύτητας τοιχωμάτων $k_s=0,0023$ m και κατά μήκος κλίση πυθμένα $S_o=0,001$ (1:1000). Για λόγους ελέγχου ακρίβειας της αριθμητικής μεθόδου που χρησιμοποιήθηκε, αρχικά επιλύθηκε αριθμητικά η περίπτωση τρισδιάστατου καναλιού ορθογωνικής διατομής χωρίς βάθρο και τα αποτελέσματα που προέκυψαν συγκρίθηκαν αναλυτικά με τα αποτελέσματα δισδιάστατης ροής (κατακόρυφο επίπεδο) υπεράνω επιπέδου πυθμένα. Τα αποτελέσματα βρέθηκαν σε καλή συμφωνία μεταξύ τους, γεγονός που επιβεβαίωσε την καταλληλότητα της μεθόδου.

Στόχος της πτυχιακής αυτής είναι η τρισδιάστατη μοντελοποίηση και προσομοίωση της ροής γύρω από τυπικές διατομές μεσοβάθρων γέφυρας και ιδιαίτερα η συμπεριφορά της ροής ανάντη του βάθρου (Backwater Effect).

Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό υπολογιστικής ρευστοδυναμικής (CFD) ANSYS 14.5 Fluent στο οποίο έγιναν διάφορες προσομοιώσεις με τη χρήση της μεθόδου πεπερασμένων όγκων (Finite Volume Method). Η απεικόνιση της γεωμετρίας του καναλιού έγινε με τη χρήση του Design Modeler, όπου μετά από απαραίτητες διορθώσεις δημιουργήθηκε το υπολογιστικό πλέγμα και έγιναν οι επιθυμητές προσομοιώσεις της ροής. Η τυρβώδης ροή (turbulence) λήφθηκε υπόψη με τη χρήση της μεθόδου RANS, που εισάγει δύο επιπλέον μερικές διαφορικές εξισώσεις για την μοντελοποίηση της τύρβης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΓΕΦΥΡΕΣ ΚΑΙ Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΟΥΣ ΣΤΗ ΡΟΗ

1.1 ΓΕΝΙΚΑ

Τα τελευταία χρόνια, η μελέτη τυρβώδους ροής σε ανοικτό αγωγό με βάθρα γέφυρας αποτελεί αντικείμενο ενδεδειγμένης έρευνας. Τα ανοικτά κανάλια είναι φυσικές ή ανθρωπογενής κατασκευές μεταφοράς ύδατος όπου ρέουν με ελεύθερη επιφάνεια και σε αυτά συμπεριλαμβάνονται τα ποτάμια και ρέματα. Η ροή με ελεύθερη επιφάνεια μπορεί να παρατηρηθεί και σε αγωγούς με κλειστή μορφή, όπως για παράδειγμα σε σωλήνες και οχετούς, υπό τον όρο ότι ο αγωγός ρέει μερικώς πλήρης. Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό των ανοικτών αγωγών είναι ότι στην ελεύθερη επιφάνειάς τους η πίεση είναι ατμοσφαιρική.

Η ιδιότητα αυτή είναι σημαντική επειδή, σε αντίθεση με τη ροή σε κλειστούς αγωγούς, η μεταβολή της πίεσης στην ροή ανοικτού διαύλου εκφράζεται ως μεταβολή στο βάθος ροής (η επιφάνεια του νερού μπορεί να αυξηθεί ή να μειωθεί) και οι δυνάμεις στη διεπιφάνεια νερού - αέρα μπορούν να δημιουργήσουν επιφανειακά κύματα. Αυτά τα κύματα μπορούν να ασκήσουν σημαντικό έλεγχο στη μέση ροή.

Η τοποθέτηση μιας γέφυρας σε ένα ποτάμι διαμορφώνει μια στένωση στη φυσική του κοίτη και συνεπώς δημιουργείται ένα εμπόδιο στη ροή του. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την απώλεια ενέργειας καθώς η ροή συναντά τη γέφυρα. Για να ξεπεραστεί αυτή η απώλεια της ενέργειας, αυξάνεται η στάθμη του νερού ανάντη αυτής. Αυτό το πρόσθετο ύψος νερού πάνω από το κανονικό βάθος ροής ονομάζεται afflux και η διακύμανσή του προς τα ανάντη back water profile.

Η ακριβής εκτίμηση των χαρακτηριστικών της ροής γύρω από τις θέσεις της γέφυρας αποτελεί βασική μέριμνα για τους μηχανικούς τόσο από την άποψη της σταθερότητας της ίδιας της γέφυρας όσο και των προβλημάτων που προκαλούνται από την ανεπαρκή – μη αποδοτική υδραυλική σχεδιάσή της, όπως η πλημμύρα λόγω της απότομης αύξησης της στάθμης των υδάτων ανάντη της γέφυρας.

Η διακύμανση της αύξησης του νερού ανάντη της κατασκευής λόγω του εμποδίου (βάθρου) εξαρτάται κυρίως από το ποσοστό παρεμπόδισης της ροής, το είδος της, τη γεωμετρία του βάθρου καθώς και την θέση του στο κανάλι. Η γνώση του προφίλ της ροής του ποταμού είναι εξέχουσας σημασίας όταν πρόκειται να κατασκευαστεί μια γέφυρα. Η κατασκευή μιας υδραυλικά μη αποδοτικής γέφυρας μπορεί να προκαλέσει πλημμύρα ανάντη ή ακόμη και να επιδεινώσει μία υπάρχουσα κατάσταση. Το γεγονός αυτό θα ήταν καταστρεπτικό και δαπανηρό, επομένως είναι σημαντικός ο σχεδιασμός μιας υδραυλικά αποδοτικής κατασκευής και ο ακριβής υπολογισμός του back water

profile. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις που η πλημμυρά θα λάμβανε χώρα και χωρίς την παρουσία κάποιας γέφυρας λόγω της ανεπάρκειας του καναλιού να φέρει την πλημμυρική παροχή.

Κατάντη, η ροή διαχωρίζεται και προκαλεί υποσκαφή λόγω της αρνητικής πίεσης και αντίστροφης ροής που δημιουργείται λόγω της παρουσίας του βάθρου. Το βάθος και η γεωμετρία της υποσκαφής αυτής μπορεί να οδηγήσουν σε κατάρρευση των βάθρων, συνεπώς και της γέφυρας (Hamill 1999, Hickin 1995, Osman 2006).

1.2 ΕΙΔΗ ΓΕΦΥΡΩΝ

Οι σύγχρονες γέφυρες εμφανίζουν μεγάλες διαφοροποιήσεις στον τρόπο λειτουργίας τους ανάλογα με τη σχεδίαση τους και την κατασκευή τους. Υπάρχουν πολλές διατάξεις γεφυρών, οι οποίες προτάθηκαν σύμφωνα με την τεχνολογική πρόοδο, τις κατασκευαστικές ικανότητες και τις απαιτήσεις της αντίστοιχης περιόδου.

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιαστούν οι κατηγορίες των γεφυρών και των συνήθη διατομών βάθρων.

Οι γέφυρες είναι σημαντικά έργα ενός αυτοκινητοδρόμου, τόσο από τεχνικής δυσκολίας όσο και από οικονομικής βιωσιμότητας. Ως γέφυρα ορίζεται ένα τεχνικό έργο με οποιαδήποτε διάταξη ανοιγμάτων άνω των 6 m που φέρει οδό πάνω από ένα εμπόδιο.

Τα είδη των γεφυρών ποικίλουν και εξαρτώνται από την χρήση τους, το υλικό κατασκευής και την στατική λειτουργία του φορέα.

Ανάλογα την χρήση τους διακρίνονται σε:

- Οδικές
- Πεζογέφυρες
- Σιδηροδρομικές
- Ειδικές γέφυρες

Ανάλογα το υλικό κατασκευής τους διακρίνονται σε:

- Ξύλινες
- Λίθινες
- Από σκυρόδεμα (άοπλο, οπλισμένο, προεντεταμένο)
- Μεταλλικές
- Σύμμικτες

Ανάλογα την στατική λειτουργία του φορέα διακρίνονται σε:

- Γέφυρες επιφανειακών φορέων (πλάκες, εσχάρες, πολυκυψελωτές διατομές)
- Γέφυρες φορέων μορφής δοκού (πλακοδοκοί, κιβωτοειδής, σκαφοειδής)
- Πλαισιωτές γέφυρες (με κατακόρυφα ή κεκλιμένα βάθρα)

- Τοξωτές γέφυρες
- Καλωδιωτές γέφυρες
- Κρεμαστές γέφυρες

Ανάλογα με την μορφή σε κάτοψη διακρίνονται σε:

- Ορθές γέφυρες
- Λοξές γέφυρες

Ανάλογα με τη δυνατότητα μετακίνησης οι γέφυρες διακρίνονται σε:

- Σταθερές
- Κινητές (οριζόντια περιστρεφόμενες, περιστροφικά ανυψούμενες, κατακόρυφα ανυψούμενες, κυλιόμενες).

Τα βάθρα αποτελούν ένα από τα σημαντικότερα τμήματα μίας γέφυρας. Πιο συγκεκριμένα, τα ακρόβαθρα τοποθετούνται στην αρχή και στο τέλος μίας γέφυρας και βοηθούν στην ανάληψη των αντιδράσεων του φορέα αναδομής καθώς και των ωθήσεων της επίχωσης, στην εξασφάλιση του απαραίτητου χώρου για τις οριζόντιες μετατοπίσεις και στην μετάβαση από την γέφυρα στο επίχωμα και αντίστροφα. Επιπλέον, τα μεσόβαθρα, όπως φανερώνει και το όνομά τους, τοποθετούνται στο άνοιγμα της γέφυρας και μεταφέρουν τα οριζόντια και κατακόρυφα φορτία στη θεμελίωση καθώς και έχουν κυρίαρχο ρόλο στην αισθητική μίας γέφυρας (Κωνσταντινίδης, 2012).

Συνήθεις μορφές μεσοβάθρων είναι:

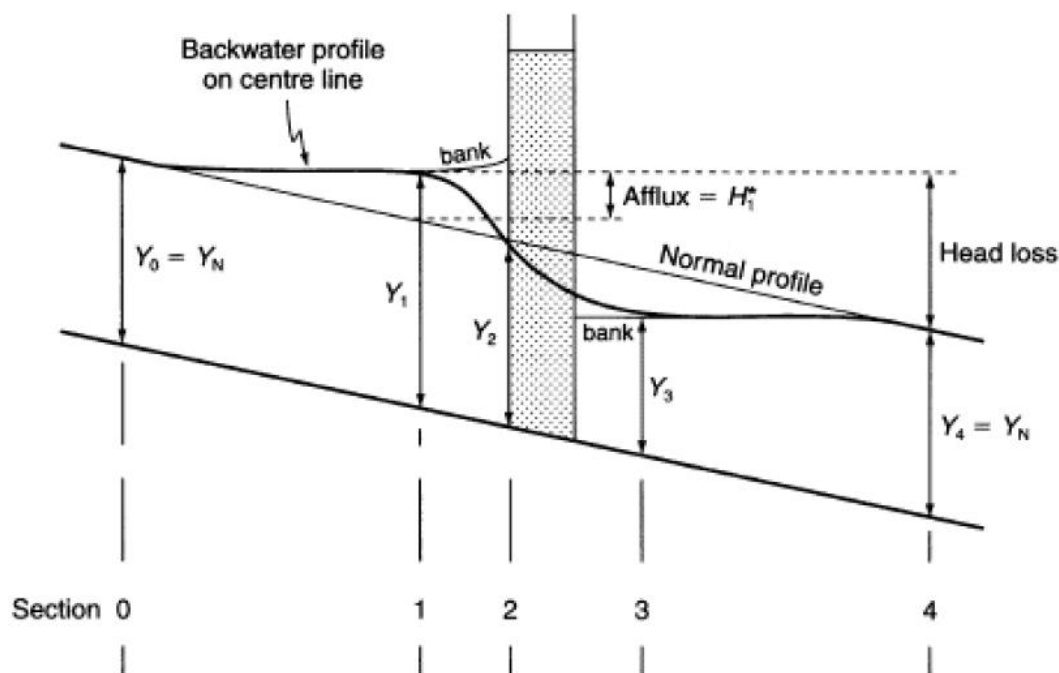
- Κυκλικά
- Ορθογωνικά
- Πολυγωνικά
- Τοιχοειδή

Αυτά διατάζονται είτε ως

- Μεμονωμένοι στύλοι
- Πολλαπλοί στύλοι
- Πολλαπλοί στύλοι με σύζευξη
- Συνδυασμός με ελαστομερή εφέδρανα
- Ελαστομερή εφέδρανα με στερητικό μηχανισμό απορρόφησης ενέργειας

1.3 ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣ ΤΩΝ ΒΑΘΡΩΝ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΡΟΗΣ ΤΟΥ ΠΟΤΑΜΟΥ

Η τοποθέτηση βάθρων σε ένα ποτάμι δημιουργεί φαινόμενα τα οποία έχουν αρνητικό αντίκτυπο σε αυτό ή ακόμα και στην ευρύτερη περιοχή. Τα βάθρα αποτελούν ένα εμπόδιο στη ροή του ποταμού και είναι η αιτία αύξησης της στάθμης του νερού και μεταφοράς αυτής της πληροφορίας προς τα ανάντη όταν η ροή είναι υποκρίσιμη (δηλαδή όταν ο αριθμός Froude είναι μικρότερος της μονάδας).



Εικόνα 1.1 - Διαμήκης τομή ομοιόμορφης ροής σε κανονικό βάθος (Y_N) σε κανάλι ποταμού με το προφίλ επιφάνειας που προκύπτει από την εισαγωγή ενός βάθρου (Les Hamill (1999), Bridge Hydraulics).

Με βάση την Εικ. 1.1, η επίδραση της παρουσίας του βάθρου στη διαμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας στα ανάντη (backwater profile) εκτείνεται ως τη διατομή 0, στην οποία η στένωση δεν έχει καμία επίδραση στην στάθμη του νερού, το βάθος ροής ισούται με το κανονικό βάθος ροής (Y_N) και η ροή είναι ομοιόμορφη. Η απόσταση μεταξύ της στένωσης και του τμήματος 0 εξαρτάται από παράγοντες όπως η γεωμετρία, η τραχύτητα και η κλίση του καναλιού και μπορεί να υπολογιστεί (Chadwick and Morfett, 1993). Εκτός αν η στένωση είναι πολύ μεγάλη, η ροή είναι συνήθως υποκρίσιμη, με βαθμιαίως μεταβαλλόμενη ροή προς τα ανάντη και ταχέως μεταβαλλόμενη ροή προς τα κατάντη του βάθρου.

Αφού περάσει από το τμήμα 1, η επιφάνεια του νερού πέφτει και επιταχύνει περνώντας από το κανονικό βάθος στο τμήμα 2 ανάντη του βάθρου. Ανάμεσα στα τμήματα 2 και 3 το σώμα του νερού έχει μεγάλη επιτάχυνση και υπό κατάλληλες συνθήκες η ροή είναι

έντονα τυρβώδης με στροβίλους δημιουργώντας διάβρωση και υποσκαφή στον πυθμένα λόγω της αποκόλλησης της ροής, ενώ από το τμήμα 3 έως το τμήμα 4, λόγω της υπάρχουσας διάτμησης αρχίζει να επιβραδύνει θέλοντας να πιάσει το κανονικό βάθος ροής. Η απόσταση όπου η ροή θα ξαναγίνει ομοιόμορφη εξαρτάται από τη γεωμετρία του καναλιού, την τραχύτητά του και τα χαρακτηριστικά της ροής.

Οι περισσότερες υδραυλικές μελέτες απαιτούν μία εκτίμηση της μεταβολής της στάθμης του νερού που προκαλείται από την ύπαρξη της κατασκευής. Αυτό σημαίνει ότι η γνώση του προστιθέμενου ύψους νερού ανάντη καθώς και η απώλεια του πιεζομετρικού φορτίου λόγω της παρουσίας του βάθρου είναι απαραίτητη. Η απώλεια ενέργειας περιλαμβάνει την εξέταση της αλλαγής τόσο του φορτίου ταχύτητας όσο και του πιεζομετρικού φορτίου (Les Hamill 1998, Chadwick and Morfett 1993).

1.3.1 ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΡΟΗ

Η ομοιόμορφη ροή επειδή είναι μία απλούστερη κατάσταση χρησιμοποιείται αρχικά για τον καθορισμό και την απεικόνιση του πρόσθετου ύψους νερού πάνω από το κανονικό βάθος ροής (afflux) και της απώλειας του πιεζομετρικού φορτίου. Στην Εικόνα 1.1 παρουσιάζεται η διαμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας σε οποιαδήποτε παροχή.

Το μέγιστο πρόσθετο ύψους νερού δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$H_1^* = Y_1 - Y_N \quad (1.1)$$

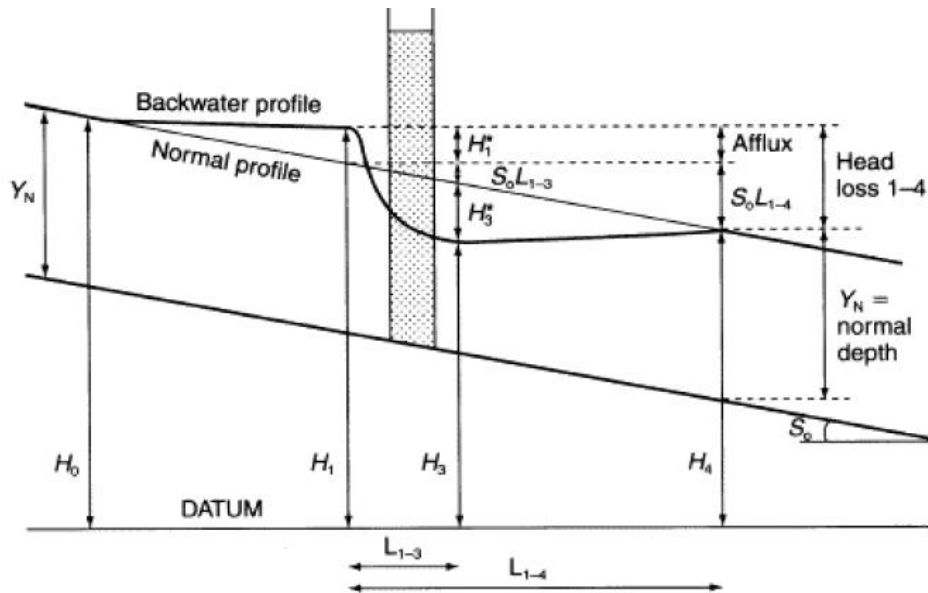
Όπου, Y_1 : το βάθος ροής στο τμήμα 1 (m), και
 Y_N : κανονικό βάθος ροής στο τμήμα 0 (m)

Στην πραγματικότητα ο πυθμένας είναι πιθανό να έχει μία μεταβλητή κλίση και το βάθος ροής να μην είναι σταθερό (Εικόνα 1.2).

Και σε αυτή την περίπτωση το μέγιστο πρόσθετο ύψους νερού είναι η διαφορά του στάθμης με και χωρίς το βάθρο και δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$H_1^* = H_1 - (H_4 + S_0 L_{1-4}) \quad (1.2)$$

Όπου, H_1 : η ανύψωση της στάθμης στο τμήμα 1 (m)
 H_4 : η ανύψωση της στάθμης στο τμήμα 4 (m)
 S_0 : η κλίση του πυθμένα, και
 L_{1-4} : η απόσταση μεταξύ των τμημάτων 1 έως 4 (m)



Εικόνα 1.2 - Διάγραμμα απεικόνισης του πρόσθετου ύψους νερού και της απώλειας του πιεζομετρικού φορτίου για ομοιόμορφη ροή σε κανονικό βάθος με την ανύψωση της επιφάνειας του νερού που μετράται πάνω από ένα σημείο αναφοράς (Hamill 1990).

Η απώλεια του πιεζομετρικού φορτίου είναι η διαφορά της στάθμης της επιφάνειας του νερού μεταξύ δύο συγκεκριμένων σημείων. Με σταθερή κλίση πυθμένα, η πτώση της ενέργειας εξαρτάται από την απόσταση των δύο σημείων.

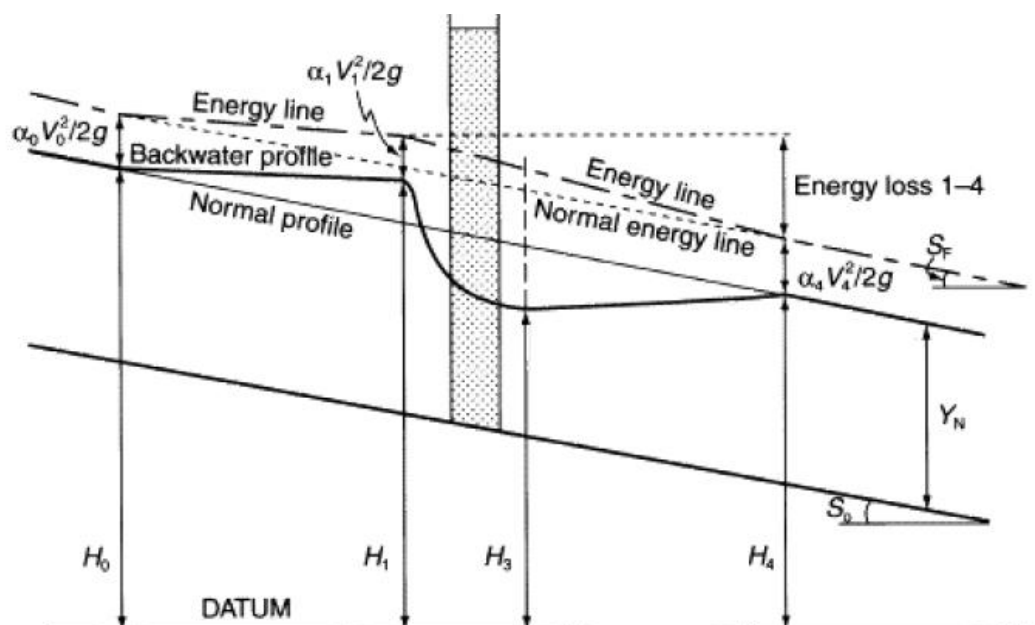
Η πραγματική απώλεια της ενέργειας στη στένωση μετράται μεταξύ των τμημάτων 1 και 4, όπου το κανονικό βάθος ροής έχει επανέλθει (Εικόνα 1.2), και δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\begin{aligned} \text{Head loss}^{(1-4)} &= H_1 - H_4 \\ &= H_1^* - S_0 L_{1-4} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Η παραπάνω σχέση δείχνει ότι το πρόσθετο ύψος νερού και η απώλεια ενέργειας σχετίζονται, όσο αυξάνεται η απόσταση μεταξύ των 2 τμημάτων τόσο αυξάνεται και η απώλεια ενέργειας ενώ το πρόσθετο ύψος όχι. Εάν στον τμήμα 4 η ροή δεν έχει επανέλθει στο κανονικό βάθος λόγω της μεγάλης απώλειας ενέργειας, τότε οι απώλειες φορτίου αυξάνουν από τη διατομή 1 στην 4. 1-4 αυξάνεται.

Στην Εικόνα 1.3 περιγράφει πως ποικίλλει η κλίση της γραμμής ενέργειας κοντά στο βάθρο. Από το τμήμα 0 έως το 1 όπου εμφανίζεται το backwater effect ταχύτητα είναι μικρότερη από την κανονική, συνεπώς μειώνεται η απώλεια της ενέργειας και η κλίση της γραμμής ενέργειας. Στη θέση του βάθρου (τμήμα 2-3) η γραμμή ενέργεια πέφτει λόγω παρεμπόδισης της ροής και μεταξύ των τμημάτων 3 και 4 η ροή επεκτείνεται και μέσω υδραυλικού άλματος (αύξηση του βάθους ροής) λόγω των μεγάλων ενεργειακών

απωλειών η γραμμική ενέργεια λαμβάνει μία πιο απότομη κλίση. Για απλότητα η κλίση της γραμμής ενέργειας μεταξύ των τμημάτων είναι σχεδιασμένη ως ευθεία γραμμή.



Εικόνα 1.3 - Σχηματική αναπαράσταση της κλίσης της γραμμής ενέργειας κοντά σε βάθρο γέφυρας (Hamill 1999).

Η συνολική απώλεια ενέργειας δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$energy\ loss = \left(H_1 - \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} \right) - \left(H_4 - \frac{\alpha_4 V_4^2}{2g} \right) \quad (1.4)$$

Όπου, α : διορθωτικός συντελεστής της ταχύτητας

V : η ταχύτητα ροής στα αντίστοιχα τμήματα (m/s)

g : η επιτάχυνση της βαρύτητας (m)

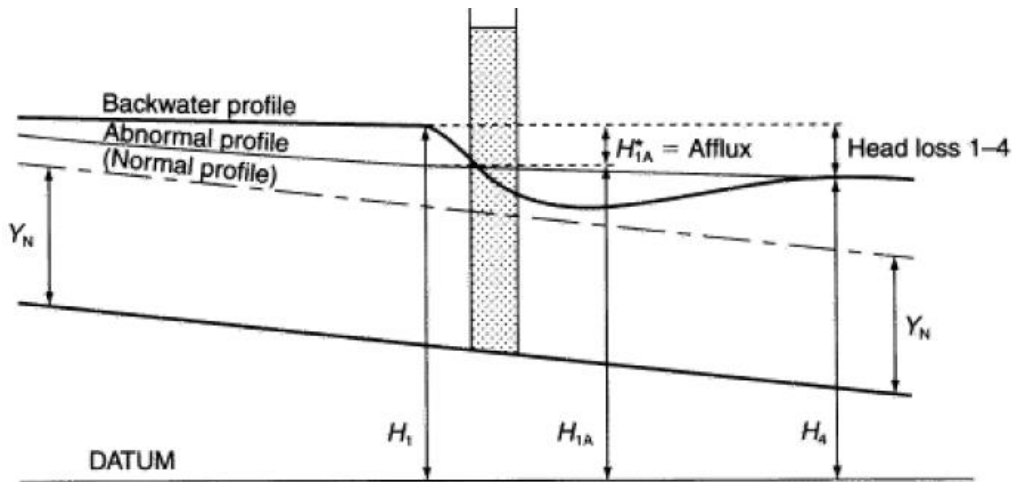
Η απώλεια ενέργειας που προκαλείται λόγω του βάθρου μπορεί να θεωρηθεί ότι προκύπτει από τρία βασικά πράγματα:

- Λόγω της στένωσης που προκαλεί το βάθρο (15%)
- Λόγω της τριβής μεταξύ του νερού και της επιφάνειας του βάθρου (20%), και
- Λόγω επέκτασης της ροής κατάντη (65%)

Γενικά η απώλεια ενέργειας, και κατά συνέπεια το πρόσθετο ύψος νερού, είναι ανάλογη με το φορτίο ταχύτητας του ανοίγματος (Hamill 1998).

1.3.2 ΑΝΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΡΟΗ

Με την ανομοιόμορφη ροή χωρίς την ύπαρξη κάποιου εμποδίου (βάθρου) η κλίση του πυθμένα και η κλίση της ελεύθερης επιφάνειας δεν είναι ίσες που έχει ως αποτέλεσμα το βάθος του νερού να ποικίλλει κατάντη του βάθρου έως το τμήμα 4.



Εικόνα 1.4 - Διάγραμμα απεικόνισης του πρόσθετου ύψους νερού και της απώλειας του πιεζομετρικού φορτίου για ανομοιόμορφη ροή (Hamill 1999).

Σε αυτή η περίπτωση δεν υπάρχει μια απλή σχέση μεταξύ του πρόσθετου ύψους νερού και την απώλεια του ενεργειακού φορτίου. Η απώλεια ενέργειας μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση 1.3.4, και προκαλείται από τους ίδιους παράγοντες που αναφέρθηκαν προηγουμένως. Ωστόσο, η ροή εμφανίζει μεγαλύτερα βάθη και μικρότερες ταχύτητες και είναι πιο αργή από την ομοιόμορφη ροή στα ανάντη. Βέβαια, ανεξάρτητα με το εάν η ροή είναι ομοιόμορφη ή ανομοιόμορφη, είναι σημαντικό να προσδιοριστεί ο τύπος της ροής που υπάρχει στην ενδιαφερόμενη θέση (Hamill 1998). Περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τους τύπους της ροής μπορεί να αναζητήσει κανείς σε πηγές όπως Les Hamill (1998).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΤΥΡΒΩΔΗΣ ΡΟΗ ΣΕ ΑΝΟΙΚΤΟΥΣ ΑΓΩΓΟΥΣ

2.1 ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΤΙΣ ΤΥΡΒΩΔΕΙΣ ΡΟΕΣ

Η πλειοψηφία των ροών που εμφανίζονται στη φύση είναι τυρβώδεις. Παραδείγματα από την καθημερινή ζωή (π.χ. άνεμος, κίνηση νερού σε ποταμούς κλπ.) δίνουν μια διαισθητική κατανόηση του φαινομένου. Η τύρβη δημιουργείται μέσω της αστάθειας (instability) που αναπτύσσεται στις στρωτές ροές σε ανοικτούς αγωγούς και όχι μόνο, καθώς αυξάνεται η ταχύτητα ροής.

Η αστάθεια αυτή ενισχύει τις διαταράξεις (perturbations) στις οποίες υπόκειται το ρευστό και οι οποίες προκαλούν την τύρβη. Οι διαταράξεις αυτές εισάγονται από την είσοδο του αγωγού ή από τυχόν ανωμαλίες στα τοιχώματά του. Το ιξώδες (ή συνεκτικότητα) του ρευστού έχει την τάση να εξομαλύνει (damp out) τις διαταράξεις, καθώς αυτές μεταφέρονται στα κατάντη και στην περίπτωση της στρωτής ροής πράγματι οι διαταράξεις αυτές μπορούν να εξασθενήσουν (attenuated). Όμως αυξανόμενης της ταχύτητας οι αδρανειακές δυνάμεις υπερσχύουν των δυνάμεων του ιξώδους, με αποτέλεσμα οι διαταράξεις αυτές να μην μπορούν να εξασθενήσουν πλέον, ενώ συχνά μπορεί ακόμα και να μεγεθυνθούν. Το φαινόμενο αυτό οδηγεί στη δημιουργία της τύρβης. Στην κλασική περίπτωση μελέτης της ροής σε κλειστό αγωγό, η αστάθεια οδηγεί στην "κατάρρευση" της ροής Poiseuille και στην δημιουργία τυρβώδους μη-παράλληλης ροής, στην οποία η κατανομή της ταχύτητας δεν ακολουθεί πλέον την τυπική παραβολική μορφή. Η φάση μεταβολής της στρωτής ροής σε τυρβώδη λέγεται και μεταβατική φάση.

Η παράμετρος η οποία, μαζί με το μέγεθος και τον τύπο της διαταράξεως, ορίζει την έναρξη της τυρβώδους φάσεως της ροής, είναι ο αριθμός Reynolds, $Re=VL/\nu$, όπου V η ταχύτητα, L το μήκος των στροβίλων και ν το ιξώδες. Σε υψηλούς αριθμούς Reynolds προκαλείται αστάθεια στη ροή η οποία δεν είναι δυνατόν να εξασθενήσει από το ιξώδες του ρευστού. Η αστάθεια αυτή είναι υπαίτια για την δημιουργία της τύρβης, παράγοντας στροβίλους μεγάλης κλίμακας. Οι στροβίλοι αυτοί είναι επίσης ασταθείς και προκαλούν την δημιουργία μικρότερων στροβίλων, και ούτω καθ' εξής, έως ότου το ιξώδες γίνει σημαντικό στις μικρότερες κλίμακες. Αυτή η διαδικασία καταπτώσεως (cascade process), κατά την οποία στροβίλοι μεγάλης κλίμακας εκφυλίζονται σε όλο και μικρότερης κλίμακας στροβίλους, συνεχίζεται ακατάπαυστα μέσα σε μια ροή υψηλού Reynolds αφαιρώντας με αυτόν τον τρόπο ενέργεια από τις μεγάλες κλίμακες και μεταβιβάζοντας την στις μικρότερες, μέχρις ότου αυτή η ενέργεια αναλωθεί (dissipated) από την δράση του ιξώδους στις μικρότερες κλίμακες. Συνεπώς η διαδικασία καταπτώσεως συνδέεται από μια μέση ροή ενέργειας (energy flux) από τις μεγαλύτερες στις μικρότερες κλίμακες. Η ροή αυτή ενέργειας ελέγχεται από τις

μεγαλύτερες κλίμακες και καταλήγει στην ανάλωση μηχανικής ενέργειας από το ιξώδες στις μικρότερες κλίμακες (μετατροπή σε θερμότητα).

Η τύρβη είναι εγγενώς τρισδιάστατη και η τυρβώδης ροή εμφανίζεται ως τυχαία στον χώρο και στο χρόνο και ως εκ τούτου δεν μπορεί να αναπαραχθεί πειραματικά επακριβώς. Εντούτοις η εμπειρία δείχνει ότι οι τυρβώδεις ροές μπορούν να περιγράφουν από τις ίδιες δυναμικές εξισώσεις που περιγράφουν και τις στρωτές ροές, με τις κατάλληλες προσαρμογές.

Στην ανάπτυξη που ακολουθεί θα μελετηθούν με ασυμπίεστα, Νευτώνεια ρευστά. Επιπλέον, θα γίνει η παραδοχή ότι το ιξώδες και η πυκνότητα του ρευστού είναι σταθερά. Τότε η ταχύτητα και η πίεση περιγράφονται από τις εξισώσεις Navier – Stokes, οι οποίες απαρτίζονται από τις εξισώσεις της ορμής στις τρεις διευθύνσεις ενός καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων και την εξίσωση της συνέχειας. Αυτές μπορούν να γραφούν ως (Bernard & Wallace, 2002):

Εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.1)$$

Εξίσωση ορμής:

$$\rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i \quad (2.2)$$

όπου U_i είναι στιγμιαίες ταχύτητες, g_i = το διάνυσμα της επιτάχυνσης της βαρύτητας το οποίο παίρνει την μορφή $(0, 0, -g)$ αν οι άξονες επιλεγούν x_1, x_2 = οριζόντιο επίπεδο και x_3 = θετικός προς τα άνω. Ακόμη σ_{ij} = τανυστής των τάσεων, ο οποίος για ένα ασυμπίεστο ρευστό εκφράζεται από την ακόλουθη καταστατική σχέση:

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + d_{ij} \quad (2.3)$$

όπου P = δυναμική πίεση, δ_{ij} = το δέλτα του Kroneker, οριζόμενο ως:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{για } i = j \\ 0 & \text{για } i \neq j \end{cases} \quad (2.4)$$

και

$$d_{ij} = 2 \mu e_{ij} \quad (2.5)$$

είναι το διαμητικό τμήμα του τανυστή των τάσεων με:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \text{ για } i \neq j \quad (2.6)$$

Βάσει των ανωτέρω, οι εξισώσεις ορμής λαμβάνουν την παρακάτω μορφή:

$$\rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) + \rho g_i \quad (2.7)$$

Στην παρουσίαση των εξισώσεων χρησιμοποιείται τανυστικός συμβολισμός (tensor notation) και η σύμβαση του Einstein. Τέλος, οι παραπάνω εξισώσεις πρέπει να συνοδεύονται από τις κατάλληλες αρχικές και συνοριακές συνθήκες.

2.2 ΟΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΔΙΕΠΟΥΝ ΤΗΝ ΤΥΡΒΩΔΗ ΡΟΗ ΜΕ ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

2.2.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ RAYNOLDS AVERAGE NAVIER – STOKES

Η αδυναμία της επίλυσης των εξισώσεων Navier – Stokes για τυρβώδης ροές, εάν εξαιρεθούν οι αριθμητικές λύσεις με τη μέθοδο DNS (Direct Numerical Simulations) για μικρούς αριθμούς Reynolds, καθιστά αναγκαία την μετατροπή τους σε εξισώσεις που περιγράφουν τις μέσες τιμές των υπό μελέτη ποσοτήτων. Ακολουθώντας την πρακτική που εισήγαγε ο O. Reynolds και εφαρμόζοντας την διαδικασία του μέσου όρου, η εξίσωση της συνέχειας λαμβάνει την εξής μορφή:

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.8)$$

Παρομοίως, η εξ. (2.2) λαμβάνει την μορφή:

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\sigma}_{ij} + \rho \overline{U_i U_j}) \quad (2.9)$$

Σημειώνεται ότι στην εξ. (2.9) έχει αμεληθεί ο όρος της δυνάμεως πεδίου (ρg_i) αφού δεν επηρεάζεται από την διαδικασία του μέσου όρου, αν και θα εισαχθεί πάλι στις εξισώσεις ορμής, για την επίλυση του προβλήματος της παρούσας εργασίας.

Ο όρος $-\rho\overline{U_i U_j}$ που εμφανίζεται στην εξ. (2.9) είναι προϊόν της διαδικασίας υπολογισμού του μέσου όρου για τον μεταγωγικό όρο $\rho U_j (\partial U_i / \partial x_j)$. Η τελική έκφραση της εξισώσεως της ορμής είναι η παρακάτω:

$$\rho \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial t} + \overline{U}_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} - \rho \overline{U_i U_j} \right) \quad (2.10)$$

Οι εξ. (2.8) και (2.10) αποτελούν τις Reynolds Averaged Navier - Stokes (RANS) εξισώσεις. Από την μορφή της εξ. (2.10) είναι προφανές ότι ο όρος $-\rho\overline{U_i U_j}$ συμπεριφέρεται στην εξίσωση της ορμής σαν μια επιπλέον τάση, η οποία δρα στο πεδίο ροής, εκτός από την μέση τάση, $\overline{\sigma_{ij}}$. Ο όρος αυτός ονομάζεται τανυστής των τάσεων Reynolds (ή τυρβωδών τάσεων) και παρακάτω, όπου απαιτηθεί, θα συμβολίζεται ως:

$$\sigma_{ij}^t = -\rho\overline{U_i U_j} \quad (2.11)$$

Οι εξ. (2.8) και (2.10) στην πραγματικότητα διέπουν την ροή ενός "φανταστικού" ασυμπύεστου ρευστού το οποίο κινείται με ταχύτητα $\overline{U}_i (i=1,2,3)$. Με τον όρο "φανταστικό" εδώ ερμηνεύεται το γεγονός ότι δεν υπάρχει πραγματικό ρευστό που να κινείται με την μέση ταχύτητα, \overline{U}_i . Η κατάσταση μιας εξίσωσης ορμής για το ρευστό αυτό θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει δυο εσωτερικές δυνάμεις: μια που προέρχεται από τον μέσο τανυστή των τάσεων, $\overline{\sigma_{ij}}$ και μια άλλη που προέρχεται από τον τανυστή των τάσεων Reynolds. Έτσι, μπορεί να προκύψει η εξ. (2.9) σε αντίθεση με την ισορροπία δυνάμεων σε πραγματικό ρευστό, η οποία δίδει την εξ. (2.2).

Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό των εξισώσεων RANS, εξ. (2.8) και (2.10), σε σχέση με τις εξισώσεις Navier – Stokes, εξ. (2.1) και (2.7), είναι ότι οι πρώτες δεν αποτελούν ένα κλειστό σύστημα εξισώσεων, αφού δεν υπάρχει μια ευθεία σχέση που να συνδέει τον σ_{ij}^t με τις \overline{U}_i και \overline{P} . Η εύρεση ενός τέτοιου συστήματος των εξισώσεων RANS μέσω ενός καταστατικού νόμου για τον σ_{ij}^t αποτελεί τον κύριο στόχο των μοντέλων τύρβης (Δημητρακόπουλος 2005).

2.2.2 ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ ΤΗΣ ΕΛΕΥΘΕΡΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

Η ανάλυση ροών με ελεύθερη επιφάνεια με την βοήθεια των τρισδιάστατων εξισώσεων RANS (Reynolds - Averaged Navier - Stokes) βρίσκει ιδιαίτερη εφαρμογή τα τελευταία χρόνια μετά την ανάπτυξη των σύγχρονων ισχυρών υπολογιστικών πόρων.

Ωστόσο, όλα τα μοντέλα επίλυσης που χρησιμοποιούν τις εξισώσεις RANS αντιμετωπίζουν το πρόβλημα προσέγγισης της ελεύθερης επιφάνειας, η οποία αποτελεί έναν δευτερεύοντα άγνωστο των εξισώσεων επίλυσης του προβλήματος.

Έχουν αναπτυχθεί αρκετές μέθοδοι για την αντιμετώπιση του προβλήματος της ελεύθερης επιφάνειας, οι οποίες σε συνδυασμό με τις εξισώσεις RANS καταφέρνουν να δώσουν ολοκληρωμένες λύσεις στα προβλήματα ροών του τύπου αυτού. Ίσως η πιο απλή μέθοδος είναι η μέθοδος προσέγγισης της ελεύθερης επιφάνειας ως "άκαμπτο κάλυμμα" (rigid lid), η οποία θεωρεί την ελεύθερη επιφάνεια ως ένα επίπεδο συμμετρίας (symmetry plane) ή ως το αποτέλεσμα της δισδιάστατης μοντελοποίησης Saint - Venant (2-D Saint - Venant modelling). Η πρώτη παραλλαγή (επίπεδο συμμετρίας) είναι ευρέως χρησιμοποιούμενη για προσομοιώσεις μεγάλων υδατικών όγκων όπως λίμνες και θάλασσες, ενώ η δεύτερη (Saint-Venant) προτιμάται για την προσομοίωση ροών μικρότερης κλίμακας, όπως ποτάμια και ανοικτά κανάλια (Demuren, A.O, & Rodi 1983, Fischer- Antze, T., Stoesser, T., Bates, P., & Olsen 2001). Ωστόσο, σε κάθε περίπτωση είναι αδύνατο με τις παραπάνω μεθόδους να παρακολουθήσει κανείς πλήρως την μετακίνηση ή την παραμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας.

Η ίσως αποτελεσματικότερη μέθοδος για την προσομοίωση προβλημάτων ελεύθερης επιφάνειας είναι η μέθοδος VOF (Volume of Fluid) των Hirt and Nicholls, (1981). Για την χρήση της μεθόδου απαιτούνται τρία πράγματα: μια μεθοδολογία (scheme) προκειμένου να καθοριστεί η θέση της ελεύθερης επιφάνειας, ένας αλγόριθμος που να παρακολουθεί την ελεύθερη επιφάνεια σαν μια κινούμενη διεπιφάνεια (sharp interface) η οποία κινείται διαμέσου του υπολογιστικού χώρου και ένα μέσο προκειμένου να καθοριστούν οι οριακές συνθήκες στην ελεύθερη επιφάνεια.

Η χρήση της μεθόδου VOF επιβάλλει, όμως, κάποιους περιορισμούς. Στο υπολογιστικό πεδίο το οποίο αποτελείται από διάφορες φάσεις (π.χ. αέρας - νερό) θα πρέπει όλοι οι πεπερασμένοι όγκοι να είναι γεμάτοι με κάποια από τις δυο φάσεις ή με συνδυασμό τους. Η μέθοδος VOF δεν επιτρέπει κενές περιοχές στο υπολογιστικό πεδίο, όπου καμιά από τις δυο φάσεις, ή συνδυασμός τους, δεν είναι παρούσες. Επιπλέον, η μέθοδος απαιτεί η ροή να είναι ασυμπίεστη ενώ οποιαδήποτε μοντελοποίηση μεταφοράς θερμότητας δεν είναι εφικτή.

Η μέθοδος VOF εφαρμόζεται για την προσομοίωση της ροής σε ένα ανοικτό κανάλι με τη βοήθεια μιας ζώνης αέρα που τοποθετείται πάνω από την επιφάνεια του νερού. Στην είσοδο του καναλιού θεωρείται ξεχωριστή εισαγωγή αέρα (air inflow) και νερού (water inflow), οι οποίες όμως επιλύονται ταυτόχρονα προκειμένου να γίνει πρόβλεψη της ελεύθερης επιφάνειας.

2.2.3 Η ΜΕΘΟΔΟΣ VOF ΓΙΑ ΤΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΕΛΕΥΘΕΡΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

Η μέθοδος VOF (Volume of Fluid) βασίζεται στην υπόθεση ότι δύο ή περισσότερα ρευστά δεν αναμιγνύονται. Για κάθε επιπλέον ρευστό εισάγεται μια νέα μεταβλητή, το ποσοστό όγκου κάθε ρευστού σε κάθε στοιχειώδη όγκο του ροϊκού πεδίου. Σε κάθε στοιχειώδη όγκο το άθροισμα των ποσοστών όγκου όλων των ρευστών ισούται με τη μονάδα. Όλες οι μεταβλητές και οι ιδιότητες σε κάθε στοιχειώδη όγκο αντιπροσωπεύουν μέσες τιμές σύμφωνα με το ποσοστό όγκου κάθε ρευστού. Αν θεωρήσουμε ως α_q το ποσοστό όγκου του ρευστού q στον στοιχειώδη όγκο, τότε αν $\alpha_q=0$, ο όγκος είναι άδειος από το ρευστό q , αν είναι $\alpha_q=1$ είναι γεμάτος, ενώ αν $0<\alpha_q<1$ ο όγκος είναι μερικώς κατειλημμένος από το ρευστό q . Τότε η εξίσωση ορμής επιλύεται σε όλο το ροϊκό πεδίο και το πεδίο ταχυτήτων το οποίο προκύπτει διαμοιράζεται στις υπάρχουσες φάσεις. Η εξίσωση ορμής εξαρτάται από τα ποσοστά του όγκου των διαφόρων φάσεων μέσω των ιδιοτήτων της πυκνότητας ρ και του ιξώδους μ του ρευστού.

Στο διφασικό σύστημα (αέρας - νερό) που εξετάζουμε και στο οποίο η φάση του αέρα θεωρείται κύρια και του νερού δευτερεύουσα, η πυκνότητα και το ιξώδες σε κάθε υπολογιστικό κελί δίνονται από τις εξισώσεις:

$$\rho = \alpha_{water} \rho_{water} + (1 - \alpha_{water}) \rho_{air} \quad (2.12)$$

$$\mu = \alpha_{water} \mu_{water} + (1 - \alpha_{water}) \mu_{air} \quad (2.13)$$

Οι εξισώσεις RANS ορίζονται με βάση το ποσοστό όγκου του κάθε ρευστού σαν ένα είδος μέσων τιμών των φυσικών ιδιοτήτων για το νερό και τον αέρα. Οι φυσικές, λοιπόν, ιδιότητες ρ και μ των εξισώσεων RANS αντικαθίστανται από τις εκφράσεις (2.12) και (2.13) και επιλύονται σε όλο το υπολογιστικό πεδίο (νερό και αέρα).

Για τον προσδιορισμό της ελεύθερης επιφάνειας χρησιμοποιείται μια εξίσωση μεταφοράς του ποσοστού όγκου των ρευστών. Γενικότερα, για τη φάση q , η εξίσωση αυτή έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\frac{\partial \alpha_q}{\partial t} + \bar{U}_i \frac{\partial \alpha_q}{\partial x_i} = 0 \quad (2.14)$$

Η εξίσωση (2.14) επιλύεται για κάθε ρευστό εκτός από εκείνο που ορίζεται ως κύριο. Για το κύριο ρευστό το ποσοστό όγκου υπολογίζεται με βάση τον ακόλουθο περιορισμό:

$$\sum_{q=1}^N a_q = 1 \quad (2.15)$$

2.3 ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΛΕΙΣΙΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΤΥΡΒΗΣ

2.3.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΤΥΡΒΩΔΟΥΣ ΙΞΩΔΟΥΣ

Μελετώντας τις εξισώσεις RANS (εξ. 2.8 και 2.10), παρατηρείται ότι το βασικό πρόβλημα προσομοίωσης ροών κατά την ανάλυση ενός σημείου (one point modelling) αποτελούν οι τάσεις Reynolds. Το παλαιότερο μοντέλο προσομοίωσης των τάσεων Reynolds είναι, μέχρι σήμερα, ο συνηθέστερος τρόπος για την αρχική προσέγγιση του προβλήματος της τύρβης. Το μοντέλο αυτό βασίζεται στην παραδοχή ότι όπως οι διατμητικές τάσεις λόγω ιξώδους στην στρωτή ροή, έτσι και οι τυρβώδεις τάσεις (τάσεις Reynolds) είναι ανάλογες των βαθμίδων της μέσης ταχύτητας (Rodi 1980).

Τα παραπάνω εκφράζονται με την ακόλουθη μαθηματική σχέση:

$$-\rho \overline{U_i U_j} = \rho \nu_t \left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (2.16)$$

όπου ν_t είναι το τυρβώδες κινηματικό ιξώδες το οποίο, σε αντίθεση με το κινηματικό ιξώδες της στρωτής ροής (ν), δεν αποτελεί μια ιδιότητα του ρευστού, αλλά εξαρτάται από την κατάσταση της τύρβης. Τούτων λεχθέντων, το ν_t μπορεί να διαφέρει σημαντικά από σημείο σε σημείο του ροϊκού πεδίου και από ροϊκό πεδίο σε ροϊκό πεδίο. Η εξ. (2.16), λόγω της συμπεριφοράς του ν_t , δεν αποτελεί αυτή καθ' εαυτή μια καταστατική σχέση για το πρόβλημα κλεισίματος της τύρβης αλλά δίνει το πλαίσιο προς αυτή την κατεύθυνση. Το πρόβλημα τώρα εστιάζεται στον καθορισμό της κατανομής του ν_t (Δημητρακόπουλος, 2005).

Αντικαθιστώντας την εξ. (2.16) στην εξ. (2.10) προκύπτει η παρακάτω έκφραση:

$$\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial t} + \overline{U_j} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\overline{P}}{\rho} + \frac{2}{3} k \right) + \nu \frac{\partial^2 \overline{U_i}}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu_t \left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \right) \right] \quad (2.17)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο δεύτερος όρος του δεξιού σκέλους της εξ. (2.17) έχει ενσωματωθεί στον όρο της πίεσεως, με αποτέλεσμα η επίδραση της στατικής πίεσης

να αντικαθίσταται στις εξισώσεις ορμής από την φαινόμενη πίεση ($\bar{P} + \frac{2}{3}\rho k$). Έτσι, η διαδικασία επίλυσης των RANS εξισώσεων μπορεί να προχωρήσει χωρίς να απαιτείται ο προσδιορισμός της τυρβώδης κινητική ενέργεια ανά μονάδα μάζας, k , δεδομένου ότι σε στερεά όρια ή ελεύθερες επιφάνειες ισχύει ότι $k = 0$ και επομένως μπορούν να προσδιοριστούν οι τιμές της \bar{P} . Ωστόσο, ο προσδιορισμός της \bar{P} σε εσωτερικά σημεία του ροϊκού πεδίου απαιτεί μια ξεχωριστή διαδικασία για τον προσδιορισμό της k .

Η ιδέα του τυρβώδους ιξώδους στηρίζεται στην υπόθεση ότι υπάρχει μια αναλογία μεταξύ της μοριακής κινήσεως, η οποία διέπεται από τον νόμο του ιξώδους του Newton, και της τυρβώδους κινήσεως. Οι στρόβιλοι της τύρβης θεωρήθηκαν ότι κινούν "πακέτα" ρευστού τα οποία, όπως και τα μόρια, συγκρούονται και ανταλλάσσουν ορμή. Το μοριακό ιξώδες είναι ανάλογο προς τη μέση ταχύτητα και τον "μέσο ελεύθερο δρόμο" (mean free path) των μορίων. Αντίστοιχα, το τυρβώδες ιξώδες θεωρείται ανάλογο της χαρακτηριστικής ταχύτητας και της χαρακτηριστικής κλίμακας μήκους των μεγάλων στρόβιλων. Έχει βεβαίως επισημανθεί ότι η αναλογία μεταξύ μοριακής και τυρβώδους κινήσεως δεν μπορεί να είναι ορθή, δεδομένου ότι αφενός οι στρόβιλοι δεν είναι άκαμπτα σώματα τα οποία διατηρούν την ταυτότητά τους και αφετέρου οι μεγάλοι στρόβιλοι, οι οποίοι είναι υπεύθυνοι για την μεταφορά της ορμής, έχουν "διαδρομές" (αντίστοιχα με τον μέσο ελεύθερο δρόμο των μορίων) που δεν είναι μικρές συγκρινόμενες με το μέγεθος του ροϊκού πεδίου, όπως προβλέπει και απαιτεί η αντίστοιχη θεωρία στο μοριακό επίπεδο. (Rodi, 1980) Παρά το γεγονός ότι υπήρχαν οι παραπάνω αντιρρήσεις, η ιδέα του τυρβώδους ιξώδους έχει δώσει ικανοποιητικά αποτελέσματα σε πρακτικές εφαρμογές, επειδή το ν_t , όπως ορίζεται από την εξ. (2.16), μπορεί να προσδιοριστεί με ικανοποιητική ακρίβεια σε πολλές ροές. Επίσης, επισημαίνεται ότι το τυρβώδες ιξώδες είναι ανάλογο της κλίμακας ταχυτήτων, uL , και της κλίμακας μήκους, L , που χαρακτηρίζει τους μεγάλους στρόβιλους, δηλαδή:

$$\nu_t \propto u_L L \quad (2.18)$$

και ότι η κατανομή αυτών των κλιμάκων μπορεί να προσεγγιστεί ικανοποιητικά σε πολλές ροές.

Η πρόβλεψη δισδιάστατων ροών τύπου οριακού στρώματος είναι πλέον ευκολότερο να πραγματοποιηθεί με την εισαγωγή της ιδέας του τυρβώδους ιξώδους. Σε αυτή τη περίπτωση μας ενδιαφέρει η διατμητική τυρβώδης τάση $\tau = -\rho \overline{U_i U_j}$ και η εξ. (2.16) παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$\tau = \rho \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (2.19)$$

όπου u , v οι διακυμάνσεις της ταχύτητας κατά την x (διαμήκη) και y (εγκάρσια) διεύθυνση της ροής αντίστοιχα.

Όμως, ακόμα και για αυτή την κατηγορία σχετικά απλών ροών, η ιδέα του τυρβώδους ιξώδους είναι πιθανόν να αστοχήσει. Για παράδειγμα, σε φλέβες προσκολλημένες σε τοίχωμα ή για ασύμμετρα διατμητικά στρώματα τοιχώματος (π.χ. ροές σε ορθογωνική διατομή με διαφορετική τραχύτητα σε κάθε τοίχωμα) υπάρχουν περιοχές της ροής όπου η διατμητική τάση, και η βαθμίδα της ταχύτητας, $\frac{\partial \bar{U}}{\partial y}$, έχουν αντίθετα πρόσημα. Σύμφωνα με την εξ. (2.19), απαιτείται αρνητική τιμή του ν_t σ' αυτές τις περιοχές, πράγμα όμως που δεν έχει φυσική υπόσταση αφού οι κλίμακες ταχύτητας και μήκους των μεγάλων στροβίλων είναι πάντοτε θετικές ποσότητες.

Επιπλέον, σε ροές πολυπλοκότερες από τις ροές τύπου οριακού στρώματος, περισσότερες από μια τυρβώδεις τάσεις είναι σημαντικές. Η εξ. (2.16) παρουσιάζει το ν_t ως ένα βαθμωτό μέγεθος, δηλαδή το τυρβώδες ιξώδες είναι το ίδιο για όλες τις συνιστώσες του τανυστή των τυρβωδών τάσεων. Αυτή η υπόθεση ισότροπου ν_t είναι περιοριστική σε πολλές πολύπλοκες ροές. Συνεπώς, διαφορετικά τυρβώδη ιξώδη εισάγονται αρκετές φορές για την περιγραφή των τυρβωδών τάσεων σε διαφορετικές διευθύνσεις. Για παράδειγμα, σε μεγάλα υδατικά σώματα, το ν_t καθορίζεται διαφορετικά για την μεταφορά ορμής (τυρβώδεις τάσεις) στην οριζόντια και την κατακόρυφη διεύθυνση.

Όπως αναφέρθηκε η ιδέα του τυρβώδους ιξώδους παρουσιάζει μία σειρά από περιορισμούς και αστοχίες. Ωστόσο, χρησιμοποιείται ευρύτατα και έχει δώσει ικανοποιητικά αποτελέσματα σε πολλές πρακτικές εφαρμογές (Δημητρακόπουλος 2005).

2.3.2 ΜΟΝΤΕΛΑ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Τα απλούστερα μοντέλα είναι τα αλγεβρικά ή μοντέλα μηδενικής εξίσωσης τα οποία δεν χρησιμοποιούν εξισώσεις μεταφοράς για ποσότητες που χαρακτηρίζουν την τύρβη. Πρόκειται για απλά μοντέλα τα οποία χρησιμοποιούν την ιδέα του τυρβώδους ιξώδους και το προσδιορίζουν είτε απ' ευθείας από πειράματα, είτε μέσω διαδοχικών δοκιμών, είτε από εμπειρικές σχέσεις, είτε μέσω της σύνδεσής τους με την κατανομή των μέσων ταχυτήτων. Παρά την απλότητα αυτών των μοντέλων η χρήση τους δεν προτιμάται για αριθμητικά μοντέλα (Hüseyin Burak EKMEKÇİ 2015).

2.3.2.1 ΣΤΑΘΕΡΟ ΤΥΡΒΩΔΕΣ ΙΞΩΔΕΣ – ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΤΥΡΒΩΔΟΥΣ ΔΙΑΧΥΣΕΩΣ

Για να υπάρχει συμφωνία μεταξύ υπολογισμών και μετρήσεων, σε πολλές περιπτώσεις μεγάλων υδατικών όγκων χρησιμοποιείται μια σταθερή τιμή για το ν_t η οποία προσδιορίζεται από κάποια διαδικασία προσαρμογής είτε κατευθείαν από πειράματα εξαπλώσεως χρωστικών ιχνηθετών (dye spreading experiments), είτε από διαθέσιμες εμπειρικές πληροφορίες, είτε από κάποια διαδικασία διαδοχικών δοκιμών (tuning). Αυτά δεν είναι στην πραγματικότητα μοντέλα τύρβης αλλά περιλαμβάνονται εδώ γιατί χρησιμοποιούνται συχνά για την επίλυση υδραυλικών προβλημάτων. Το μοντέλο σταθερού ν_t είναι δευτερεύουσας σημασίας στον υπολογισμό υδροδυναμικών ιδιοτήτων, διότι σε πολλές περιπτώσεις ροών σε μεγάλα υδατικά σώματα, οι όροι της τύρβης δεν είναι σημαντικοί στις εξισώσεις ορμής, οπότε το μοντέλο τύρβης έχει, ούτως ή άλλως, μικρή επίπτωση στο ροϊκό πεδίο. Ακόμη όμως και στην περίπτωση όπου οι όροι της τύρβης είναι σημαντικοί, η αριθμητική επίλυση των εξισώσεων βασίζεται σε πυκνό πλέγμα οπότε δεν είναι δυνατή η ορθή προσομοίωση της τύρβης.

Ακόμη πρέπει να επισημανθεί ότι σε τέτοιου τύπου μοντέλα πολλές φορές αναιρείται η υπόθεση ισότροπης συμπεριφοράς του ν_t και συνεπώς, διαφορετικές τιμές υιοθετούνται για την οριζόντια και κατακόρυφη διεύθυνση.

Τέλος, η ιδέα σταθερού ν_t έχει μεγαλύτερη αξία σε περιπτώσεις όπου εξετάζεται μόνο η οριζόντια μεταφορά ορμής ή μάζας (θερμότητας) μέσω υπολογισμών που στηρίζονται στις ολοκληρωμένες, ως προς το βάθος, εξισώσεις (Rodi, W. (1980)). Για ροές τοιχώματος, όπως για παράδειγμα η ροή σε ανοιχτούς αγωγούς, όπου η τύρβη προκαλείται από την ύπαρξη του στερεού ορίου, οι μέσες (κατά το βάθος) τιμές ν_t συσχετίζονται ικανοποιητικά με την διατμητική ταχύτητα, U_* , και το βάθος ύδατος d με την σχέση:

$$\bar{\nu}_t = cU_*h \quad (2.20)$$

όπου c = εμπειρικός συντελεστής, εξαρτώμενος από την γεωμετρία της διατομής και την μορφολογία του αγωγού (Fischer H.B. et al., (1979)). Αξίζει να σημειωθεί η ομοιότητα της εξ. (2.20) με την εξ. (2.18), οπότε η U_* παίζει τον ρόλο της κλίμακας ταχύτητας και το βάθος h τον ρόλο της κλίμακας μήκους για τους μεγάλους στροβίλους. Θα πρέπει, τέλος, να επισημανθεί ότι το $\bar{\nu}_t$ δεν εκφράζει μόνο την μεταφορά ορμής λόγω τύρβης αλλά και την μεταφορά λόγω διασποράς, η οποία οφείλεται στην διαφορά των μέσων, ως προς το βάθος, τιμών της ταχύτητας από τις αντίστοιχες πραγματικές κατανομές τους (Δημητρακόπουλος, 2005).

2.3.2.2 ΜΟΝΤΕΛΑ ΜΗΚΟΥΣ ΑΝΑΜΕΙΞΕΩΣ

Το πρώτο μοντέλο κλεισίματος της τύρβης (μοντέλο περιγραφής της κατανομής του τυρβώδους ιξώδους) παρουσιάστηκε από τον Prandtl το 1926 (Rodi, W. (1980)) και είναι γνωστό ως μοντέλο μήκους αναμείξεως του Prandtl. Ο Prandtl υπέθεσε ότι το τυρβώδες ιξώδες περιγράφεται από μια εξίσωση της μορφής:

$$v_t = \hat{v} l_m \quad (2.21)$$

όπου \hat{v} είναι το μέτρο της διακύμανσης της ταχύτητας λόγω τύρβης και l_m το μήκος αναμείξεως.

Η έννοια του μήκους αναμείξεως έχει ως εξής: Σε ροές τύπου οριακού στρώματος, όταν ένα "πακέτο" ρευστού ταξιδεύει με την μέση ταχύτητα της θέσεώς του, αυτό μετατοπίζεται, λόγω τύρβης, στην εγκάρσια διεύθυνση από το επίπεδο y_1 στο επίπεδο y_2 . Σ' αυτήν την διαδικασία μετατοπίσεως, η μέση διαμήκης ταχύτητά του (δηλαδή η ταχύτητα στην αρχική θέση) διαφέρει από την ταχύτητα στη νέα θέση κατά $\Delta \bar{U} \cong \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} (y_2 - y_1)$. Ως μήκος αναμείξεως ορίζεται η απόσταση $(y_2 - y_1)$ όπου η $\Delta \bar{U}$ ισούται με την μέση τιμή των εγκαρσίων διακυμάνσεων, δηλαδή \hat{v} .

Ο Prandtl θεώρησε ροές τύπου οριακού στρώματος με μόνη σημαντική τυρβώδη τάση την $\bar{u}v$ και βαθμίδα ταχύτητας $(\partial \bar{U} / \partial y)$ και βάσει του προηγούμενου ορισμού του μήκους αναμείξεως εξέφρασε το \hat{v} ως:

$$\hat{v} = l_m \left| \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right| \quad (2.22)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (2.12) και (2.11) προκύπτει:

$$v_t = l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right| \quad (2.23)$$

Η εξ. (2.23) αποτελεί το μοντέλο του μήκους αναμείξεως του Prandtl. Η εξίσωση αυτή περιγράφει το v_t ως συνάρτηση της τοπικής βαθμίδας της μέσης ταχύτητας και εμπεριέχει μία μόνον άγνωστη παράμετρο, το μήκος αναμείξεως l_m .

Αυτό το μοντέλο χρησιμοποιείται ακόμα και σήμερα για απλές ροές, διότι το μήκος αναμείξεως σε πολλές περιπτώσεις περιγράφεται από εμπειρικές σχέσεις. Σημειώνεται ότι σε περιπτώσεις που υπάρχουν φαινόμενα όπως καμπυλότητα ροής, αποκολλήσεις,

έντονες βαθμίδες πίεσεως κλπ, το μοντέλου του μήκους αναμείξεως δεν αποδίδει καθόλου ικανοποιητικά (Bradshaw, 2003) και απαιτείται διαφορετικό σχήμα μοντελοποίησης της τύρβης (Δημητρακόπουλος 2005).

2.3.3 ΜΟΝΤΕΛΑ ΜΙΑΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Ένα επίπεδο πάνω στο σύστημα μοντελοποίησης της τύρβης είναι τα μοντέλα της εξίσωσης. Αυτά τα μοντέλα επιλύουν μία ενιαία εξίσωση μεταφοράς για μία ποσότητα που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του τυρβώδους ιξώδους. Επί του παρόντος, το πιο δημοφιλές μοντέλο μιας εξίσωσης είναι το μοντέλο Spalart-Allmaras. Αυτό το μοντέλο έχει αποδειχθεί ότι δίνει αποδεκτά αποτελέσματα για μια ευρεία ποικιλία καταστάσεων και είναι γνωστό για τη σταθερότητά του. Άλλα μοντέλα μιας εξίσωσης που είναι διαθέσιμα της κώδικες παραγωγής περιλαμβάνουν το μοντέλο Baldwin-Barth και το μοντέλο Point Gold. Μπορεί να θεωρηθεί ως ένα πλεονέκτημα ότι το μοντέλο Goldberg δεν απαιτεί τον υπολογισμό της απόστασης από κάθε σημείο πεδίου στον πλησιέστερο τοίχο. Αυτό διευκολύνει την εφαρμογή από πολλά άλλα μοντέλα. Ωστόσο, τα αποτελέσματα του μοντέλου Goldberg δεν είναι τόσο καλά όσο το μοντέλο Spalart, όταν είναι απαραίτητος ο υπολογισμός της απόστασης τοίχων (Spalart and Almaras 1992,1995).

2.3.4 ΜΟΝΤΕΛΑ ΔΥΟ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Όπως υποδηλώνει και το όνομά τους, αυτά τα μοντέλα απαιτούν τη λύση δύο επιπλέον εξισώσεων για να υπολογίσουν τις συνεισφορές της τύρβης στη μέση ροή. Μαζί με το μοντέλο Spalart-Allmaras, τα μοντέλα δύο εξισώσεων αποτελούν το μεγαλύτερο μέρος των μοντέλων κλεισίματος της τύρβης που χρησιμοποιούνται στην Υπολογιστική Ρευστοδυναμική (CFD – Computational Fluid Dynamics). Δύο από τα πιο συνηθισμένα μοντέλα είναι το μοντέλο μεταφορών διατμητικής τάσης (SST-Shear Stress Transport) και το μοντέλο k-ε.

2.3.4.1 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ k-ε

Το μοντέλο k-ε είναι το πιο κοινό μοντέλο που χρησιμοποιείται στην Υπολογιστική Ρευστοδυναμική για την προσομοίωση των μέσων χαρακτηριστικών της ροής για συνθήκες τυρβώδους ροής. Πρόκειται για ένα μοντέλο δύο εξισώσεων που δίνει μια γενική περιγραφή της τύρβης μέσω δύο εξισώσεων μεταφοράς (PDEs-Partial Differential Equations). Η αρχική ώθηση για το μοντέλο k-ε ήταν να βελτιωθεί το μοντέλο μήκους ανάμιξης, καθώς και να βρεθεί μια εναλλακτική λύση σε αλγεβρικά περιγραφικές κλίμακες στροβιλώδους μήκους σε ροές με μέτρια έως υψηλή πολυπλοκότητα. Η πρώτη μεταβλητή προσδιορίζει την ενέργεια στην τύρβη και

ονομάζεται τυρβώδης κινητική ενέργεια (k). Ενώ η δεύτερη μεταβλητή ε καθορίζει το ρυθμό ανάλωσης της τυρβώδους κινητικής ενέργειας.

Η εξίσωση μεταφοράς για την k είναι η παρακάτω:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \Pi - \varepsilon + \frac{\partial \left[\left(v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right]}{\partial x_i} \quad (2.24)$$

Όπου:

$$\Pi = v_t \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.25)$$

$$\varepsilon = C_D \frac{k^{3/2}}{L} \quad (2.26)$$

$$v_t = C'_\mu \sqrt{k} L \quad (2.27)$$

Σημειώνεται ότι ο όρος ε στην εξ. (2.24) δεν περιγράφεται από αλγεβρική σχέση, δεδομένου ότι η προσομοίωση της μεταφοράς της ε αποτελεί αναπόσπαστο μέρος του μοντέλου. Η διαδικασία μοντελοποίησης για την ποσότητα ε απαιτεί πολλές περισσότερες παραδοχές απ' ό,τι η αντίστοιχη διαδικασία για την k εξίσωση. Μια αρκετά λεπτομερής παρουσίαση αυτής της διαδικασίας δίδεται από τους Bernard & Wallace (2002). Για τις ανάγκες της παρούσας ανάλυσης, δίνεται μόνο το τελικό αποτέλεσμα:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{U}_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \Pi - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial \left[\left(v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right]}{\partial x_i} \quad (2.28)$$

Συνοψίζοντας, το μοντέλο k - ε συμπληρώνει τους εξισώσεις RANS, εξ. (2.17), μέσω τους προσομοίωσης του τυρβώδους ιξώδους από την εξ. (2.27) και τους εξισώσεις μεταφοράς για τους ποσότητες k και ε , δηλαδή τους εξ. (2.24), (2.28) και (2.25). Οι τιμές των εμπειρικών συντελεστών που καθορίζουν την κανονική (standard) μορφή του μοντέλου παρουσιάστηκαν από τους Launder & Spalding (1972) και δίδονται στον Πίνακα 2.1:

Πίνακας 2.1 – Τιμές των συντελεστών στο κανονικό k - ε μοντέλο

C_μ	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	σ_k	σ_ε
0.09	1.44	1.92	1.0	1.3

Οι τιμές των συντελεστών έχουν προκύψει είτε μέσω βελτιστοποίησης των αποτελεσμάτων του μοντέλου μετά από σύγκριση με πειραματικές μετρήσεις, είτε λόγω απαίτησης συμφωνίας με πειραματικά αποτελέσματα ορισμένων απλών περιπτώσεων ροής.

Σχετικά με τον συντελεστή C_μ , λαμβάνεται υπόψη η συμπεριφορά διατμητικών ροών, στις οποίες η τύρβη βρίσκεται σε κατάσταση τοπικής ισορροπίας. Τότε η εξ. (2.24) δίνει:

$$\Pi = \varepsilon \quad (2.29)$$

Για ροές τύπου οριακού στρώματος, η εξ. (3.34) σε συνδυασμό με την εξ. (2.29) δίνει:

$$v_t \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right)^2 = \varepsilon \quad (2.30)$$

η οποία, σε συνδυασμό με την εξ. (3.16) και την εξίσωση $v_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$ τελικά δίνει:

$$C_\mu = \left(\frac{\bar{u}\bar{v}}{k} \right)^2 \quad (2.31)$$

Σε ροές τέτοιου τύπου, πειραματικές μετρήσεις πλησίον του τοιχώματος έχουν δώσει τις τιμές $\bar{u}\bar{v}/k \approx 0.3$, οπότε από την εξίσωση (2.31) προκύπτει η τιμή $C_\mu = 0.09$. Επιπλέον, Η τιμή του $C_{\varepsilon 2}$ έχει βασιστεί σε πειραματικά δεδομένα για την αποδόμηση (decay) τύρβης πλέγματος, η οποία δίδει τιμές για τον $C_{\varepsilon 2}$ στο διάστημα 1.8 έως 2.0.

Τέλος, για ροές τοιχώματος και πλησίον του τοιχώματος ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) η διαμήκης ταχύτητα κατά την εγκάρσια διεύθυνση περιγράφεται από τον λογαριθμικό νόμο και η διατμητική τάση είναι περίπου σταθερή,

(β) η παραγωγή τυρβώδους κινητικής ενέργειας είναι σε ισορροπία με την ανάλωση, δηλαδή δεν υπάρχει μεταγωγική ούτε διαχυτική μεταφορά k και

(γ) δεν υπάρχει μεταγωγή της ανάλωσης και υπάρχει διαχυτική μεταφορά αυτή μόνο κατά την διεύθυνση εγκάρσια του τοιχώματος.

Με βάση τα ανωτέρω, η εξ.(2.28) γίνεται:

$$C_{\varepsilon 1} = C_{\varepsilon 2} - \frac{\kappa^2}{\sigma_{\varepsilon} \sqrt{C_{\mu}}} \quad (2.32)$$

Επομένως, η τιμή του $C_{\varepsilon 1}$ προσδιορίζεται, αφού έχουν πρώτα προσδιοριστεί οι τιμές των $C_{\varepsilon 2}$, σ_{ε} και C_{μ} . Σημειώνεται επίσης ότι η τιμή του $C_{\varepsilon 1}$ στον Πίνακα 2.1 αντιστοιχεί στην τιμή $\kappa \approx 0.432$ για την σταθερά του von Karman. Τέλος, οι συντελεστές σ_k και σ_{ε} θεωρήθηκαν αρχικά ίσοι με μονάδα και στη συνέχεια τόσο αυτοί, όσο και ο συντελεστής $C_{\varepsilon 2}$, βαθμονομήθηκαν υπολογιστικά (βελτιστοποίηση) μέσω συγκρίσεως με διάφορα πειραματικά δεδομένα για ελεύθερες διατμητικές ροές, αλλά έχουν χρησιμοποιηθεί με ακόμα μεγαλύτερη επιτυχία για ροές τοιχώματος. Ανάλυση ευαισθησίας έχει δείξει ότι τα αποτελέσματα του μοντέλου είναι περισσότερο ευαίσθητα στις τιμές των $C_{\varepsilon 1}$ και $C_{\varepsilon 2}$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι τιμές του κανονικού (standard) μοντέλου $k - \varepsilon$ αποτελούν έναν συμβιβασμό. Για κάθε ειδικό πρόβλημα είναι πολύ πιθανόν η ακρίβεια να μπορεί να βελτιωθεί μέσω αναπροσαρμογής των συντελεστών (Pope 2000, Rodi 1993). Έχει όμως διαπιστωθεί ότι όταν $k - \varepsilon$ μοντέλα με αναπροσαρμοσμένους συντελεστές εφαρμόζονται σε ένα ευρύ φάσμα προβλημάτων, τότε τα αποτελέσματά τους είναι κατώτερα των αποτελεσμάτων του κανονικού (Δημητρακόπουλος, 2005).

2.3.4.2 TO MONTELO $k-\omega$

Το μοντέλο $k-\omega$ είναι το πρώτο μοντέλο τύρβης δύο εξισώσεων που προτάθηκε από τον Kolmogorov (1942). Θεωρεί ότι η τυρβώδης κινητική ενέργεια k και ο συντελεστής ειδικής ανάλωσης της τυρβώδους κινητικής ενέργειας ω ($= \varepsilon/k$) διέπονται από δύο εξισώσεις μεταφοράς.

Η ανάπτυξη των εξισώσεων μεταφοράς βασίζεται στα ακόλουθα:

- Η τυρβώδης κινητική ενέργεια k εμφανίζεται ήδη στην εξίσωση $\tau_{zy} = 2\nu_t S_{xy} - \frac{2}{3}k\delta_{xy}$, όπου οι δείκτες i και j είναι ταυστικοί συμβολισμοί (tensor notations). Είναι κατανοητό ότι $\nu_t \propto k$.

- Ο λόγος ν_t / k περιλαμβάνει την διάσταση του χρόνου καθώς οι μονάδες μέτρησης του τυρβώδους ιξώδους είναι m^2/s και της τυρβώδους κινητικής ενέργειας m^2/s^2 .
- Ο ρυθμός ανάλωσης της κινητικής ενέργειας ε έχει μονάδες m^2/s^3 , κατά συνέπεια ο συντελεστής ειδικής ανάλωσης της κινητικής ενέργειας $\omega = \varepsilon/k$ έχει μονάδες s^{-1} .
- Επομένως, το σύστημα μπορεί να κλείσει εάν $\tau_{zy} = 2\nu_t S_{xy} - \frac{2}{3}k\delta_{xy}$ και εισαχθεί μια μεταβλητή χρόνου ή συχνότητας.

Ο Kolmogorov (1942) συνδύασε τις φυσικές διεργασίες με διαστασιολογικά επιχειρήματα και πρότεινε τη παρακάτω εξίσωση μεταφοράς για το ω :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \omega}{\partial t} + \left(U \frac{\partial \omega}{\partial x} + V \frac{\partial \omega}{\partial y} + W \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) \\ & = -\beta \omega^2 + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma \nu_t \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma \nu_t \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma \nu_t \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.33)$$

Όπου β και ω συντελεστές κλεισίματος της τύρβης, ω^2 είναι η μέση τετραγωνική στροβιλότητα των στροβίλων που “περιέχουν ενέργεια” και k είναι η κινητική ενέργεια που προκαλείται λόγω του στροβιλισμού. Η περαιτέρω ανάπτυξη και εφαρμογή του μοντέλου k - ω πραγματοποιήθηκε από πολλούς επιστήμονες και μηχανικούς, αλλά η πιο σημαντική εξέλιξη ήταν η Wilcox (1998).

Η πιο πρόσφατη έκδοση του μοντέλου (Wilcox 2006, k - ω μοντέλο) παρουσιάζεται παρακάτω:

Το κινηματικό ιξώδες (ν_t) δίνεται από την σχέση:

$$\nu_t = \frac{k}{\tilde{\omega}} \text{ με } \tilde{\omega} = \max \left\{ \omega, C_{lim} \sqrt{\frac{2S_{ij}S_{ij}}{\beta^*}} \right\}, \quad C_{lim} = \frac{7}{8} \quad (2.34)$$

Η τυρβώδης κινητική ενέργεια υπολογίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \sigma^* \frac{k}{\omega} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} - \beta^* k \omega + \tau_{ij} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \right] \quad (2.35)$$

Ενώ η ειδική ανάλωση της κινητικής ενέργειας από:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \sigma^* \frac{k}{\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] - \beta^* \omega^2 + \frac{\sigma_d}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} + \alpha \frac{\omega}{k} \tau_{ij} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \quad (2.36)$$

Οι βοηθητικές σχέσεις και οι συντελεστές κλεισίματος του μοντέλου καθορίζονται ως εξής:

Πίνακας 2.2-Βοηθητικές σχέσεις και συντελεστές κλεισίματος του μοντέλου

α	β	β_0	β^*	σ	σ^*	σ_{d0}
0.52	$\beta_0 f_\beta$	0.0708	0.09	0.5	0.6	0.125

Επιπλέον:

$$\sigma_d = \begin{cases} 0, & \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \leq 0 \\ \sigma_{d0}, & \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} > 0 \end{cases}, \quad f_\beta = \frac{1+0.85\chi_\omega}{1+100\chi_\omega}, \quad \chi_\omega = \left| \frac{\Omega_{ij}\Omega_{jk}S_{ki}}{(\beta^*\omega)^3} \right|, \quad \Omega_{ij} = 0.50 \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.37)$$

Όπου:

C_{lim} είναι η δύναμη περιορισμού της τάσης

f_β είναι η λειτουργία “τεντώματος” του στροβίλου

χ_ω είναι η αδιαστατη παράμετρος “τεντώματος” του στροβίλου

Ω_{ij} είναι ο τανυστής μέσης περιστροφής.

Το μοντέλο k- ω είναι ανώτερο από το κανονικό μοντέλο k- ϵ για αρκετούς λόγους. Για παράδειγμα, επιτυγχάνει υψηλότερη ακρίβεια για οριακά στρώματα με αρνητική κλίση πίεσης και μπορεί εύκολα να ενσωματωθεί στο ιξώδες υπόστρωμα χωρίς πρόσθετες λειτουργίες απόσβεσης (Wilcox 2006).

Επιπλέον, η πρόσφατη έκδοση του Wilcox (2006) k- ω μοντέλο είναι πολύ ακριβέστερη για τις ελεύθερες ροές διάτμησης και τις διαχωρισμένες ροές. Το μοντέλο εξακολουθεί να πάσχει από αδυναμίες όταν εφαρμόζεται σε ροές με οριακά ελεύθερα ρεύματα (π.χ. πίδακες), σύμφωνα τον F.R. Menter (2009).

2.3.4.3 TO MONTELO SST

Το μοντέλο SST (Shear Stress Transport) (Menter, 1992) είναι ένα ακόμα σημαντικό μοντέλο κλεισίματος όπως τύρβης αφού συνδυάζει τα πλεονεκτήματα του μοντέλου k- ϵ και του μοντέλου k- ω . Αυτό το μοντέλο χρησιμοποιεί το μοντέλο k- ω κοντά στα τοιχώματα και το μοντέλο k- ϵ όπως όπως περιοχές. Το μοντέλο έχει επικυρωθεί έναντι πολλών άλλων εφαρμογών με καλά αποτελέσματα όπως πτερύγια στροβιλομηχανών, ανεμογεννήτριες, ελεύθερα στρώματα διάτμησης, κλίση μηδενικής πίεσης και οριακές στρώσεις αρνητικής πίεσης.

Η μαθηματική διατύπωση του μοντέλου δεν επαναλαμβάνεται αλλά μπορεί να βρεθεί στις προαναφερθείσες αναφορές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ ΡΟΗΣ ΣΕ ΑΝΟΙΚΤΟΥΣ ΑΓΩΓΟΥΣ

3.1 ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΟΡΙΑΚΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ ΕΙΣΟΔΟΥ-ΕΞΟΔΟΥ

Επειδή η κατανομή της ταχύτητας στην διατομή εισόδου (inlet) συνήθως δεν είναι γνωστή, επιλέγεται ως συνθήκη η μέση ταχύτητα U , όπως αυτή προκύπτει από μονοδιάστατη, ολοκληρωματική θεώρηση (π.χ. εξ. Manning). Τότε, το σύνορο επιλέγεται σε ικανοποιητική απόσταση από την περιοχή ενδιαφέροντος, ώστε ηροή να είναι πλήρως ανεπτυγμένη. Εναλλακτικά, και για περιοχή όπου δεν υπάρχουν έντονες καμπυλότητες (στην οριζόντια ή κατακόρυφη διεύθυνση), μπορεί να δοθεί ως συνοριακή συνθήκη η υδροστατική κατανομή της πίεσεως.

Οι τιμές της τυρβώδους κινητικής ενέργειας και του ρυθμού ανάλωσης κινητικής ενέργειας συνήθως δεν είναι γνωστές στην είσοδο. Αν βεβαίως είναι γνωστές, αυτές θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν. Διαφορετικά, η τιμή της κινητικής ενέργειας k δίνεται ως ένα μικρό ποσοστό της χρησιμοποιούμενης μέσης ταχύτητας:

$$k = (IU)^2 \quad (3.1)$$

όπου I = η ένταση της τύρβης η οποία θεωρείται ότι έχει τιμή της τάξεως του 3% (π.χ. Rameshwaran & Nadeu, 2004).

Όσον αναφορά το ρυθμό ανάλωσης της τυρβώδους κινητικής ενέργειας ε , συνήθως χρησιμοποιείται ο βασικός ορισμός που προκύπτει από την διαδικασία καταπτώσεως της ενέργειας ($\varepsilon \sim \frac{U_*^3}{L}$) όπου ως χαρακτηριστική ταχύτητα των μεγάλων στροβίλων χρησιμοποιείται η διατμητική ταχύτητα U_* , και ως χαρακτηριστική κλίμακα μήκους περίπου το 1/10 του εύρους του διατμητικού στρώματος το οποίο σε πλήρως ανεπτυγμένες ροές ανοικτών αγωγών ταυτίζεται με το βάθος (ή την υδραυλική ακτίνα για σύνθετες διατομές) της ροής. Ειδικότερα, για προσομοίωση με το μοντέλο $k-\varepsilon$ και αξιοποιώντας περαιτέρω την εξίσωση του τυρβώδους ιξώδους, $\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$, θεωρώντας ότι $\Pi = \varepsilon$ πλησίον του τοιχώματος αποδεικνύεται ότι $U_* = C^{1/4} k_w^{1/2}$, όπου k_w η τιμή της τυρβώδους κινητικής ενέργειας πλησίον του τοιχώματος (περιοχή $\sim 30 < y^+ < 100$). Θεωρώντας ότι η παραπάνω σχέση ισχύει για όλη τη διατομή εισόδου προκύπτει η πιο σύνηθες εξίσωση που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της τυρβώδους κινητικής ενέργειας ε στην είσοδο της διατομής

(Rameshwaran & Nadeu 2004, Ferziger & Peric 2002 και Versteeg & Malalasekera 1995):

$$\varepsilon = C^{3/4} \frac{k^{3/2}}{0.1h} \quad (3.2)$$

Σημειώνεται ότι ο συντελεστής 0.1 στον παρονομαστή δίδεται και ως 0.07.

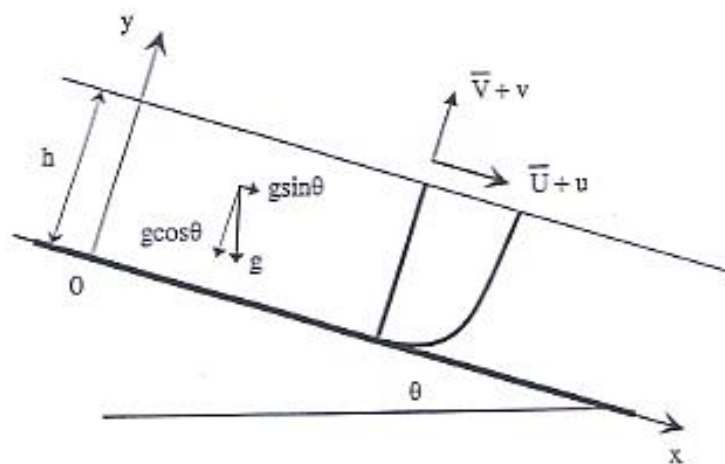
Όσον αφορά την διατομή εξόδου (outlet), μπορεί να χρησιμοποιηθεί η υδροστατική κατανομή της πίεσεως ως συνοριακή συνθήκη. Συνηθέστερα όμως και για πλήρως ανεπτυγμένη ροή εφαρμόζεται η συνθήκη όπου η βαθμίδα, όλων των σχετικών ποσοτήτων, στην διεύθυνση κάθετη προς την διατομή εξόδου τίθεται ίση με το μηδέν, δηλαδή:

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial n} = \frac{\partial k}{\partial n} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = 0 \quad (3.3)$$

Όπου n = η κάθετη διεύθυνση στη διατομή εξόδου.

3.2 ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΤΟΙΧΩΜΑΤΟΣ

Ο τρόπος διαχείρισης ροών κοντά στο τοίχωμα εστιάζεται σε ομοιόμορφες ροές, πλήρως ανεπτυγμένες, σε ανοικτούς αγωγούς στους οποίους ο λόγος πλάτος προς βάθος είναι σημαντικός. Η ανάλυση μοιάζει με αυτή που γίνεται για ροές οριακού στρώματος ή ροές σε αγωγούς ορθογωνικής διατομής. Αυτού του τύπου οι ροές έχουν καλυφθεί εκτενώς στην βιβλιογραφία. Περισσότερες λεπτομέρειες μπορεί να αναζητήσει κανείς σε πηγές όπως οι Bernard & Wallace (2002) και Pope (2000).



Εικόνα 3.1 - Ομοιόμορφη ροή σε αγωγό μεγάλου πλάτους

3.2.1 Η ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΗ ΤΑΣΗ ΠΛΗΣΙΟΝ ΤΟΥ ΤΟΙΧΩΜΑΤΟΣ

Η συνολική διατμητική τάση στο τοίχωμα οφείλεται αποκλειστικά στην επίδραση του ιξώδους εφόσον θέλουμε η μέση ταχύτητα $\bar{U}=0$, συνεπάγεται και ότι οι συνιστώσες της $u=v=0$:

$$\tau = \rho \left(\nu \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} - \overline{uv} \right) \quad (3.4)$$

$$\tau_w = \rho \nu \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (3.5)$$

Από τις παραπάνω ποσότητες, καθώς και την πυκνότητα ρ , προσδιορίζεται η διατμητική ταχύτητα U_* και η ιξώδης κλίμακα μήκους δ_* :

$$U_* \equiv \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (3.6)$$

$$\delta_* \equiv \nu \sqrt{\frac{\rho}{\tau_w}} = \frac{\nu}{U_*} \quad (3.7)$$

Ο αριθμός Reynolds που προκύπτει από τις παραπάνω κλίμακες είναι εκ ταυτότητος μονάδα, ενώ ο διατμητικός αριθμός Reynolds ορίζεται ως:

$$Re_* = \frac{U_* h}{\nu} = \frac{h}{\delta_*} \quad (3.8)$$

Η ιξώδες κλίμακα μήκους ορίζεται ως:

$$\delta_\nu \equiv \nu \sqrt{\frac{\rho}{\tau_w}} = \frac{\nu}{U_*} \quad (3.9)$$

Η απόσταση από το τοίχωμα, μετρούμενη σε ιξώδεις κλίμακες μήκους ορίζεται ως:

$$y^+ = \frac{y}{\delta_\nu} = \frac{U_* y}{\nu} \quad (3.10)$$

Ουσιαστικά, το y^+ είναι της ομώνυμης τοπικός αριθμός Reynolds, επομένως η τιμή του είναι λογικό να καθορίζει την σχετική σπουδαιότητα της ιξώδους και της τυρβώδους διαδικασίας.

Βάσει του y^+ καθορίζονται διαφορετικές περιοχές ή στρώματα πλησίον του τοιχώματος. Στη περιοχή όπου ισχύει $y^+ < 50$, δηλαδή στην ιξώδη περιοχή του τοιχώματος (viscous wall region), η διατμητική τάση εξαρτάται άμεσα από το ιξώδες ενώ αντιθέτως όταν δηλαδή $y^+ > 50$ (Κατά άλλους (π.χ. Nezu & Nakagawa, 1993) η ιξώδης περιοχή τοιχώματος ορίζεται για $y^+ < 30$), δηλαδή στο εξωτερικό στρώμα (outer layer), η επίδραση του ιξώδους είναι αμελητέα. Το ιξώδες υπόστρωμα (viscous sublayer) ορίζεται μέσα στην ιξώδη περιοχή και ισχύει $y^+ < 5$. Λόγω του ιξώδους η τυρβώδης τάση είναι αμελητέα. Καθώς ο αριθμός Reynolds της ροής αυξάνει, το ποσοστό βάθους της ροής που καταλαμβάνεται από την ιξώδη περιοχή του τοιχώματος μειώνεται, αφού δ_h / h μεταβάλλεται κατά Re_*^{-1} (εξ. 3.8).

3.2.2 ΤΑ ΜΕΣΑ ΠΡΟΦΙΛ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ

Μια πλήρως ανεπτυγμένη και ομοιόμορφη ροή σε ανοικτό αγωγό, καθορίζεται πλήρως από τις ποσότητες ρ, ν, h και θ , ή ισοδύναμα από τις ρ, ν, h και U^* , αφού η διατμητική ταχύτητα συνδέεται με τις παραπάνω ποσότητες μέσω της παρακάτω εξ. (3.11).

$$\tau_w \equiv \rho U_*^2 = \rho g h \sin \theta \quad (3.11)$$

Βάσει του θεωρήματος Π του Buckingham και για τις μεταβλητές του προβλήματος, \bar{U} , y , ρ , ν , h και U^* , μπορούν να κατασκευαστούν 3 αδιάστατες ομάδες μεταβλητών. Θεωρώντας ως εξαρτημένη αδιάστατη μεταβλητή την ποσότητα \bar{U}/U^* , προκύπτει:

$$\frac{\bar{U}}{U_*} = F_o \left(\frac{y}{h}, Re_* \right) \quad (3.12)$$

όπου Re^* έχει οριστεί από την εξ. (3.7) και $F_o =$ "παγκόσμια" αδιάστατη συνάρτηση που πρέπει να οριστεί.

Παρόλο που η παραπάνω προσέγγιση φαίνεται απολύτως λογική, είναι προτιμότερο να προσεγγίσουμε το πρόβλημα κάπως διαφορετικά. Αντί για την \bar{U} , θεωρούμε την βαθμίδα ταχύτητας, $d\bar{U}/dy$, η οποία είναι η δυναμικά σημαντική παράμετρος (λόγω της παρουσίας της στην σχέση για την διατμητική τάση). Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω προκύπτει:

$$\frac{d\bar{U}}{dy} = \frac{U_*}{y} \Phi_1 \left(\frac{y}{\delta_v}, \frac{y}{h} \right) \quad (3.13)$$

όπου $\Phi_1 =$ "παγκόσμια" αδιάστατη συνάρτηση. Η επιλογή των παραμέτρων βασίζεται στο ότι η δ_v είναι η ορθή κλίμακα μήκους στην ιξώδη περιοχή του τοιχώματος ($y^+ < 50$), ενώ το h είναι η ορθή κλίμακα στο εξωτερικό στρώμα (outer layer), όπου $y^+ > 50$. Η παρακάτω σχέση δείχνει ότι οι δύο παράμετροι στην εξ. (3.13) περιέχουν τις ίδιες πληροφορίες με τις παραμέτρους της εξ. (3.12):

$$\frac{y}{\frac{\delta_v}{y}} = Re_* \quad (3.14)$$

3.2.3 Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ ΤΟΙΧΩΜΑΤΟΣ (LAW OF THE WALL)

Ο Prandtl (1930) απέδειξε ότι η ταχύτητα ροής στο στρωτό οριακό υπόστρωμα εξαρτάται από τις παραμέτρους μ , τ_w , ρ και y , ενώ είναι ανεξάρτητη από το δ , δηλαδή:

$$U = F_1(\mu, \tau_w, \rho, y) \quad (3.15)$$

και κατέληξε στην ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{U}{U_*} = F_1\left(\frac{U_* y}{\nu}\right) \text{ ή } u^+ = F_1(y^+) \quad (3.16)$$

Η εξ. (3.16) ονομάζεται νόμος του τοιχώματος (Law of the wall).

3.2.4 ΤΟ ΙΞΩΔΕΣ ΥΠΟΣΤΡΩΜΑ

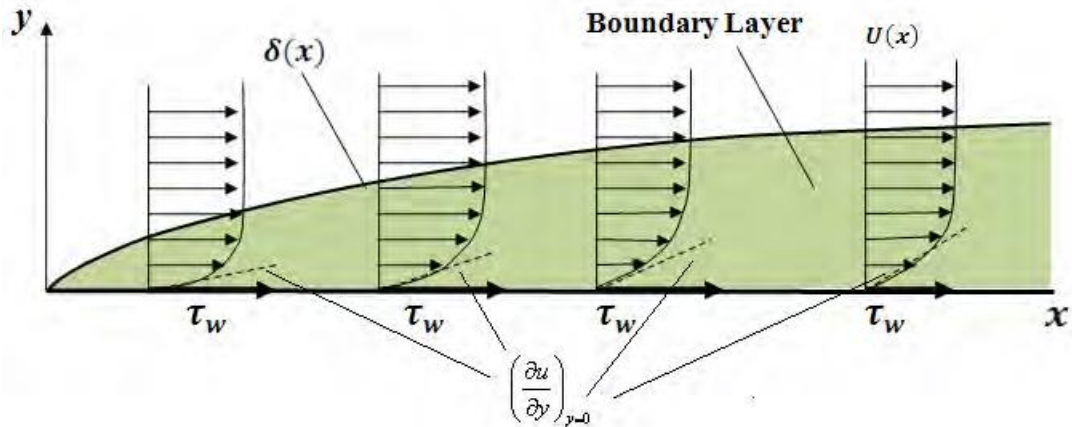
Η διατμητική τάση του τοιχώματος (Wall Shear Stress), για ένα Νευτώνειο ρευστό, ορίζεται ως η εφαπτομένη δύναμη λόγω της τριβής του ρευστού με το τοίχωμα και δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (3.17)$$

Όπου μ : δυναμικό ιξώδες του ρευστού

u : ταχύτητα ρευστού κατά μήκος του οριακού στρώματος

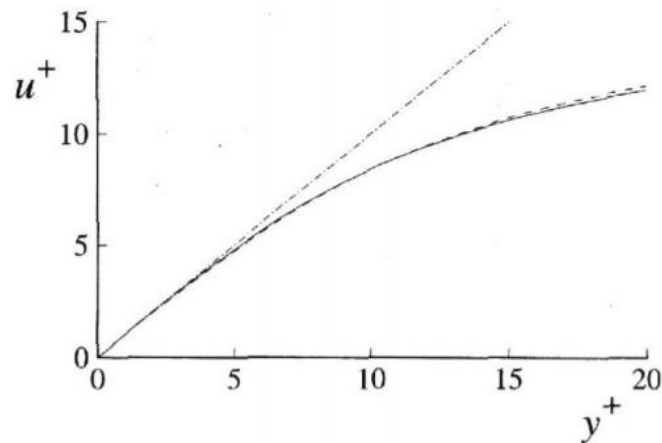
y : ύψος πάνω από το οριακό στρώμα



Εικόνα 3.2 – Ανάπτυξη οριακού στρώματος (Katsigialou 2017)

Κάθε ρευστό που κινείται κατά μήκος ενός συμπαγούς ορίου θα επιφέρει μια διατμητική πίεση σε αυτό το όριο. Η κατάσταση μη ολίσθησης υπαγορεύει ότι η ταχύτητα του ρευστού στο όριο είναι μηδέν, αλλά σε κάποιο ύψος είναι ίση με εκείνη του ρευστού. Η περιοχή μεταξύ αυτών των δύο σημείων ονομάζεται οριακό στρώμα (Katsigialou 2017) (Εικόνα 3.2).

Η συνθήκη μη ολίσθησης στο στερεό όριο υποθέτει ότι η στρώση ρευστού που έρχεται σε επαφή με το τοίχωμα έχει την ίδια ταχύτητα με αυτή του τοιχώματος. Δεν υπάρχει σχετική κίνηση μεταξύ του ορίου και της στρώσης του ρευστού συνεπώς δεν υπάρχει ολίσθηση.



Εικόνα 3.3 - Κατανομή της μέσης ταχύτητας πλησίον του τοιχώματος όπως προέκυψε από δεδομένα DNS των Kim et al. (1987): διακεκομμένη γραμμή για $Re = 5,600$, συνεχής για $Re = 13,750$ και διακεκομμένη με στίξεις γραμμή για την απεικόνιση της σχέσης $\overline{U}^+ = \overline{u}^+ = \overline{y}^+$ (Pope, 2000).

Στην Εικόνα 3.3 φαίνεται η συμπεριφορά της \overline{U}^+ πλησίον του τοιχώματος. Οι διαφορές από την γραμμική σχέση $\overline{u}^+ = \overline{y}^+$ είναι αμελητέες στο ιξώδες υπόστρωμα ($y^+ < 5$) και γίνονται σημαντικές (μεγαλύτερες του 25%) για $y^+ > 12$.

3.2.5 Ο ΝΟΜΟΣ ΑΠΟΚΛΙΣΕΩΣ ΤΗΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ (ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΣΤΗΝ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ ΖΩΝΗ)

Ο Von Karman (1930) απέδειξε ότι η ταχύτητα ροής στην εξωτερική περιοχή u είναι ανεξάρτητη από τη μ , αλλά η διαφορά της από την εξωτερική ταχύτητα ροής U εξαρτάται από τις παραμέτρους δ , τ_w , ρ και y , δηλαδή:

$$U - u(y) = F_3(\delta, \tau_w, \rho, y) \quad (3.18)$$

Και κατέληξε στη ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{U-u}{U^*} = F_3\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad \text{ή} \quad \frac{U}{U^*} - u^+ = F_3\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad (3.19)$$

Η εξ. (3.19) ονομάζεται εξωτερικός νόμος ή νόμος αποκλίσεως της ταχύτητας (velocity-defect law).

3.2.6 Ο ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΟΣ ΝΟΜΟΣ (ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΣΤΗΝ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΖΩΝΗ)

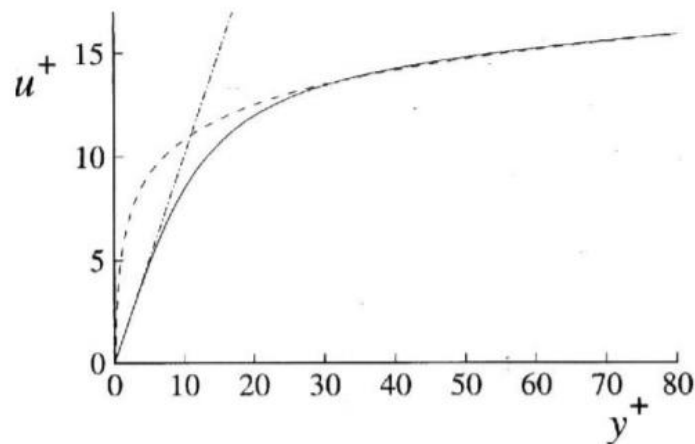
Ο Millikan (1939) ολοκλήρωσε την κατανομή των ταχυτήτων ροής προτείνοντας για την ενδιάμεση περιοχή μια εξίσωση που προσαρμόζεται στις εξ. (3.16) και (3.19) και έχει την ακόλουθη λογαριθμική μορφή:

$$\frac{u}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{u^* y}{\nu}\right) + B \quad \text{ή} \quad u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B \quad (3.20)$$

όπου B είναι η σταθερά της ολοκληρώσεως. Η εξ. (3.20) αποτελεί τον λογαριθμικό νόμο και κ = σταθερά του von Karman. Γενικώς, στην βιβλιογραφία υπάρχει μια σχετική διαφοροποίηση για τις τιμές του B και κ , αλλά είναι μέσα σε 5% απόκλιση από τις τιμές (Pope, 2000)

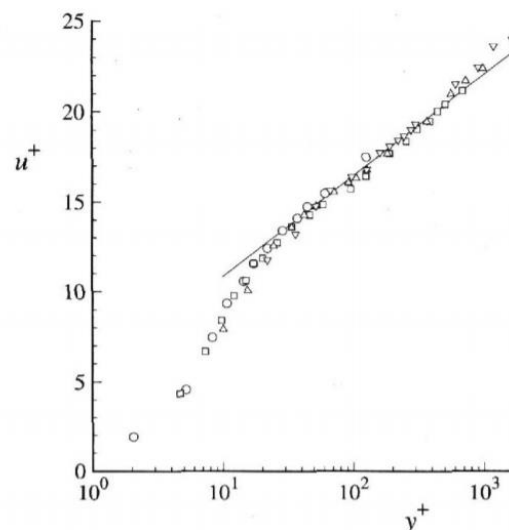
$$\kappa = 0.41 \quad \text{και} \quad B = 5.2$$

Παρακάτω δίδεται η σύγκριση μεταξύ του λογαριθμικού νόμου και δεδομένων DNS για το εσωτερικό στρώμα. Είναι σαφές ότι υπάρχει εξαιρετική συμφωνία για $y^+ > 30$:



Εικόνα 3.4 - Κατανομή της μέσης ταχύτητας πλησίον του τοιχώματος όπως προέκυψε από δεδομένα DNS των Kim et al. (1987): για $Re = 13,750$ διακεκομμένη με στίξεις γραμμή για την απεικόνιση της σχέσης $\overline{U}^+ = \overline{u}^+ = \overline{y}^+$ (Pope, 2000).

Ο λογαριθμικός νόμος αποκαλύπτεται με μεγαλύτερη σαφήνεια σε ημι-λογαριθμικό διάγραμμα, Εικόνα 3.5. Διαπιστώνεται ότι τα σημεία, ασχέτως αριθμού Reynolds, συμπίπτουν επί μιας γραμμής και ότι για $y^+ > 30$ τα δεδομένα συμφωνούν με τον λογαριθμικό νόμο.



Εικόνα 3.5 - Κατανομή της μέσης ταχύτητας για την περίπτωση πλήρους αναπτυγμένης ροής σε ανοικτό αγωγό, μετρούμενη από τους Wei and Willmarth (1989): Ο για $Re = 2,970$, για $Re = 14,914$, Δ για $Re = 22,776$ και □ $Re = 39,582$. Ο λογαριθμικός νόμος εκφράζεται από την συνεχή γραμμή και $\overline{U}^+ = \overline{u}^+$ (Pope, 2000).

Η περιοχή μεταξύ του ιξώδους υποστρώματος ($y^+ < 5$) και της περιοχής ισχύος του λογαριθμικού νόμου ($y^+ > 30$), λέγεται ενδιάμεσο στρώμα (buffer layer). Το στρώμα αυτό είναι η περιοχή μετάβασης από το ιξώδες υπόστρωμα (επικρατεί το ιξώδες) στη τυρβώδη περιοχή.

Με βάση τα παραπάνω και τις περιγραφές των Nezu & Nakagawa (1993), μπορούμε να συνοψίσουμε τα χαρακτηριστικά της τύρβης στις διάφορες περιοχές της ροής:

(α) Περιοχή τοιχώματος ($y/h < \sim 0.15$): Εδώ, οι κλίμακες μήκους και ταχύτητας όπως τύρβης είναι ν/U^* και U^* , αντίστοιχα. Φαινόμενα διαπίδυσης όπως τύρβης (bursting phenomena) παρουσιάζονται έντονα κοντά στο τοίχωμα, δηλαδή για $y^+ < 5$. Στην περιοχή αυτή ($y^+ < 5$) η παραγωγή τυρβώδους κινητικής ενέργειας είναι μεγαλύτερη του ρυθμού ανάλωσης ($\Pi > \varepsilon$).

(β) Περιοχή όπως ελεύθερης επιφάνειας ($0.6 < y/h < 1$): Σ' αυτήν την περιοχή η δομή όπως τύρβης ελέγχεται από όπως εξωτερικές κλίμακες, h και U_{max} , όπως τύρβης. Η ανάλωση ενέργειας, ε , είναι μεγαλύτερη από την παραγωγή, Π . Συνεπώς, τυρβώδης ενέργεια πρέπει να διοχετεύεται από την περιοχή του τοιχώματος στην περιοχή όπως ελεύθερης επιφάνειας, μέσω τυρβώδους διαχύσεως. Χαρακτηριστικά όπως τύρβης, όπως, π.χ. η ένταση στην κατακόρυφη διεύθυνση, επηρεάζονται εντόνως από την ελεύθερη επιφάνεια.

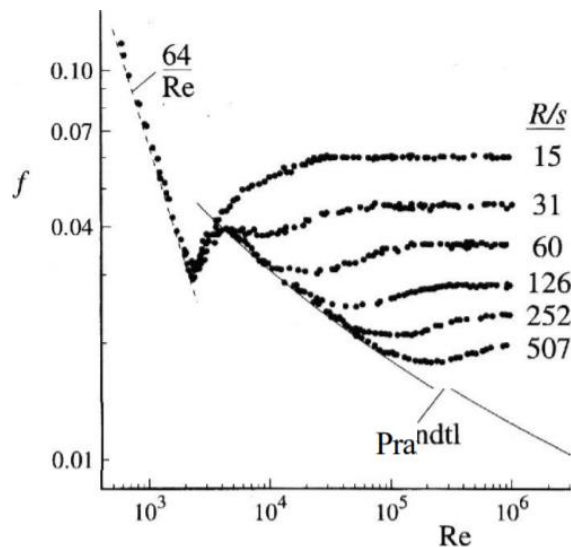
(γ) Ενδιάμεση περιοχή ($\sim 0.15 < y/h < 0.6$): Αυτή η περιοχή δεν επηρεάζεται σημαντικά από τις δύο προηγούμενες περιοχές. Μπορεί όμως να θεωρηθεί ότι αντιστοιχεί στην αδρανειακή υπό-περιοχή (inertial sub range) του φάσματος κλιμάκων της τύρβης. Οι κλίμακες μήκους και ταχύτητας της τύρβης είναι y και $\sqrt{\tau/\rho}$, αντιστοίχως. Η περιοχή μπορεί να πει κανείς ότι διατηρεί ένα ισοζύγιο μεταξύ παραγωγής και ανάλωσης τυρβώδους ενέργειας ($\Pi \cong \varepsilon$) και περιλαμβάνει και το τμήμα της περιοχής τοιχώματος για το οποίο $y^+ > 50$.

3.2.7 ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΤΟΥ ΤΟΙΧΩΜΑΤΟΣ

Μέχρι τώρα έχουμε υποθέσει ότι το τοίχωμα του αγωγού είναι λείο. Στην πράξη, όμως, κάθε επιφάνεια παρουσιάζει κάποια τραχύτητα, η οποία χαρακτηρίζεται από μια κλίμακα μήκους (ύψους) των ανωμαλιών που προκαλούν την τραχύτητα, έστω k_s . Για μια δεδομένη ροή, το βασικό ερώτημα που πρέπει να απαντηθεί είναι το εξής: Υπάρχει μια τιμή του k_s (έστω k_{s*}), κάτω από την οποία η ροή είναι ανεξάρτητη της τραχύτητας ώστε το τοίχωμα να θεωρείται υδραυλικά λείο; Για $k_s > k_{s*}$, πώς επηρεάζεται η ροή από την τραχύτητα;

Ο Nikuradse έκανε πειράματα σε σωλήνες με προσκολλημένους κόκκους άμμου στο εσωτερικό τοίχωμα, σε πολύ πυκνή διάταξη. Τα μεγέθη των κόκκων (και επομένως η

τραχύτητα) έπαιρναν τιμές από $k_s/R = 1/15$ έως $k_s/R = 1.500$ όπου $R = \eta$ ακτίνα του σωλήνα. Οι μετρήσεις για τον συντελεστή τριβών (συντελεστή Darcy στην εξίσωση Darcy – Weisbach) δίδονται παρακάτω:



Εικόνα 3.6 - Κατανομή Ο συντελεστής τριβών f συναρτήσει του αριθμού Reynolds σε αγωγούς για διάφορες τραχύτητες. Η διακεκομμένη γραμμή εκφράζει το νόμο της τριβής για στρωτή ροή, ενώ η συνεχής τον νόμο του Prandtl για τυρβώδη ροή σε λείους αγωγούς. Τα πειραματικά δεδομένα προέρχονται από μετρήσεις του Nikuradse (Pope,2000).

Παρατηρώντας προσεχτικά την Εικόνα 3.6, φαίνεται ότι η τραχύτητα έχει αμελητέα επίδραση στην στρωτή περιοχή και σχετικά μικρή επίδραση στην μεταβατική ζώνη. Μετά, οι καμπύλες ακολουθούν αρχικά το νόμο του Prandtl για λείους αγωγούς μέχρι κάποια τιμή του Re , πριν καμφθούν προς τα άνω και προσεγγίσουν μια ασυμπτωτική τιμή, η οποία είναι ανεξάρτητη του αριθμού Reynolds και εξαρτάται μόνο από το λόγο k_s/R .

Η παρατηρούμενη συμπεριφορά μπορεί να επεξηγηθεί με επέκταση του νόμου του τοιχώματος ώστε να συμπεριληφθεί και η τραχύτητα. Για δεδομένη τραχύτητα του τοιχώματος, που χαρακτηρίζεται από το ύψος τραχύτητας k_s , η βαθμίδα της ταχύτητας μπορεί να γραφεί ως:

$$\frac{d\bar{U}}{dy} = \frac{U^*}{y} \Phi\left(\frac{y}{\delta_v}, \frac{y}{h}, \frac{k_s}{\delta_v}\right) \quad (3.21)$$

όπου Φ είναι μια παγκόσμια, αδιάστατη συνάρτηση. Όπως και νωρίτερα, θεωρούμε ότι η $\bar{\Phi}$ δεν εξαρτάται από το y/h στο εσωτερικό στρώμα ($y/h < 0.1$).

Για υψηλούς αριθμούς Reynolds δύο ακραίες περιπτώσεις μπορούν να εξεταστούν. Αν k_s/δ_v είναι πολύ μικρό, είναι λογικό να υποθέσουμε ότι η ροή δεν επηρεάζεται από την τραχύτητα, οπότε ανακτούμε το γνωστό νόμο του τοιχώματος:

$$\frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{u^*}{y} \Phi_1\left(\frac{y}{\delta_v}\right) \quad \text{για } k_s \ll \delta_v \text{ και } y \ll h \quad (3.22)$$

Για μεγάλο y/δ_v , η υπόθεση ότι η επίδραση του ιξώδους εξαφανίζεται, οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η ΦI τείνει ασυμπτωτικά σε σταθερή τιμή, $\Phi I \sim 1/\kappa$, οπότε η εξ. (3.23) ολοκληρώνεται στον λογαριθμικό νόμο:

$$\frac{\bar{u}}{u^*} = \bar{U}^+ = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{y}{\delta_v}\right) + B \quad \text{για } k_s \ll \delta_v \text{ και } y \ll h \quad (3.24)$$

όπου $B = \text{"παγκόσμια" σταθερά.}$

Στην δεύτερη ακραία περίπτωση, η κλίμακα τραχύτητας, k_s , είναι μεγάλη σε σχέση με την κλίμακα ιξώδους, δ_v . Τότε, ο τοπικός αριθμός Reynolds ($U^*k_s/\nu = ks/\delta_v \gg 1$) είναι μεγάλος. Η μεταφορά ορμής από το υγρό προς το τοίχωμα πραγματοποιείται λόγω της δύναμης αντίστασης (drag) επί των στοιχείων τραχύτητας, η οποία σε υψηλούς αριθμούς Reynolds αποτελείται κυρίως από δυνάμεις πίεσεως παρά από δυνάμεις ιξώδους. Τότε, μπορεί να υποθέσει κανείς ότι το ιξώδες ν και επομένως το δ_v δεν είναι σημαντικές παράμετροι για το πρόβλημα. Έτσι η εξ. (3. 21) μπορεί να γραφεί ως:

$$\frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{u^*}{y} \Phi_R\left(\frac{y}{k_s}\right) \quad \text{για } \delta_v \ll k_s \text{ και } y \ll h \quad (3.25)$$

όπου Φ_R είναι μια παγκόσμια "αδιάστατη" συνάρτηση.

Για $y \gg ks$ μπορεί να υποθεθεί ότι η τύρβη καθορίζεται από τοπικές διεργασίες ανεξάρτητες του ks , δηλαδή εκείνες τις διεργασίες που λαμβάνουν χώρα σε λείο τοίχωμα. Αυτό συνεπάγεται ότι το Φ_R τείνει ασυμπτωτικά σε σταθερή τιμή ίση με $1/\kappa$. Τότε η εξ. (3.25) ολοκληρώνεται στον λογαριθμικό νόμο:

$$\bar{U}^+ = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{y}{\delta_v}\right) + B_2 \quad \text{για } \delta_v \ll k_s \text{ και } y \ll h \quad (3.26)$$

όπου B_2 είναι "παγκόσμια" σταθερά.

Για την γενική περίπτωση όπου k_s είναι συγκρίσιμο με το δ_n , παρόμοιος συλλογισμός οδηγεί στο συμπέρασμα ότι για $y \gg \delta_n$ και $y \gg k_s$ το προφίλ της ταχύτητας εκφράζεται ως:

$$\overline{U^+} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{y}{\delta_n} \right) + \tilde{B} \left(\frac{k_s}{\delta_n} \right) \quad (3.27)$$

Όταν το τοίχωμα είναι υδραυλικά λείο ($k_s/\delta_n \ll 1$), η εξ. (3.24) αντιστοιχεί στην εξ. (3.27) με:

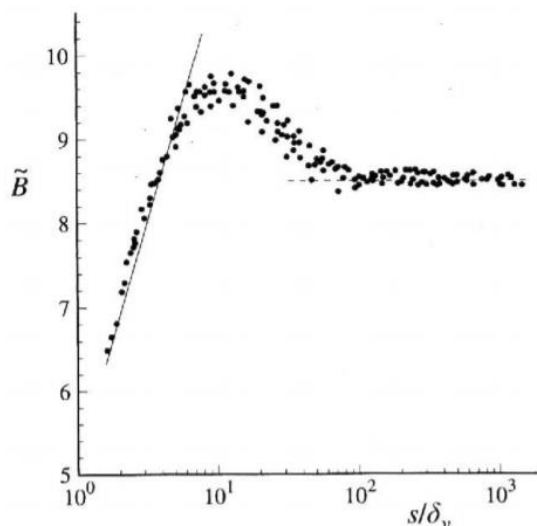
$$\tilde{B} \left(\frac{k_s}{\delta_n} \right) = B + \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{k_s}{\delta_n} \right) \quad (3.28)$$

ενώ για το πλήρως τραχύ τοίχωμα ($k_s/\delta_n \gg 1$), η εξ. (3.26) αντιστοιχεί στην εξ. (3.27) με:

$$\tilde{B} \left(\frac{k_s}{\delta_n} \right) = B_2 \quad (3.29)$$

Υπάρχουν πειράματα που επαληθεύουν την εξ. (3.27) και η σταθερά \tilde{B} έχει καθοριστεί ως συνάρτηση του k_s/δ_n από τα δεδομένα του Nikuradse, Εικ.3.7

Είναι προφανές ότι για $k_s/\delta_n \equiv k_s U_* / \nu \equiv k_s^+ > \sim 70$ το τοίχωμα είναι πλήρως τραχύ, με $B_2 = \tilde{B}(\infty) = 8.5$. Στο άλλο άκρο, οι μετρήσεις συμφωνούν με την εξ. (3.28) μέχρι $k_s/\delta_n \equiv k_s^+ < \sim 5$. Στην ενδιάμεση περιοχή έχουμε την μεταβατική ζώνη, όπου $\tilde{B} = \tilde{B}(k_s^+)$.



Σχήμα 3.7 - Ο σταθερός προσθετικός όρος \tilde{B} στην έκφραση του λογαριθμικού νόμου συναρτήσει του ύψους τραχύτητας $k_s \equiv s$ αδιαστατοποιημένο με την ιξώδη κλίμακα μήκους δ_v . Η διακεκομμένη γραμμή εκφράζει την πλήρως τυρβώδη περιοχή με $\tilde{B}=8.5$, η ευθεία γραμμή την λεία, ενώ τα πειραματικά δεδομένα προέρχονται από τον Nikuradse (Pope, 2000).

3.2.8 ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΣΤΟ ΤΟΙΧΩΜΑ

Ακριβώς στο τοίχωμα του ανοικτού αγωγού η ταχύτητα \bar{U} μηδενίζεται (λόγω προς συνθήκης μη ολισθήσεως) και η κάθετη ταχύτητα είναι προς μηδενική. Λόγω προς προς ύπαρξης του ιξώδους υποστρώματος, η χρήση προς συνθήκης μη ολισθήσεως θα απαιτούσε πολύ πυκνό υπολογιστικό πλέγμα (στην διεύθυνση κάθετα προς το τοίχωμα), προκειμένου να περιγράψει σωστά (από υπολογιστικής απόψεως) το ιξώδες υπόστρωμα και η επίδραση του ιξώδους εντός αυτού.

Προκειμένου να ξεπεραστεί αυτή η δυσκολία επινοήθηκε από τους Launder & Spalding (1974) η χρήση συναρτήσεων τοιχώματος (wall functions), όπου θεωρήθηκε ότι σε όλες τις ροές τοιχώματος το προφίλ της ταχύτητας πλησίον του τοιχώματος υπακούει τον λογαριθμικό νόμο. Έτσι, αντί να διακριτοποιήσουμε τις εξισώσεις της ορμής μέσω του ιξώδους υποστρώματος και μέχρι το τοίχωμα, το υπολογιστικό πλέγμα κατασκευάζεται έτσι ώστε ο πρώτος κόμβος (μετά τον κόμβο στο τοίχωμα) να τοποθετείται στην περιοχή ισχύος του λογαριθμικού νόμου, δηλαδή περίπου $50-60 < y_p^+ < 100$. Έτσι, η \bar{U} – εξίσωση της ορμής εφαρμόζεται για τον πρώτο όγκο ελέγχου, ο οποίος εφάπτεται του τοιχώματος και έχει ως κεντρικό κόμβο αυτόν που ικανοποιεί την ανισότητα $50-60 < y_p^+ < 100$. Η επίλυση του συστήματος των \bar{U} – εξισώσεων προϋποθέτει μια αρχική εκτίμηση της διατμητικής τάσεως στο τοίχωμα (τ_w), ή εναλλακτικά μια αρχική εκτίμηση της διατμητικής ταχύτητας, U^* . Η

προκύπτουσα ταχύτητα στον πρώτο κόμβο χρησιμοποιείται στον λογαριθμικό νόμο, ο οποίος γράφεται εδώ στην γενική μορφή:

$$\bar{U}_p^+ = \frac{\bar{U}_p}{U_*} = \frac{1}{\kappa} \ln (E \cdot y_p^+) \quad (3.30)$$

προκειμένου να διορθωθεί η αρχική εκτίμηση για την διατμητική ταχύτητα, U_* . Υπενθυμίζεται, ότι η παράμετρος E λαμβάνει τιμές ορισμένες και από την υδραυλική συμπεριφορά του τοιχώματος (λείο ή τραχύ).

Οι οριακές συνθήκες για k και ε στον πρώτο κόμβο ορίζονται ως τύπου Dirichlet (δηλαδή γνωστές τιμές στον κόμβο p) και προκύπτουν από την υπόθεση ισορροπίας μεταξύ παραγωγής της τύρβης και ανάλωσής της. Αυτά οδηγούν στις τιμές:

$$k_p = \frac{U_*^2}{\sqrt{c_\mu}} \quad (3.31)$$

$$\varepsilon_p = \frac{U_*^3}{\kappa y_p} \quad (3.32)$$

Σημειώνεται, ότι η εξ. (3.32) μπορεί να αποτελέσει την βάση για την ερμηνεία της εξ. (3.2) για την διατομή εισόδου. Η εξ. (3.2) προκύπτει από την (3.32) για $y/h \cong 0.25$. Το σημείο αυτό ανήκει στην περιοχή λήξεως της ισχύος του λογαριθμικού νόμου, όπου η παραγωγή Π και η ανάλωση ε βρίσκονται σε ισορροπία.

3.2.9 ΔΙΑΧΕΙΡΗΣΗ ΤΗΣ ΕΛΕΥΘΕΡΗΣ ΕΠΙΦΕΝΕΙΑΣ

Στην ελεύθερη επιφάνεια η ταχύτητα κάθετη προς αυτή τίθεται ίση προς το μηδέν (για μόνιμες ροές) και οι βαθμίδες (παράγωγοι) των άλλων συνιστωσών ταχύτητας και της τυρβώδους κινητικής ενέργειας, k , κάθετα προς την ελεύθερη επιφάνεια τίθενται ίσες προς το μηδέν. Τα παραπάνω βέβαια ισχύουν όταν δεν ασκείται διατμητική τάση στη επιφάνεια. Για την ποσότητα ε χρησιμοποιείται συνήθως και η έκφραση του Celik και Rodi (1988), η οποία μειώνει την κλίμακα μήκους της τύρβης (δηλαδή του τυρβώδους ιξώδους) πλησίον της επιφάνειας:

$$\varepsilon_{fs} = \frac{k_{fs}^{2/3}}{0.43h} \quad (3.33)$$

όπου ο δείκτης f_s υπονοεί την ελεύθερη επιφάνεια.

Τέλος, σημειώνεται ότι τα αναφερόμενα στο παρόν κεφάλαιο σε σχέση με της οριακές συνθήκες για την προσομοίωση ροών σε ανοικτούς αγωγούς αποτελούν μια πρώτη προσέγγιση και δεν μπορούν να εξεταστούν απομονωμένα από τα θέματα διακριτοποίησης του πεδίου ροής και αριθμητικής επιλύσεως του προβλήματος.

Ειδικότερες λεπτομέρειες μπορεί να αναζητήσει κανείς σε πηγές που πραγματεύονται το αντικείμενο της Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής (C.F.D.) της για παράδειγμα οι Versteeg & Malalasekera (1995).

3.3 ΜΕΛΕΤΗ ΑΥΞΗΣΗΣ ΤΗΣ ΕΛΕΥΘΕΡΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΛΟΓΟΥ ΤΗΣ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣ ΒΑΘΡΟΥ (BACKWATER EFFECT)

Πολύ ερευνητές ασχολήθηκαν με το προσδιορισμό του μεγέθους backwater Δy , μεταξύ άλλων ήταν οι Yarnell (1934a, b), ο D'Aubuisson (1852), ο Nagler (1918), ο Rehbock (1919) και ο Al-Nassri (1994).

Όμως Η πιο ευρέως χρησιμοποιούμενη εξίσωση για τον υπολογισμό της αύξησης της στάθμης του νερού λόγω βάθρων γεφυρών είναι η εξίσωση Yarnell (Yarnell, 1934a, 1934b):

$$\Delta y = 2K(K + 5Fr^2 - 0.6)(a + 15a^4) \frac{V^2}{2g} \quad (3.34)$$

Η

$$\frac{\Delta y}{y} = K(K + 5Fr^2 - 0.6)(a + 15a^4)Fr^2 \quad (3.34)$$

Όπου y είναι το κανονικό βάθος ροής, K συντελεστής που εξαρτάται από τη γεωμετρία του βάθρου και a το ποσοστό παρεμπόδισης. Στην παρόν εργασία ο συντελεστής K λαμβάνεται ίσος με 0.65 για κυλινδρικό βάθρο (Fourniotis et al 2019).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

4.1 ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Στη παρούσα εργασία μελετήθηκε το πρόβλημα της ροής σε τρισδιάστατο κανάλι, στο οποίο τοποθετείται βάθρο και μελετάται η αύξηση του νερού ανάντη της κατασκευής λόγω του εμποδίου. Εξετάστηκε αγωγός με κλίση πυθμένα τέτοια ώστε το διάνυσμα της επιτάχυνσης της βαρύτητας να έχει συνιστώσες, $g_x=0.009809995 \text{ m/s}^2$ και $g_z=9.809995 \text{ m/s}^2$. Η θεώρηση αυτή αντιστοιχεί σε κανάλι με κλίση πυθμένα $S_o=1 \text{ ‰}$ όταν το διάνυσμα της επιτάχυνσης της βαρύτητας λαμβάνεται κατακόρυφο. Το κανάλι είναι πλάτους $b = 0.30 \text{ m}$ και μήκους $l=8.0 \text{ m}$, ενώ το κανονικό βάθος ροής είναι $y_n=0.1\text{m}$ για παροχή $Q = 14.55 \text{ l/s}$. Επιπλέον, υπολογίστηκε το κρίσιμο βάθος ροής ίσο με 0.062 m ($y_c = (q^2/g)^{1/3}$, όπου q η ειδική παροχή $q = Q/B$). Όσον αφορά τη γεωμετρία του βάρου, είναι κυκλικής διατομής με διάμετρο $d = 3.342 \text{ cm}$ και τοποθετείται σε απόσταση $= 5\text{m}$ από την είσοδο του καναλιού (όπου έχει υπολογιστεί ότι η ροή έχει αναπτυχθεί πλήρως).

Η ταχύτητα εισόδου του νερού υπολογίστηκε με βάσει τις διαστάσεις του καναλιού και τα χαρακτηριστικά της ροής:

$$U_{water} = \frac{Q}{by_n} = \frac{14.55 \times 10^{-3}}{0.30 \times 0.10} \Rightarrow U_{water} = 0.485 \text{ m/s} \quad (4.1)$$

Η ταχύτητα του αέρα θεωρήθηκε ότι ανέρχεται στο 10% της ταχύτητας του νερού, δηλαδή:

$$U_{air} = 10\% U_{water} = 0.1 \times 0.484 \Rightarrow U_{air} = 0.0485 \text{ m/s} \quad (4.2)$$

Ο υπολογισμός της ταχύτητας του αέρα καθίσταται αναγκαίος διότι η μέθοδος VOF την χρησιμοποιεί ως μέρος της επίλυσης.

Λαμβάνοντας υπόψη την προϋπολογισθείσα ταχύτητα του νερού υπολογίζεται ο αριθμός Froude και ο αριθμός Reynold, αντίστοιχα:

$$Fr = \frac{U_{water}}{\sqrt{gy_n}} = \frac{0.485}{\sqrt{9.81 \times 0.10}} \Rightarrow Fr = 0.4897 \text{ ή } Fr \approx 0.49 \quad (4.3)$$

$$Re = \frac{U_{water} y_n}{\nu} = \frac{0.485 \times 0.10}{1.005 \times 10^{-6}} \Rightarrow Re = 48258,71 \quad (4.4)$$

Παρατηρώ ότι ο αριθμός Froude είναι μικρότερος του 0.5 συνεπώς η ροή είναι υποκρίσιμη.

Η τυρβώδης κινητική ενέργεια ισούται με την ένταση της τύρβης επί την ταχύτητα και όλο στο τετράγωνο. Λήφθηκαν οι εξής τιμές για το νερό και τον αέρα αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} k_{water} &= (IU_{water})^2 = (0.03 \times 0.485)^2 \Rightarrow \\ k_{water} &= 2.117025 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}^2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} k_{air} &= (IU_{air})^2 = (0.03 \times 0.0485)^2 \Rightarrow \\ k_{air} &= 2.117025 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}^2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Σημειώνεται ότι η ένταση της τύρβης θεωρείται ότι έχει τη τιμή της τάξεως 3%, όπως εξηγήθηκε στη ενότητα 3.1.

Ο ρυθμός ανάλωσης της τυρβώδους κινητικής ενέργειας για το νερό δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{water} &= C^{\frac{3}{4}} \frac{k_{water}^{\frac{3}{2}}}{0.10 \times y_n} = (0.09)^{\frac{3}{4}} \frac{(2.117024 \times 10^{-4})^{\frac{3}{2}}}{0.10 \times 0.10} \Rightarrow \\ \varepsilon_{water} &= 5.06140 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}^3 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Αντίστοιχα για τον αέρα, ισχύει:

$$\varepsilon_{air} = C^{\frac{3}{4}} \frac{k_{air}^{\frac{3}{2}}}{0.10 \times y_{air}} = (0.09)^{\frac{3}{4}} \frac{(2.117024 \times 10^{-6})^{\frac{3}{2}}}{0.10 \times 0.10} \Rightarrow$$

$$\varepsilon_{air} = 5.06140 \times 10^{-8} m^2 / s^3 \quad (4.7)$$

Για σχεδιαστικούς λόγους θεωρείται ότι η ζώνη του αέρα έχει ύψος $y_{air} = y_n = 10cm$.

Αντίστοιχα υπολογίστηκε και ο συντελεστής ειδικής ανάλωσης ενέργειας του νερού και του αέρα σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$\omega_{water} = C_{\mu}^{-1/4} \frac{(k_{water})^{1/2}}{0.10y_n} = (0.09)^{-1/4} \frac{(2.117025 \times 10^{-4})^{1/2}}{0.10 \times 0.10} \Rightarrow$$

$$\omega_{water} = 2.65645 s^{-1} \quad (4.8)$$

$$\omega_{air} = C_{\mu}^{-1/4} \frac{(k_{air})^{1/2}}{0.10y_{air}} = (0.09)^{-1/4} \frac{(2.117025 \times 10^{-6})^{1/2}}{0.10 \times 0.10} \Rightarrow$$

$$\omega_{water} = 0.265645 s^{-1} \quad (4.8)$$

Το μήκος που απαιτείται ώστε να αναπτυχθεί πλήρως η ροή, δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\frac{\delta}{l} = 0.38 \left(\frac{U_{water} l}{\nu} \right)^{-1/5} \Rightarrow l = 4.9734 m \quad \text{ή} \quad l \cong 4.98m \quad (4.9)$$

Με βάση τη μονοδιάστατη ανάλυση υπολογίστηκε η διατμητική τάση ως:

$$\tau_w = g \rho y_n S_o = 9.91 \times 998.2 \times 0.10 \times 0.001$$

$$\tau_w = 0.9792 Pa \quad (4.10)$$

Συνεπώς, η διατμητική ταχύτητα (ταχύτητα τριβής) ισούται:

$$U_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = \sqrt{\frac{0.9792}{998.2}} \Rightarrow U_* = 0.0313209 \text{ m/s} \quad (4.11)$$

Το τυρβώδες ιξώδες δίνεται από τη σχέση:

$$v_t = U_* \left\{ \kappa y_n \left(\frac{z}{y_n} \right) \left[1 - \left(\frac{z}{y_n} \right) \right] \right\} = 0.0313209 \{ 0.41 \times 0.1 \times \left(\frac{0.05}{0.10} \right) \left[1 - \left(\frac{0.05}{0.10} \right) \right] \} \Rightarrow$$

$$v_{t,max} = 3.2103922 \times 10^{-4} \text{ m}^2\text{s} \quad (4.12)$$

όπου για $z/y_n = 0.5$ προκύπτει η μέγιστη τιμή του τυρβώδους ιξώδους.

Επιπλέον η κλίση του πυθμένα με αυτό τον τρόπο προκύπτει ίση με:

$$S_0 = \frac{U_*^2}{g y_n} = \frac{(0.0313209)^2}{9.81 \times 0.10} \Rightarrow S_0 = 0.00099999875 \text{ ή } S_0 \cong 0.001 \quad (4.13)$$

Στο παρόν πρόβλημα η κλίση του πυθμένα λήφθηκε υπόψη μέσω του διανύσματος της επιτάχυνσης της βαρύτητας συνεπώς ο πυθμένας θεωρήθηκε οριζόντιος. Έτσι οι δύο συνιστώσες του διανύσματος της επιτάχυνσης της βαρύτητας υπολογίστηκαν ως:

$$g_x = 9.81 \sin(\tan^{-1}(0.001)) \Rightarrow g_x = 0.009809995 \text{ m/s}^2 \quad (4.14)$$

$$g_z = 9.81 \cos(\tan^{-1}(0.001)) \Rightarrow g_z = 9.809995 \text{ m/s}^2 \quad (4.15)$$

Ακολουθως με βάση τη τάση, υπολογίστηκε η θέση του πρώτου από τα τοιχώματα, υπολογιστικού κόμβου λαμβάνοντας υπόψη ότι το $y^+=70$, συνεπώς:

$$y = \frac{y^+v}{U_*} = \frac{70 \times 1.005 \times 10^{-6}}{0.0313209} \Rightarrow y = 2.24 \text{ mm} \quad (4.16)$$

Στο παρόν πρόβλημα υπολογίστηκε το ισοδύναμο ύψος τραχύτητας των τοιχωμάτων k_s ίσο με 0.0023 m. Με βάση αυτή τη τιμή προκύπτει:

$$k_s^+ = \frac{k_s U_*}{v} = \frac{(0.0023) \times (0.00313209)}{1.005 \times 10^{-6}} \Rightarrow k_s^+ = 71.6797 \quad (4.17)$$

Επομένως, όπως φαίνεται από την εξ.(4.17) είναι $k_s^+ > 70$ και βρισκόμαστε στην πλήρως τραχεία περιοχή. Το ύψος του πρώτου υπολογιστικού κελιού από το τοίχωμα τίθεται ίσο με $2k_s \cong 0.005$ m, έτσι ώστε ο πρώτος υπολογιστικός κόμβος να βρίσκεται σε απόσταση $y=0.00224$ m - $k_s=0.0023$ m. Με βάση αυτήν την τιμή του y προκύπτει τιμή του y^+ που εκφράζει την περιοχή ισχύος του λογαριθμικού νόμου.

Το πρόσθετο ύψος νερού από την εξίσωση του Yarnell για την περίπτωση της κυκλικής διατομής, προκύπτει:

$$\frac{\Delta y}{y_n} = K(K + 5Fr^2 - 0.6)(a + 15a^4)Fr^2$$

$$\frac{\Delta y}{y_n} = 0.60(0.60 + 5(0.49)^2 - 0.6)(0.1114 + 15(0.1114)^4)0.49^2$$

$$\frac{\Delta y}{y_n} \approx 0,0197 \quad (4.18)$$

Ενώ για την περίπτωση της ορθογωνικής διατομής:

$$\frac{\Delta y}{y_n} = K(K + 5Fr^2 - 0.6)(a + 15a^4)Fr^2$$

$$\frac{\Delta y}{y_n} = 0.90(0.90 + 5(0.49)^2 - 0.6)(0.0507 + 15(0.0507)^4)0.49^2$$

$$\frac{\Delta y}{y_n} \approx 0,0165 \quad (4.19)$$

Όπου K συντελεστής που εξαρτάται από το σχήμα (διαστάσεις) του βάρου σύμφωνα με Fourniotis et al 2019, όπου έγιναν πειραματικές μετρήσεις, ισούται:

$K=0.65$ για το κυλινδρικό βάρο

$K=0.95$ για το κυλινδρικό βάρο

Οι τιμές οι οποίες προέκυψαν από την παραπάνω μονοδιάστατη ανάλυση θα χρησιμοποιηθούν για τον καθορισμό αρχικών και οριακών συνθηκών στην επίλυση του δισδιάστατου προβλήματος στην παρούσα εργασία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

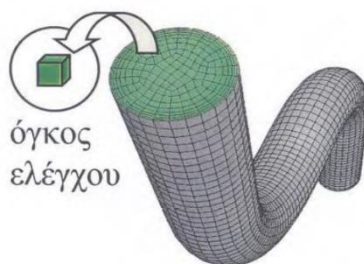
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ FLUENT

5.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗ

Οι εξισώσεις Navier-Stokes στη γενική τους μορφή δεν έχουν αναλυτική λύση, στην πραγματικότητα μόνο κάποιες πολύ εξειδικευμένες περιπτώσεις τους επιδέχονται αναλυτική λύση. Έτσι για την επίλυσή τους έχουν αναπτυχθεί προσεγγιστικοί αριθμητικοί μέθοδοι που βασίζονται σε αλγόριθμους αριθμητικής ανάλυσης. Το σύνολο των τεχνικών και των αλγορίθμων που χρησιμοποιούνται για την επίλυση των εξισώσεων αυτών συνιστούν στοιχεία υπολογιστικής ρευστοδυναμικής.

Αντικείμενο της υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής (CFD – Computational Fluid Dynamics) είναι η ανάλυση συστημάτων που περιλαμβάνουν ροή ρευστού και μεταφοράς θερμότητας με ή χωρίς χημικές αντιδράσεις με χρήση Η/Υ. Για να εξαχθεί μια προσεγγιστική λύση αριθμητικά πρέπει να χρησιμοποιηθεί μια μέθοδος διακριτοποίησης η οποία προσεγγίζει τις διαφορικές εξισώσεις με ένα σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων το οποίο μπορεί να επιλυθεί σε υπολογιστή. Οι προσεγγίσεις αυτές εφαρμόζονται σε μικρές περιοχές στο χώρο ή στο χρόνο και έτσι η αριθμητική λύση δίνει αποτελέσματα σε διακριτά σημεία στο χώρο και το χρόνο. Η ακρίβεια της αριθμητικής λύσης εξαρτάται από την ποιότητα της διακριτοποίησης που χρησιμοποιείται. Η ανάλυση ενός προβλήματος με τη χρήση CFD δεν αντικαθιστά την πειραματική μέθοδο, η οποία είναι αναγκαία για σύγκριση των αποτελεσμάτων των δυο μεθόδων, αλλά καλύπτει ένα μεγάλο μέρος της, εξοικονομώντας έτσι χρόνο και κόστος.

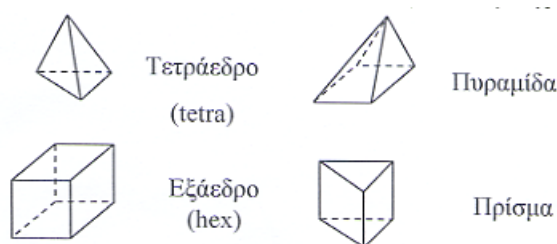
Για την επίλυση των εξισώσεων ενός προβλήματος, το Fluent χρησιμοποιεί τη μέθοδο των Πεπερασμένων Όγκων. Με τη μέθοδο αυτή, το υπολογιστικό πεδίο, που στην περίπτωσή μας είναι ο όγκος που καταλαμβάνει το ρευστό, διακριτοποιείται σε ένα σύνολο από πεπερασμένους όγκους ελέγχου (Σχήμα 5.1) που ονομάζονται κελιά. Οι εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα λύνονται στο σύνολο των πεπερασμένων όγκων ελέγχου. Οι Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις διακριτοποιούνται σε ένα σύστημα από Αλγεβρικές Εξισώσεις. Όλες οι Αλγεβρικές Εξισώσεις λύνονται αριθμητικά δομώντας έτσι το πεδίο της λύσης (Βάσσης,2015).



Εικόνα 5.1 - Ροϊκό πεδίο αγωγού διακριτοποιημένο σε πεπερασμένο αριθμό όγκων ελέγχου (υπολογιστικό πλέγμα)

Για να επιλυθεί ένα πρόβλημα διαφορικών εξισώσεων θα πρέπει, μεταξύ άλλων να καθοριστεί η γεωμετρία στην οποία αναζητείται η λύση του καθώς και οι αρχικές και συνοριακές συνθήκες.

Εφόσον η γεωμετρία του προβλήματος έχει καθοριστεί στη συνέχεια απαιτείται η διαμόρφωση του υπολογιστικού πλέγματος. Το σύνολο των πεπερασμένων όγκων που αποτελούν τη γεωμετρία του προβλήματος που έχει διακριτοποιηθεί, ονομάζεται πλέγμα (mesh). Για να είναι τα αποτελέσματα πιο ακριβή, πλέγμα πυκνώνεται στα σημεία ενδιαφέροντος καθώς και στις περιοχές που υπάρχουν μεταβολές της πίεσης, της ταχύτητας, της θερμοκρασίας, κλπ. Σε ροές ρευστών συνήθως πυκνώνουμε το πλέγμα στα τοιχώματα και το αραιώνουμε όσο απομακρυνόμαστε από εκεί. Η τεχνική αυτή στο Fluent ονομάζεται Inflation (Βάσης 2015).



Εικόνα 5.2- Γεωμετρία των στοιχείων που χρησιμοποιούνται για την κατασκευή του υπολογιστικού πλέγματος

Ένα πλέγμα μπορεί να είναι δομημένο (structured mesh), μη-δομημένο (unstructured), ή υβριδικό (hybrid), περιέχοντας στοιχεία και από τις δύο κατηγορίες. Το δομημένο πλέγμα αποτελείται από εξάεδρα στοιχεία και χαρακτηρίζεται από μεγάλη ομοιομορφία, ενώ το μη-δομημένο αποτελείται από τετράεδρα. Η δημιουργία ενός μη-δομημένου πλέγματος απαιτεί πολύ λιγότερο χρόνο από ότι ένα πλήρως δομημένου. Το πλεονέκτημα του δομημένου πλέγματος είναι η μεγαλύτερή του ακρίβεια και η γρηγορότερη σύγκλιση του αλγορίθμου επίλυσης.

Για απλές γεωμετρίες τα τετραπλευρικά/εξαεδρικά πλέγματα δίνουν λύσεις υψηλής ακρίβειας με λιγότερα στοιχεία από ότι τα τριγωνικά/τετραεδρικά πλέγματα. Για σύνθετες, όμως, γεωμετρίες τα τετραπλευρικά/εξαεδρικά πλέγματα δεν προσφέρουν κάποιο πλεονέκτημα, οπότε είναι προτιμότερο να χρησιμοποιηθούν τριγωνικά/τετραεδρικά πλέγματα (Φουρνιώτης 2005).

5.1.1 ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΣΤΟ ANSYS-FLUENT

Παρακάτω γίνεται αναφορά στο θεωρητικό υπόβαθρο που χρησιμοποιεί το Fluent για την επίλυση των εξισώσεων. Γίνεται αναφορά στις επιλυτές που χρησιμοποιεί το πρόγραμμα, στις μεθόδους διακριτοποίησης και τα σχήματα παρεμβολής.

5.1.1.1 ΕΙΔΗ ΕΠΙΛΥΤΩΝ

Υπάρχουν δύο είδη επιλυτών, ένα με βάση τη πίεση (pressure based) και ένα με βάση την πυκνότητα (density based). Οι αλγόριθμοι επίλυσης με βάση την πίεση είναι εφαρμόσιμοι σε ένα μεγάλο εύρος ροών, από ασυμπίεστες ροές χαμηλών ταχυτήτων μέχρι συμπίεστες ροές υψηλών ταχυτήτων. Είναι πιο ευέλικτοι και απαιτούν λιγότερη μνήμη. Οι αλγόριθμοι επίλυσης με βάση την πυκνότητα εφαρμόζονται κυρίως σε συμπίεστες ροές υψηλών ταχυτήτων με αναφλέξεις και υπερηχητικές ροές. Στους επιλύτες με βάση την πίεση είναι διαθέσιμοι 2 αλγόριθμοι:

(α) Διαχωριστικός (Segregated Solver)

(β) Συζευγμένος (Coupled Solver)

Στον διαχωριστικό αλγόριθμο, η επίλυση των εξισώσεων γίνεται διαδοχικά και οι λύσεις της προηγούμενης εξίσωσης μεταβιβάζονται στην επόμενη. Στον συζευγμένο αλγόριθμο, οι εξισώσεις λύνονται ταυτόχρονα.

Για το παρόν πρόβλημα χρησιμοποιήθηκε ο pressure based – segregated solver. Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος απαιτεί λιγότερη μνήμη στον υπολογιστή επειδή για τις διακριτοποιημένες εξισώσεις απαιτείται να αποθηκεύονται μόνο μια φορά. Η σύγκλιση όμως είναι σχετικά πιο αργή σε σχέση με άλλους αλγόριθμους που λύνουν παράλληλα τις εξισώσεις.

5.1.1.2 ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

Το Fluent χρησιμοποιεί μία τεχνική που βασίζεται στους όγκους ελέγχου για να μετατρέψει μία γενική βαθμωτή εξίσωση μεταφοράς σε μια αλγεβρική εξίσωση που μπορεί να λυθεί αριθμητικά. Αυτή η τεχνική των όγκων ελέγχου συνιστά την ολοκλήρωση της εξίσωσης μεταφοράς σε κάθε όγκο ελέγχου, αποδίδοντας μία διακριτή εξίσωση που εκφράζει το νόμο της διατήρησης στη βάση ενός όγκου ελέγχου.

Η διακριτοποίηση των εξισώσεων του προβλήματος μπορεί να παρουσιαστεί πολύ πιο εύκολα θεωρώντας τη μη μόνιμη εξίσωση διατήρησης μεταφοράς ενός βαθμωτού μεγέθους Φ . Αυτό μπορούμε να το δούμε στην επόμενη εξίσωση που είναι γραμμένη σε ολοκληρωτική μορφή για έναν αυθαίρετο όγκο V :

$$\int_v \frac{\partial \rho \Phi}{\partial t} + \oint \rho \Phi \vec{v} \cdot d\vec{A} = \oint \Gamma_\Phi \nabla \Phi \cdot d\vec{A} + \int_v S_\Phi dV \quad (5.1)$$

όπου

ρ : η πυκνότητα

\vec{v} : το διάνυσμα της ταχύτητας ($\vec{v}=u\vec{i}+v\vec{j}$ στις 2 διαστάσεις)

\vec{A} : το διάνυσμα επιφανείας

Γ_Φ : ο συντελεστής διάχυσης του μεγέθους Φ

$\nabla \Phi$: παράγωγος κατά κατεύθυνση ή βαθμίδα ή κλίση του μεγέθους Φ

($\nabla \Phi = (\partial \Phi / \partial x) \vec{i} + (\partial \Phi / \partial y) \vec{j}$ στις 2 διαστάσεις)

S_Φ : η πηγή του Φ ανά μονάδα όγκου

Η εξίσωση (5.1) εφαρμόζεται σε κάθε όγκο ελέγχου στο υπολογιστικό πεδίο. Η διακριτοποίηση της εξίσωσης (5.1) σε ένα τέτοιο κελί δίνει:

$$\frac{\partial \rho \Phi}{\partial t} V + \sum_f^{N_{faces}} \rho_f \vec{v}_f \Phi_f \cdot \vec{A}_f = \sum_f^{N_{faces}} \Gamma_\Phi \nabla \Phi_f \cdot \vec{A}_f + S_\Phi V \quad (5.2)$$

Όπου:

N_{faces} : ο αριθμός των πλευρών (2Δ) ή εδρών (3Δ) που περικλείουν το κελί

Φ_f : η ποσότητα του Φ που περνάει μέσα από την πλευρά

$\rho_f \vec{v}_f \Phi_f \cdot \vec{A}_f$: η ροή μάζας στην πλευρά

\vec{A}_f : η επιφάνεια της πλευράς

$\nabla \Phi_f$: η παράγωγος κατά διεύθυνση του Φ στην πλευρά

V : ο όγκος του κελιού

Στη συνέχεια λύνεται η διακριτοποιημένη εξίσωση μεταφοράς (5.2) που περιέχει το άγνωστο βαθμωτό μέγεθος Φ στο κέντρο του κελιού καθώς και τις άγνωστες τιμές του στα γειτονικά κελιά. Αυτή η εξίσωση γενικά θα είναι μια μη-γραμμική ως προς τις μεταβλητές αυτές. Μια γραμμική μορφή της εξίσωσης (5.2) μπορεί να γραφεί ως:

$$\alpha_p \Phi = \sum_{nb} \alpha_{nb} \Phi_{nb} + b \quad (5.3)$$

όπου η υπόστιξη nb αναφέρεται στα γειτονικά κελιά και α_p, α_{nb} είναι οι γραμμικοποιημένοι συντελεστές των Φ και Φ_{nb} .

5.1.1.3 ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΟΝ ΟΓΚΟ ΤΟΥ ΡΕΥΣΤΟΥ

Εξ' ορισμού, το Fluent αποθηκεύει τις διακριτές τιμές της βαθμωτής ποσότητας Φ στο κέντρο των κελιών. Για τους όρους μεταφοράς όμως χρειάζεται να γνωρίζουμε τις τιμές Φ_f στις πλευρές ή έδρες (faces) και αυτό γίνεται με τη μέθοδο της παρεμβολής. Οι όροι μεταφοράς στην εξίσωση (5.2) είναι οι $\sum_f^{N_{faces}} \rho_f \vec{v}_f \Phi_f \cdot \vec{A}_f$.

Για την παρεμβολή χρησιμοποιείται ένα σχήμα που ονομάζεται upwind που σημαίνει ότι οι τιμές στις πλευρές Φ_f , προέρχονται από τιμές των κελιών που βρίσκονται στα ανάντη σχετικά με τη διεύθυνση της ταχύτητας. Το Fluent παρέχει τη δυνατότητα επιλογής πολλών σχημάτων παρεμβολής για τους όρους μεταφοράς, τα οποία είναι:

- First-Order Upwind: Συγκλίνει ευκολότερα, μόνο πρώτης τάξης ακρίβεια.
- Power Law: Καλύτερη ακρίβεια από το First-Order για ροές όπου $Re_{cell} < 5$ δηλαδή ροές με χαμηλό αριθμό Reynolds

- Second-Order Upwind: Ακρίβεια 2ης τάξης, απαραίτητο για πλέγμα με τριγωνικά η τετραεδρικά στοιχεία. Όταν η ροή δεν είναι ευθυγραμμισμένη με το πλέγμα, η σύγκλιση μπορεί να είναι πιο αργή
- Monotone Upstream-Centered Schemes for Conservation Laws (MUSCL): Τοπικά 3ης τάξης σχήμα για μη δομημένα πλέγματα, περισσότερο ακριβές στη πρόβλεψη δευτερευουσών ροών, στροβίλων, δυνάμεων, κτλ.
- Quadratic Upwind Interpolation (QUICK): Εφαρμόζεται σε πλέγματα με τετράγωνα ή εξάεδρα κελιά και υβριδικά πλέγματα, χρήσιμο για ροές με στροβιλισμούς / ελικότητα, 3ης τάξης ακρίβεια σε ομοιόμορφο πλέγμα.

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα χρησιμοποιήθηκε το σχήμα QUICK λόγω της στροβιλότητας της ροής αλλά και της μεγαλύτερης ακρίβειας που παρέχει.

5.1.1.4 ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΚΛΙΣΕΩΝ (GRADIENTS)

Οι κλίσεις δεν χρειάζονται μόνο για τον υπολογισμό των τιμών ενός βαθμωτού μεγέθους στις πλευρές των κελιών, αλλά και για τον υπολογισμό δευτερευόντων όρων διάχυσης και παραγώγων ταχύτητας. Η κλίση $\nabla\Phi$ μιας μεταβλητής Φ , χρησιμεύει στη διακριτοποίηση των όρων μεταφοράς και διάχυσης στις εξισώσεις διατήρησης για τη ροή. Είναι οι όροι $\sum_f^{N_{faces}} \rho_f \vec{v}_f \Phi_f \cdot \vec{A}_f$ στην εξίσωση (5.2). Οι κλίσεις υπολογίζονται στο Fluent σύμφωνα με τις μεθόδους:

- Green-Gauss Cell-Based η οποία είναι η λιγότερο υπολογιστικά απαιτητική. Η λύση μπορεί να έχει λάθος στη διάχυση.
- Green-Gauss Node-Based η οποία είναι περισσότερο ακριβής, είναι υπολογιστικά απαιτητική, ελαχιστοποιεί τα λάθη στη διάχυση και συνίσταται για μη δομημένα πλέγματα.
- Least-Squares Cell-Based που είναι η εξ' ορισμού μέθοδος του προγράμματος. Έχει την ίδια ακρίβεια και τις ιδιότητες με τη Node-Based για τις κλίσεις, αλλά είναι λιγότερο υπολογιστικά απαιτητική.

Στο παρόν πρόβλημα χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος Least-Squares Cell-Based για την διακριτοποίηση των κλίσεων.

5.1.1.5 ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΙΕΣΗ

Το πεδίο της πίεσης και οι παροχές δεν είναι γνωστές από πριν και πρέπει να βρεθούν σαν ένα μέρος της λύσης. Το Fluent, χρησιμοποιεί ένα σχήμα, όπου η πίεση και η ταχύτητα μαζί αποθηκεύονται στα κέντρα των κελιών. Όμως επειδή χρειαζόμαστε την τιμή της πίεσης στις πλευρές (faces), είναι απαραίτητο ένα σχήμα παρεμβολής που να παίρνει την τιμή της πίεσης στο κέντρο του κελιού και να την υπολογίζει στις πλευρές του.

Τα σχήματα παρεμβολής που είναι διαθέσιμα στο Fluent για τον διαχωριστικό επιλύτη με βάση την πίεση (pressure based – segregated solver) είναι:

- **Standard:** Το προκαθορισμένο σχήμα. Έχει μειωμένη ακρίβεια σε ροές που παρουσιάζονται μεγάλες επιφανειακές κάθετες κλίσεις πίεσης κοντά σε όρια. Δεν πρέπει να χρησιμοποιείται όταν απότομες μεταβολές της πίεσης παρουσιάζονται στη ροή. Τότε πρέπει να χρησιμοποιείται το PRESTO!
- **PRESTO!:** Χρησιμοποιείται για πολύ στροβιλώδεις / ελικοειδείς ροές, ροές που εμπεριέχουν απότομες μεταβολές της πίεσης ή σε πεδία με μεγάλη καμπυλότητα.
- **Linear:** Χρησιμοποιείται όταν οι άλλες επιλογές έχουν δυσκολίες στη σύγκλιση ή αφύσικη συμπεριφορά.
- **Second-Order:** Χρησιμοποιείται για συμπιεστές ροές.
- **Body Force Weighted:** Χρησιμοποιείται όταν οι δυνάμεις στα σώματα είναι μεγάλες ή όταν οι ροές είναι πολύ στροβιλώδεις.

5.1.1.6 ΣΥΝΔΕΣΗ ΠΙΕΣΗΣ ΚΑΙ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ

Η σύνδεση πίεσης και ταχύτητας αναφέρεται σε έναν αριθμητικό αλγόριθμο ο οποίος χρησιμοποιεί έναν συνδυασμό των εξισώσεων της συνέχειας και της ορμής για να βγάλει μια εξίσωση για την πίεση ή για την διόρθωση της πίεσης όταν χρησιμοποιούμε επιλύτη βασισμένο στην πίεση.

Στο Fluent είναι διαθέσιμοι 5 τέτοιοι αλγόριθμοι:

- **Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations (SIMPLE).** Είναι ο προκαθορισμένος αλγόριθμος του προγράμματος ο οποίος είναι πολύ σταθερός.

- SIMPLE-Consistent (SIMPLEC). Επιτρέπει ταχύτερη σύγκλιση για απλά προβλήματα.
- Pressure-Implicit with Splitting of Operators (PISO). Χρήσιμος για προβλήματα μη-μόνιμων ροών ή για πλέγματα που περιέχουν κελιά με μεγαλύτερη από τη μέση στρεβλότητα.
- Fractional Step Method (FSM) για μη μόνιμες ροές. Έχει παρόμοια χαρακτηριστικά με τον αλγόριθμο PISO.
- Coupled Algorithm. Ενεργοποιείται όταν έχει επιλεγθεί ο επιλύτης Pressure – Based Coupled Solver.

5.1.1.7 ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ

Το Fluent, έχει τη δυνατότητα σαν πρόγραμμα να «τρέξει» παράλληλα σε πολλούς επεξεργαστές, με αποτέλεσμα να επιτυγχάνεται η διαδικασία της προσομοίωσης γρηγορότερα. Οι σύγχρονοι υπολογιστές μπορούν να διαθέτουν πολλούς επεξεργαστές ή έναν επεξεργαστή με πολλούς πυρήνες. Κάθε ένας από αυτούς μπορεί να αποτελέσει έναν κόμβο υπολογισμού για το Fluent. Το πλέγμα αυτόματα χωρίζεται σε τμήματα και κάθε ένας υπολογιστικός κόμβος απασχολείται με ένα τμήμα.

Κάθε επεξεργαστής λύνει το πρόβλημα ξεχωριστά από τους υπόλοιπους και επικοινωνεί μαζί τους όταν απαιτείται η λήψη δεδομένων, που συνήθως αυτό συμβαίνει στα όρια των τμημάτων. Στο τέλος κάθε επαναληπτικής διαδικασίας, ελέγχει τον καταμερισμό το επεξεργαστικού φόρτου, ώστε αν υπάρχουν σημαντικές διαφορές να τις τροποποιήσει κατάλληλα.

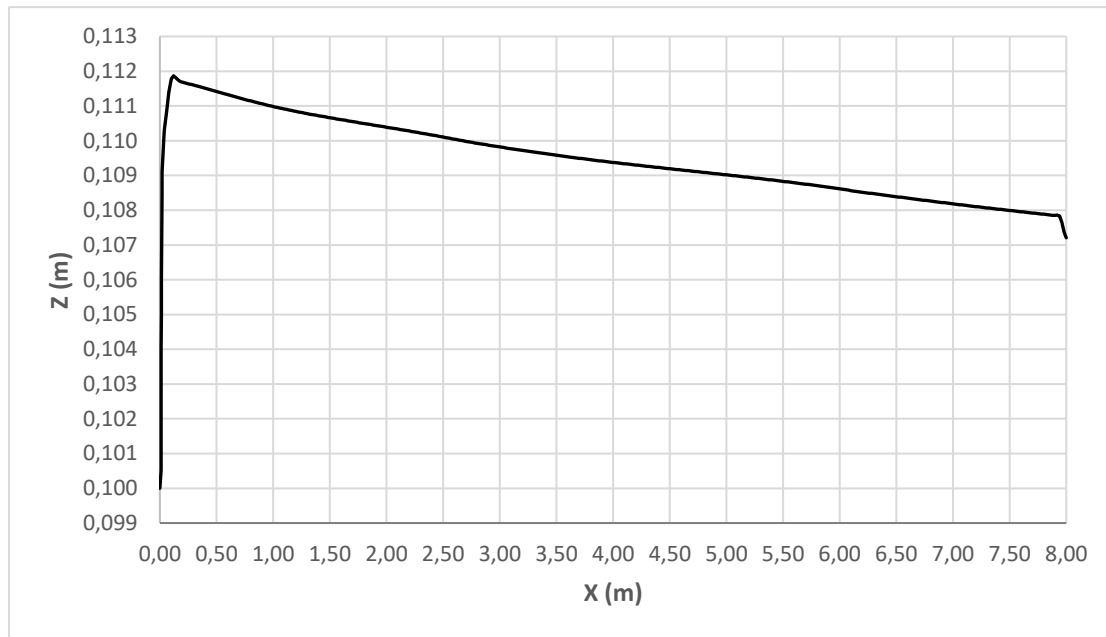
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

6.1 ΚΑΝΑΛΙ ΧΩΡΙΣ ΒΑΘΡΟ – ΕΠΙΠΕΔΟΣ ΠΥΘΜΕΝΑΣ

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα, υπό μορφή διαγραμμάτων, που προέκυψαν από την αριθμητική μελέτη του τρισδιάστατου προβλήματος της ροής γύρω από το βάθρο. Αρχικά δίνονται τα αποτελέσματα από την επίλυση της ροής σε κανάλι χωρίς κανένα εμπόδιο, τα οποία αποτελούν ένα είδος επαλήθευσης της αριθμητικής μεθόδου, η οποία χρησιμοποιήθηκε στη συνέχεια για την επίλυση της ροής στον ανοικτό αγωγό με την παρουσία του βάθρου.

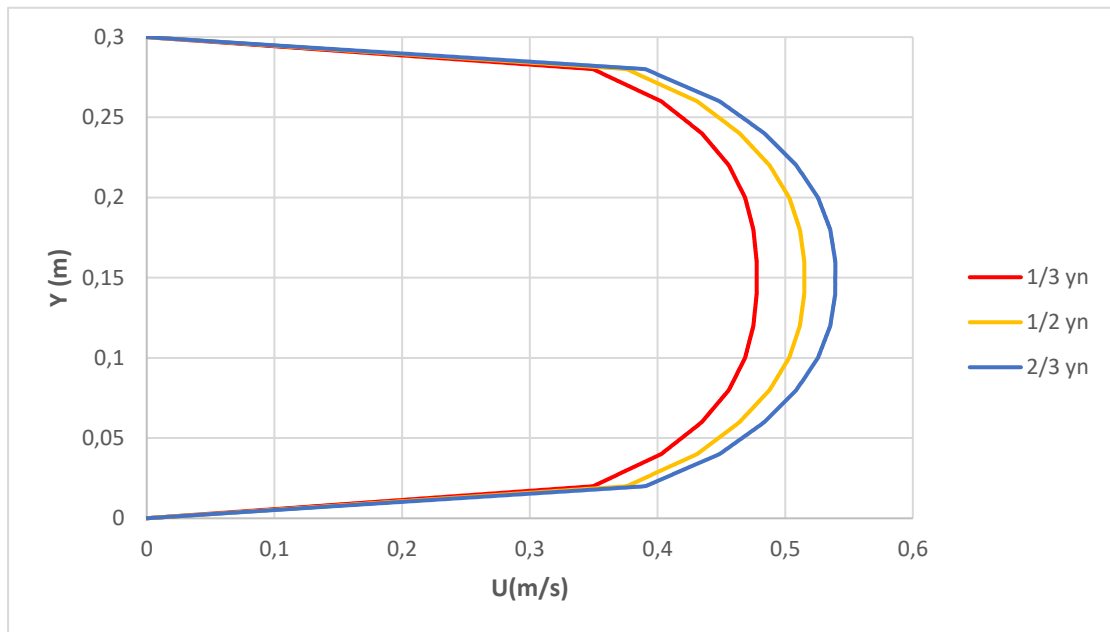
Στην Εικ. 6.1 παρουσιάζεται η διαμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας στο κανάλι χωρίς τα εμπόδια που προέκυψε από την αριθμητική μελέτη της ροής.



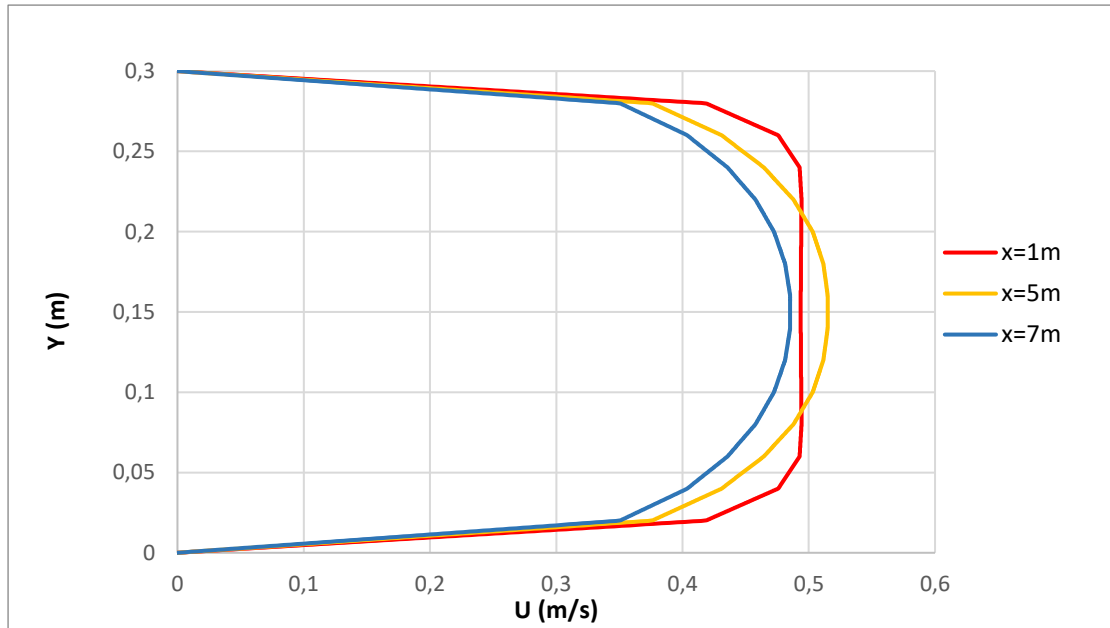
Εικόνα 6.1– Διαμόρφωση της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας σε όλες τις θέσεις κατά την εγκάρσια διεύθυνση.

Παρατηρείται μια πτωτική τάση της ελεύθερης επιφάνειας κατά το μήκος του καναλιού. Στην πραγματικότητα η διαμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας θα πρέπει να είναι παράλληλη με τον πυθμένα του αγωγού για την περίπτωση ομοιόμορφης ροής. Υπενθυμίζεται ότι στην παρούσα εργασία ο πυθμένας θεωρείται οριζόντιος και η κλίση υπεισέρχεται στους υπολογισμούς μέσω του διανύσματος της επιτάχυνσης της βαρύτητας, g_x , g_z , δηλαδή το διάνυσμα της επιτάχυνσης της βαρύτητας είναι κεκλιμένο.

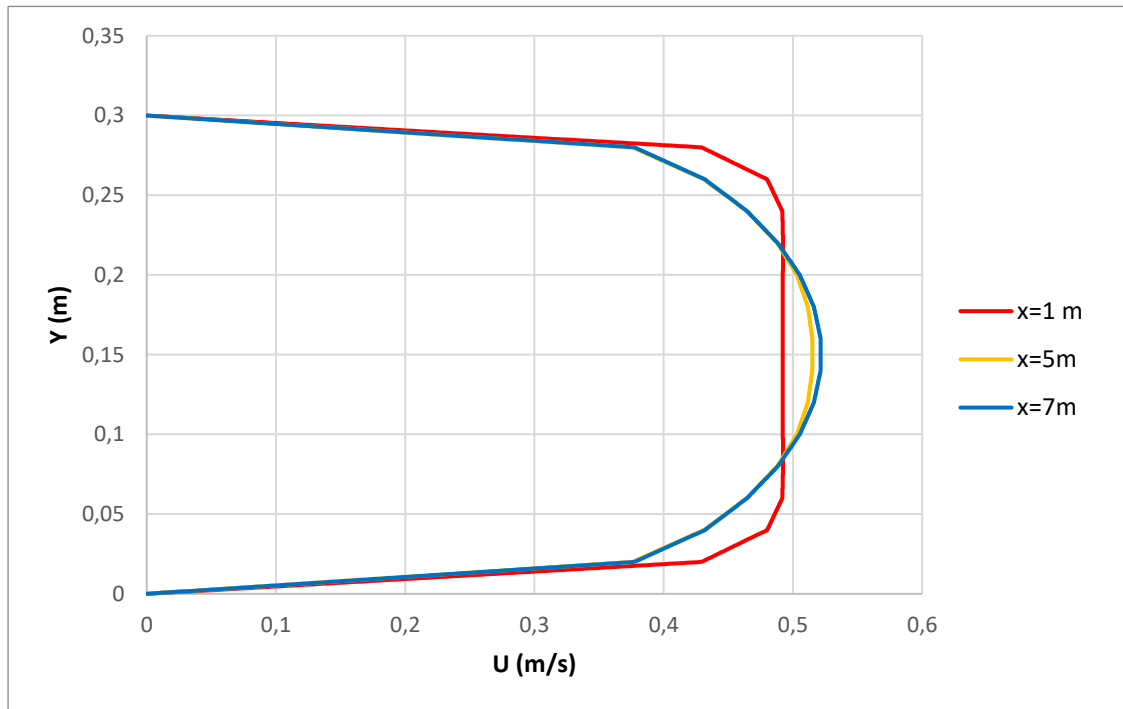
Στην Εικ.6.2 δίνονται τα προφίλ της διαμήκουσ ταχύτητας κατά την εγκάρσια διεύθυνση σε τρία διαφορετικά βάθη ροής και συγκεκριμένα στη θέση $x = 5 \text{ m}$ κατά μήκος του καναλιού (1/3 του βάθους ροής, 1/2 του βάθους ροής και 2/3 του βάθους ροής), ενώ στην Εικ.6.3 δίνονται τα προφίλ της διαμήκουσ ταχύτητας κατά την εγκάρσια έννοια σε τρεις θέσεις στον αγωγό, στα 1, 5 και 7 m από την αρχή του πεδίου επίλυσης.



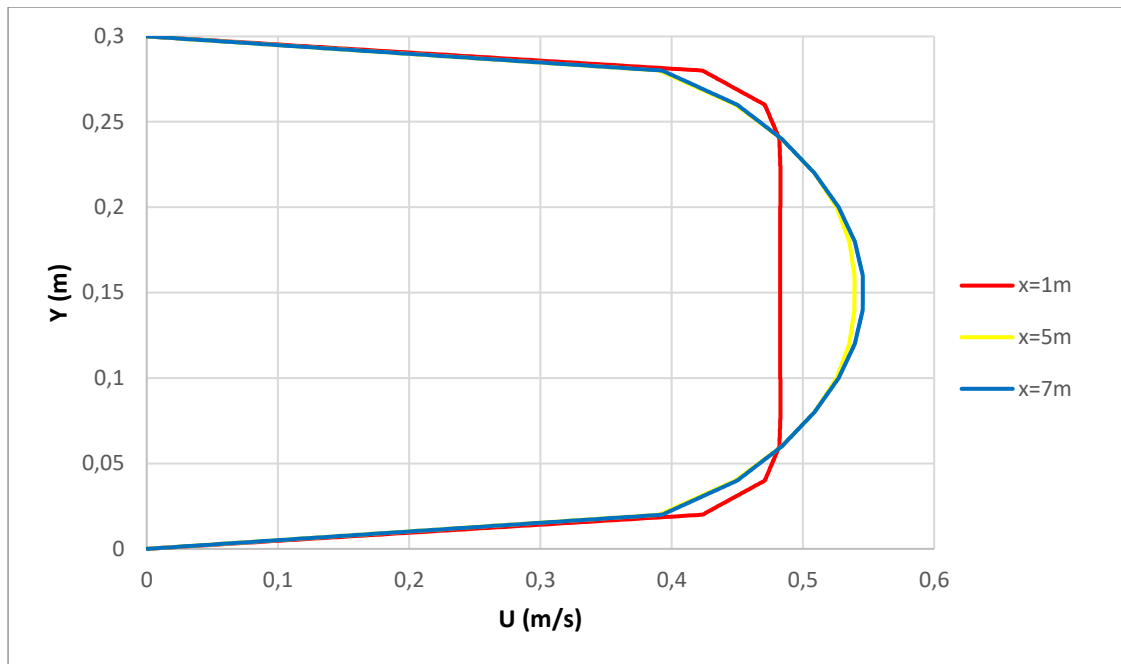
Εικόνα 6.2– Τα προφίλ της διαμήκουσ ταχύτητας κατά την εγκάρσια έννοια σε τρεις θέσεις κατά την κατακόρυφο (1/3, 1/2 και 2/3 του βάθους ροής) στη θέση $x=5 \text{ m}$.



Εικόνα 6.3– Κατανομή της διαμήκουσ ταχύτητας κατά την εγκάρσια έννοια σε βάθος ροής $y=0.033\text{ m}$ ($1/3 y_n$)



Εικόνα 6.4– Κατανομή της διαμήκουσ ταχύτητας κατά την εγκάρσια έννοια σε βάθος ροής $y=0.05\text{ m}$ ($1/2 y_n$)



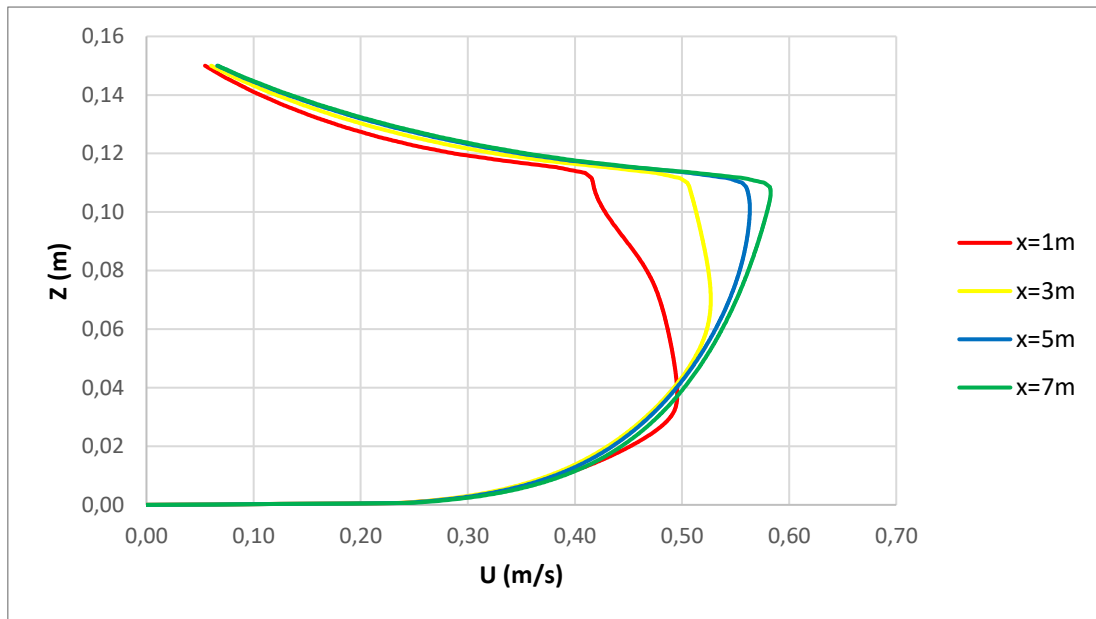
Εικόνα 6.5– Κατανομή της διαμήκουσ ταχύτητας κατά την εγκάρσια έννοια σε βάθος ροής $y=0.066\text{ m}$ ($2/3 y_n$)

Στις Εικ.6.3 - 6.5 φαίνεται ότι στην θέση $x = 1\text{ m}$ το προφίλ της ταχύτητας δεν έχει προλάβει να αναπτυχθεί πλήρως σε αντίθεση με τις θέσεις $x = 5\text{ m}$ και $x = 7\text{ m}$ όπου πλέον το προφίλ της διαμήκουσ ταχύτητας είναι πλήρως ανεπτυγμένο.

Εξετάστηκαν αρκετές θέσεις στον αγωγό και βρέθηκε ότι το προφίλ της ταχύτητας γίνεται πλήρως ανεπτυγμένο μετά την θέση $x = 5\text{ m}$. Επομένως, το μήκος εισόδου για πλήρη ανάπτυξη της ροής στο κανάλι προκύπτει ίσο με 5 m (το οποίο επαληθεύεται και από την μονοδιάστατη ανάλυση).

Επιπλέον παρατηρείται ότι η κατανομή της ταχύτητας ακολουθεί μια παραβολική κατανομή. Πλησίον των τοιχωμάτων μηδενίζεται λόγω της συνθήκης μη ολίσθησης και στο μέσον του πλάτους αποκτά τη μέγιστη τιμή της.

Στην συνέχεια, στην Εικόνα 6.6 φαίνεται το προφίλ της διαμήκουσ ταχύτητας ως προς το βάθος σε επιλεγμένες θέσεις. Επαληθεύεται ότι η ροή έχει αναπτυχθεί πλήρως στη θέση $x=5\text{m}$ (και $x=7\text{m}$) ενώ αντίθετα στις θέσεις $x=1\text{ m}$ και $x=3\text{m}$ παρατηρείται ότι το πάχος του οριακού στρώματος δεν έχει γίνει ίσο με το βάθος ροής.

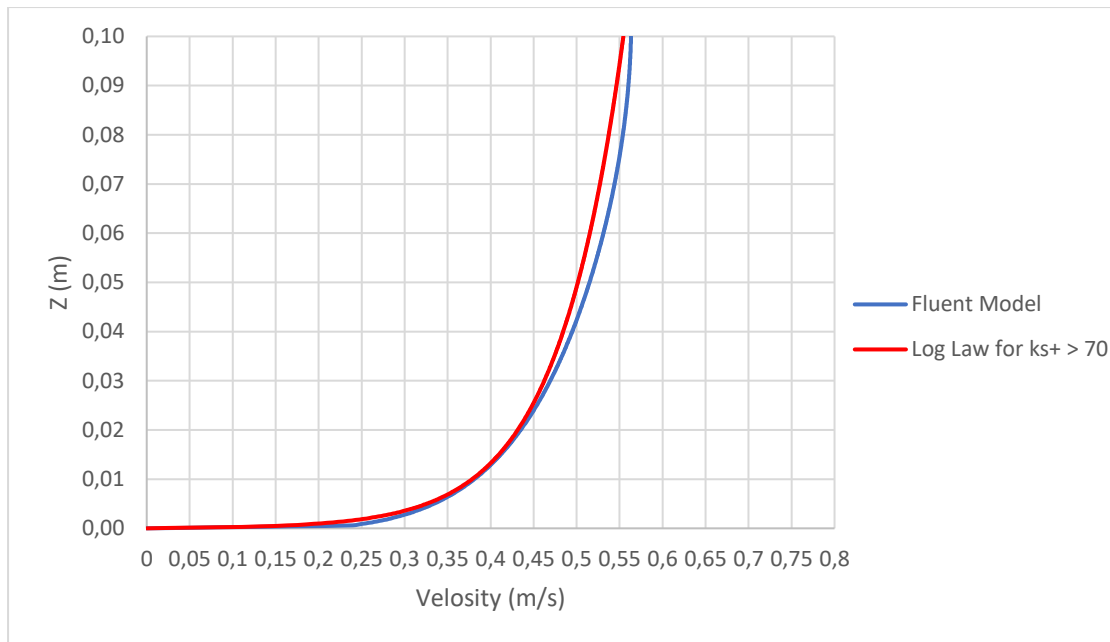


Εικόνα 6.6– Κατανομή της διαμήκουσ ταχύτητας ως προς το βάθος ροής (κανονικό βάθος ροής $y_n=0.1$ cm) στις θέσεις $x=1m$, $x=3m$, $x=5m$ και $x=7m$.

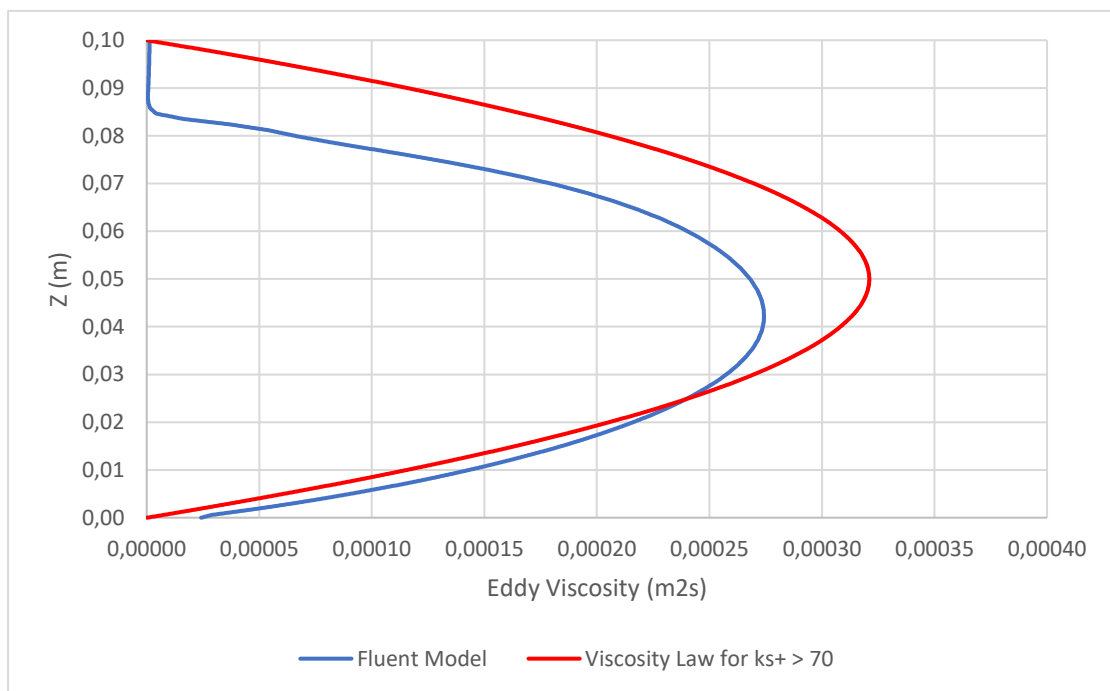
Στην Εικόνα 6.7 δίνεται το προφίλ της διαμήκουσ ταχύτητας ως προς το βάθος συγκρινόμενο με το λογαριθμικό νόμο. Φαίνεται ότι το προφίλ της ταχύτητας που προέκυψε από την αριθμητική προσομοίωση βρίσκεται σε πολύ καλή συμφωνία με το λογαριθμικό νόμο, με απόκλιση της τάξεως 2.5%.

Τέλος, στη Εικ.6.8 δίνεται το διάγραμμα του τυρβώδους ιξώδους (turbulent viscosity) σε συνάρτηση με το βάθος ροής (z) με χρήση του μοντέλου $k-\epsilon$ για το κλείσιμο της τύρβης. Επιπλέον συγκρίνεται με το νόμο του ιξώδες για $ks^+ > 70$.

Το τυρβώδες ιξώδες φαίνεται να ακολουθεί κατανομή παραβολικής μορφής. Ειδικότερα, από τον πυθμένα μέχρι το μέσον του βάθους ροής, όπου αποκτά και την μέγιστη τιμή του, οι τιμές που προκύπτουν από την αριθμητική προσομοίωση βρίσκονται σε καλή συμφωνία με την αναλυτική λύση. Λιγότερο καλή είναι η συμφωνία που παρατηρείται από το μέσο του βάθους ροής και μέχρι την ελεύθερη επιφάνεια.



Εικόνα 6.7– Κατανομή της διαμήκουσ ταχύτητας ως προς το βάθος ροής και σύγκριση με τον λογαριθμικό νόμο



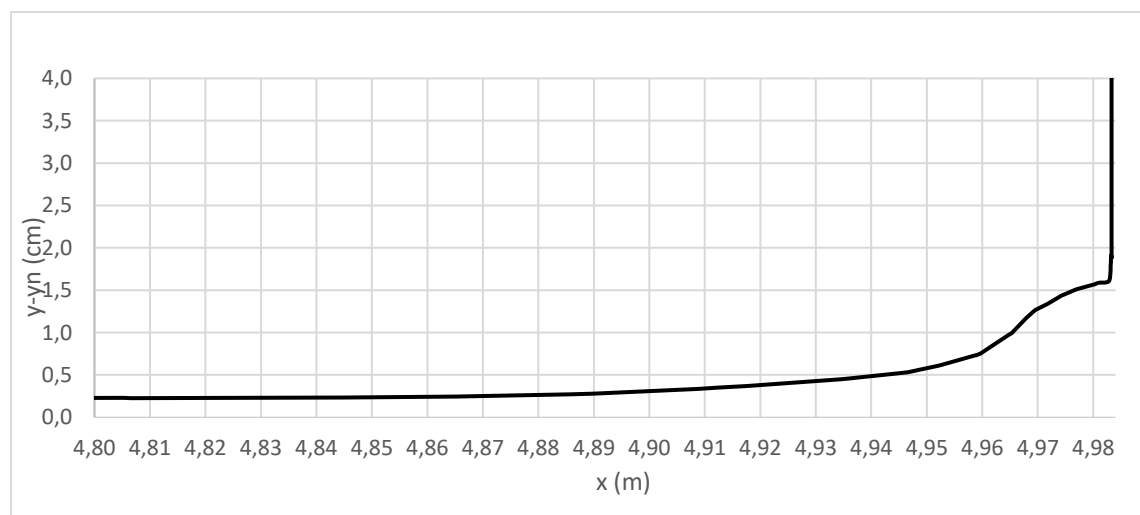
Εικόνα 6.8– Κατανομή τυρβώδους ιξώδους με χρήση του μοντέλου k-ε και σύγκριση με το νόμο του ιξώδες για $ks+ > 70$.

6.2 ΚΑΝΑΛΙ ΜΕ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΒΑΘΡΟ

Εν συνεχεία ακολουθούν τα διαγράμματα που προέκυψαν από τα αποτελέσματα των αριθμητικών προσομοιώσεων του καναλιού με την παρουσία ενός βάθρου με τη χρήση του μοντέλου τύρβης $k-\epsilon$. Η τυρβώδης ροή σε ανοικτό αγωγό υπό την παρουσία ενός βάθρου χαρακτηρίζεται από αποκόλληση και ανακυκλοφορία της ροής κατάντη του βάθρου έντονες διατμητικές τάσεις που αναπτύσσονται στην άμεση γειτονία του βάθρου στην περιοχή του πυθμένα, καθώς και μεταβολή της ελεύθερης επιφάνειας (Backwater Effect) ανάντη.

Η ροή εισέρχεται στον αγωγό πλάτους 0.30 m και μετά από λίγο συναντά το εμπόδιο. Καθώς το πλάτος του αγωγού μικραίνει, η ταχύτητα αυξάνει και προκαλείται υπερύψωση της ελεύθερης επιφάνειας.

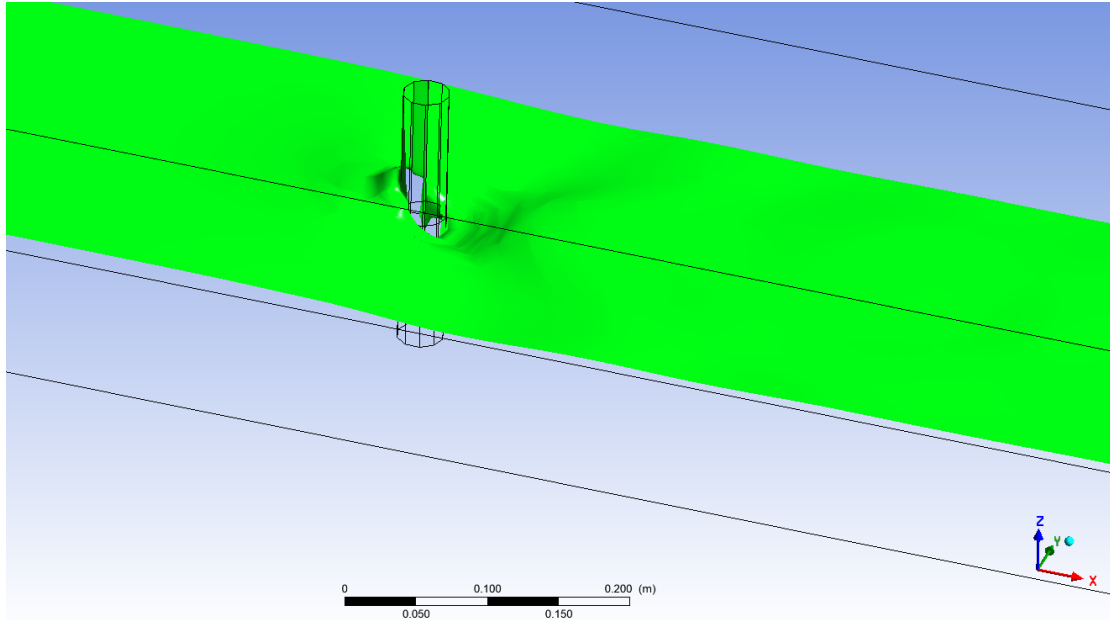
Αρχικά, παρατίθενται η διαμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας της ροής σε ολόκληρο τον αγωγό (Εικ.6.9) μετά από την τοποθέτηση του βάθρου κυκλικής διατομής διαμέτρου $d = 3.342$ cm σε απόσταση $x=5$ m από την αρχή του καναλιού (όπου η ροή θεωρείται πλήρως ανεπτυγμένη) και στην Εικ.6.10 φαίνεται η ανύψωση που προκαλείται λόγω αυτού.



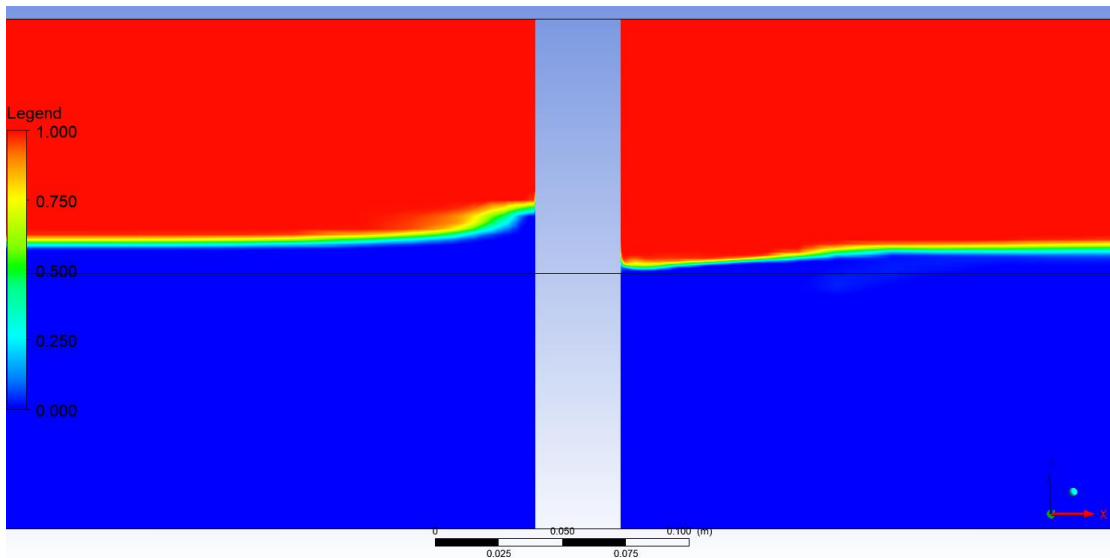
Εικόνα 6.9– Διαμόρφωση της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας λόγω της παρουσίας του κυλινδρικού βάθρου με χρήση του μοντέλου $k-\epsilon$

Στην Εικόνα 6.10 παρουσιάζεται η τρισδιάστατη δομή της διαμόρφωσης της ελεύθερης επιφάνειας ανάντη του βάθρου. Ανάντη του βάθρου παρατηρείται μια αύξηση της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας, εν συνεχεία μια πτώση στην άμεση γειτονία του

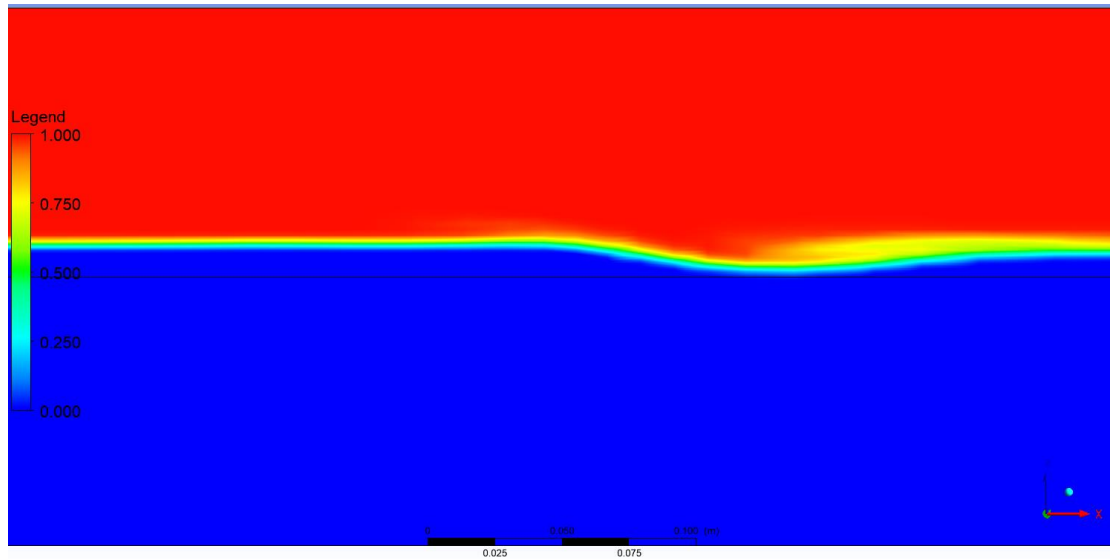
βάθρου και τέλος η ροή αποκτά το κανονικό βάθος ροής. Η δομή αυτή παρουσιάζεται με μεγαλύτερη ευκρίνεια στις Εικ. 6.11, 6.12 και 6.13, οι οποίες προκύπτουν από τα αποτελέσματα των αριθμητικών προσομοιώσεων και έχουν ληφθεί ως κατά το μήκος τομές στις θέσεις $y = 0.15\text{m}$ (άξονας του καναλιού), $y = 0.075\text{m}$ και $y = 0.0375\text{m}$ (από το πλευρικό τοίχωμα του αγωγού).



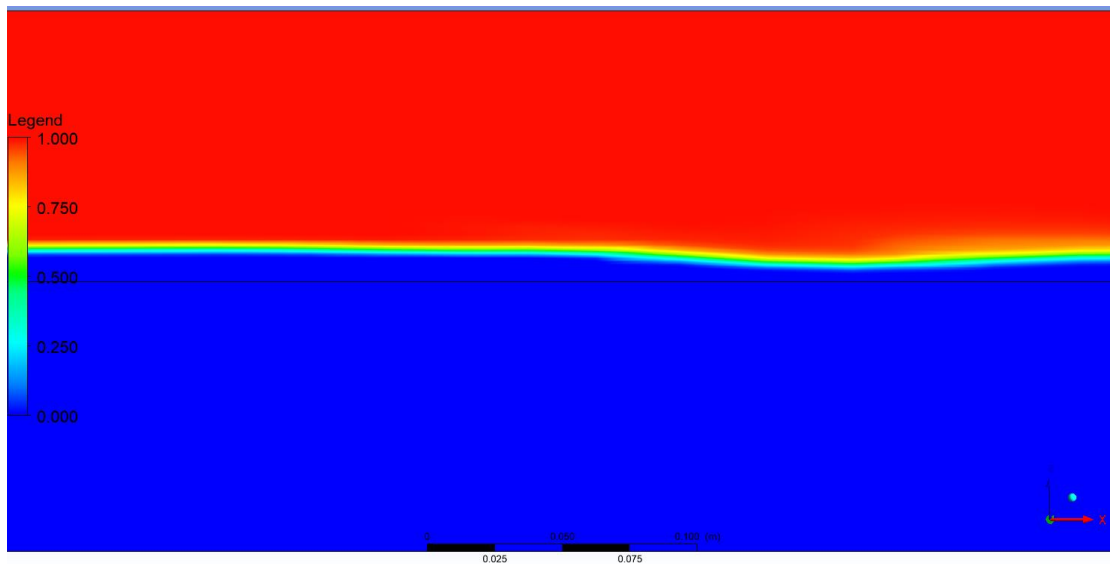
Εικόνα 6.10–Αξονομετρική όψη – Διαμόρφωση ελεύθερης επιφάνειας



Εικόνα 6.11–Τομή στον άξονα του καναλιού ($y=0.15\text{m}$) – Διαμόρφωση ελεύθερης επιφάνειας

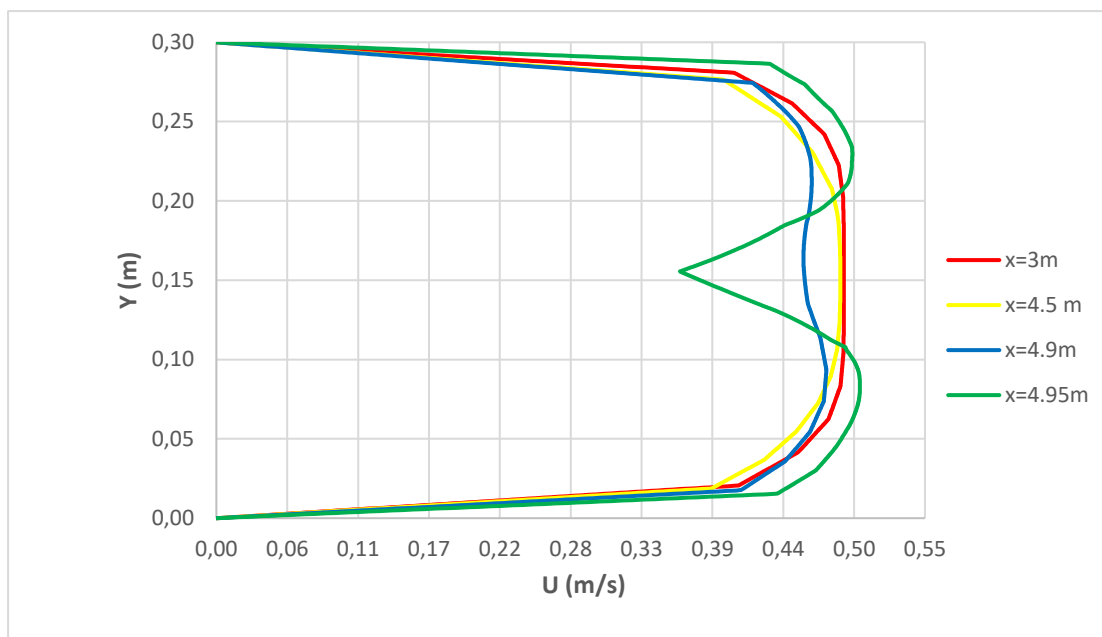


Εικόνα 6.12–Τομή στον άξονα του καναλιού ($y=0.075m$) – Διαμόρφωση ελεύθερης επιφάνειας



Εικόνα 6.13–Τομή στον άξονα του καναλιού ($y=0.0375m$) – Διαμόρφωση ελεύθερης επιφάνειας

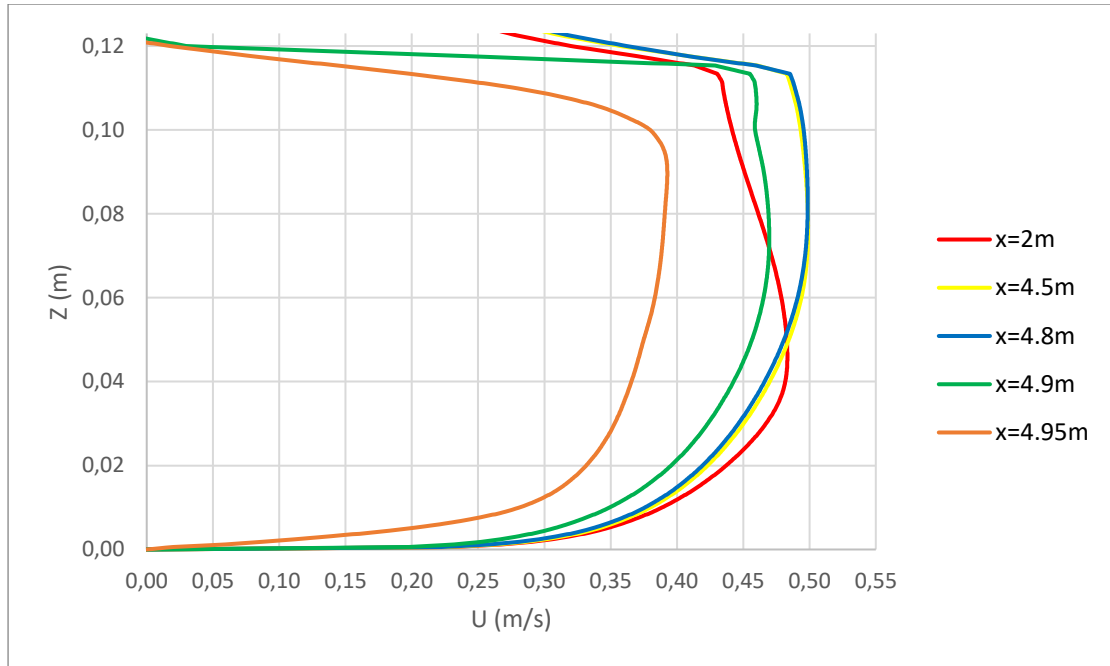
Στην Εικ.6.14 δίνονται τα προφίλ της διαμήκουσ ταχύτητας κατά την εγκάρσια διεύθυνση σε τρεις θέσεις στον αγωγό, στα 5 m , 4.5 m, 4.9 m από την αρχή του πεδίου επίλυσης παρουσία βάρου στη θέση $x=5m$.



Εικόνα 6.14– Κατανομή της διαμήκουσ ταχύτητας κατά την εγκάρσια έννοια σε βάθος ροής $y=0.05\text{ m}(1/2 y_n)$ παρουσία βάρου ($x=5m$)

Όπως φαίνεται από την παραπάνω εικόνα, ήδη από τα 3 m η ροή “αισθάνεται” το βάθρο και η ταχύτητα μειώνεται και πολύ κοντά στο βάθρο ($x=4.95\text{ m}$) η ταχύτητα αυξάνεται λόγω της στένωσης της διατομής του καναλιού.

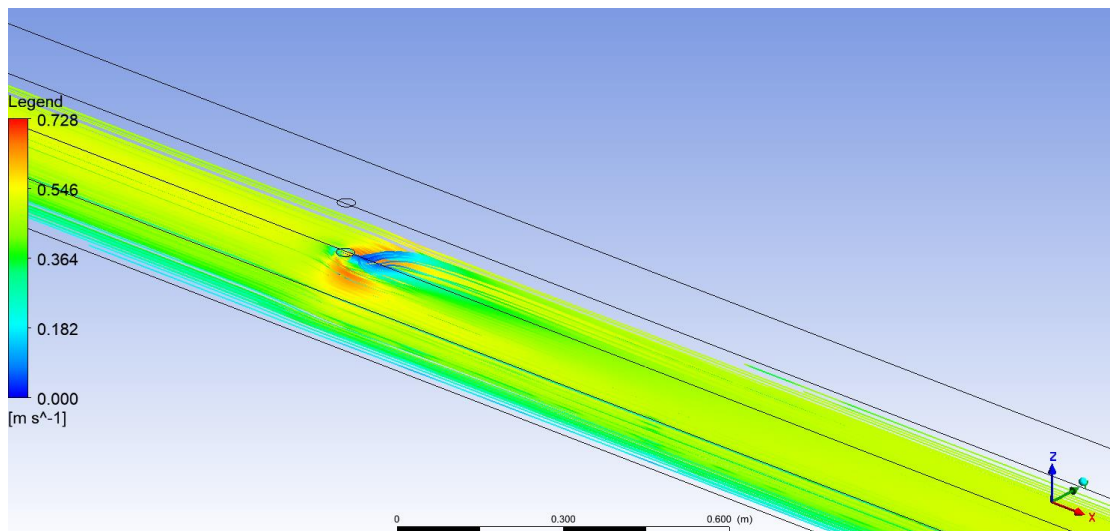
Στη συνέχεια παρουσιάζεται η κατανομή της διαμήκουσ ταχύτητας ως προς το βάθος σε διάφορες θέσεις κατά μήκος του καναλιού (Εικ.6.15).



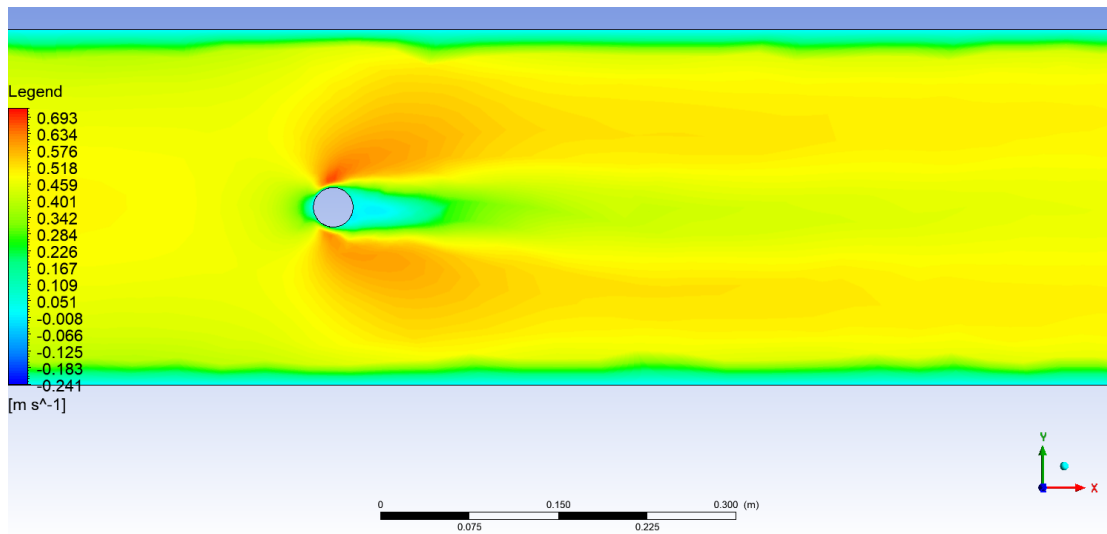
Εικόνα 6.15– Κατανομή της διαμήκουσ ταχύτητας ως προς το βάθος σε διάφορες θέσεις του καναλιού

Παρατηρείται ότι η ροή αρχίζει και επηρεάζεται λόγω του βάθρου στη θέση $x = 4.9 \text{ m}$ ενώ στη θέση $x = 4.95 \text{ m}$ η ταχύτητα έχει μειωθεί σημαντικά.

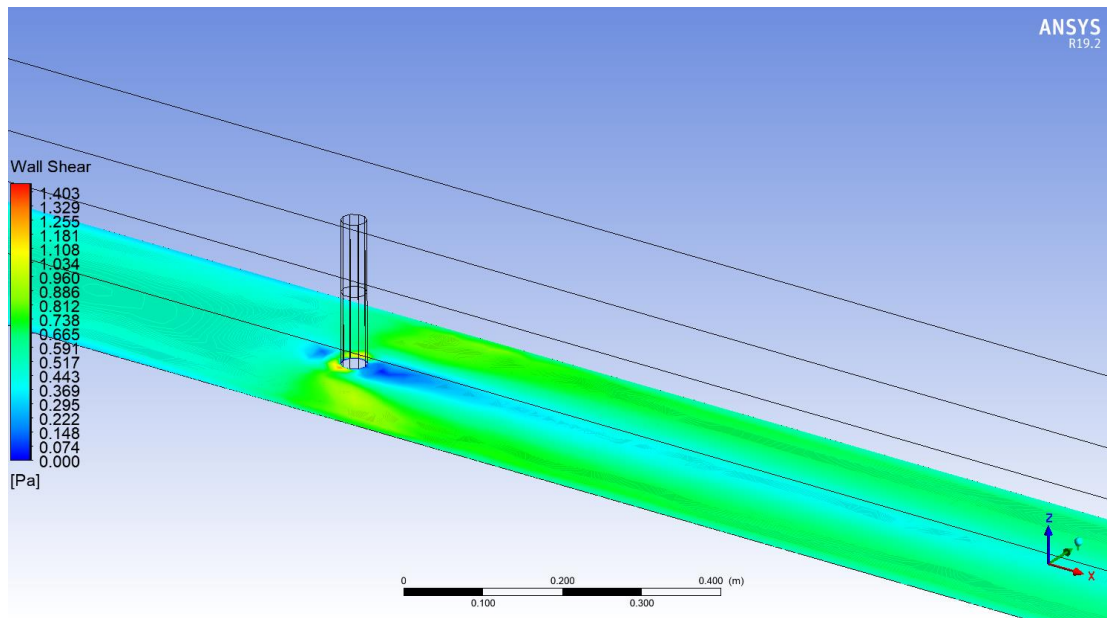
Παρακάτω (Εικ.6.16 και Εικ.6.17) παρουσιάζεται το πεδίο ταχυτήτων σε όλο το μήκος του αγωγού για το μοντέλο τύρβης $k-\epsilon$, όπου διακρίνεται η μέγιστη ταχύτητα στο σημείο του βάθρου όπου έχουμε στένωση της διατομής (με ποσοστό εμπλοκής 11.14%). Ενώ στην Εικόνα 6.18 και 6.19 φαίνεται η κατανομή της διατμητικής τάσης στον πυθμένα.



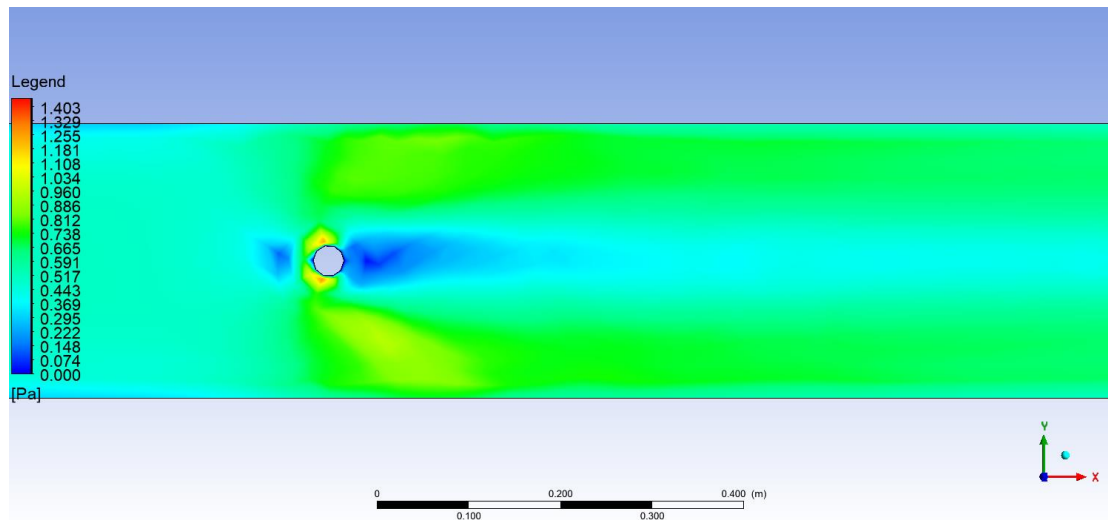
Εικόνα 6.16– Πεδίο ταχυτήτων – αξονομετρική όψη



Εικόνα 6.17– Κάτοψη -Πεδίο ταχυτήτων



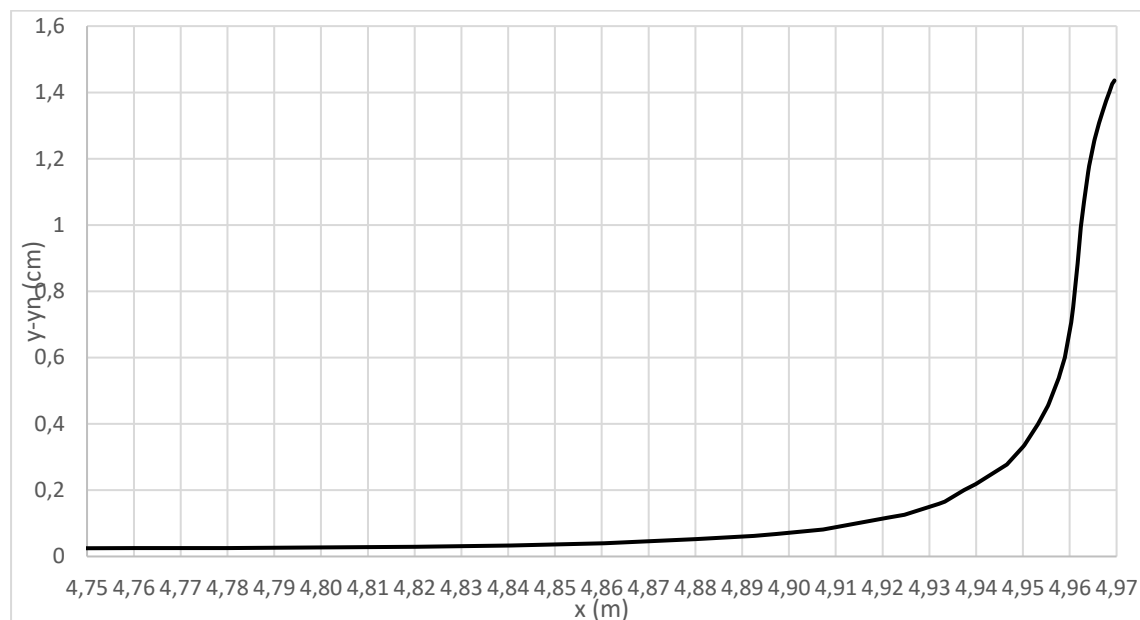
Εικόνα 6.18– Κατανομή διατμητικής τάσης στο πυθμένα



Εικόνα 6.19– Κατανομή διατμητικής τάσης στο πυθμένα

6.3 ΚΑΝΑΛΙ ΜΕ ΒΑΘΡΟ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ ΜΕ ΗΜΙΚΥΚΛΙΚΟ ΡΥΓΧΟΣ ΚΑΙ ΟΥΡΑ

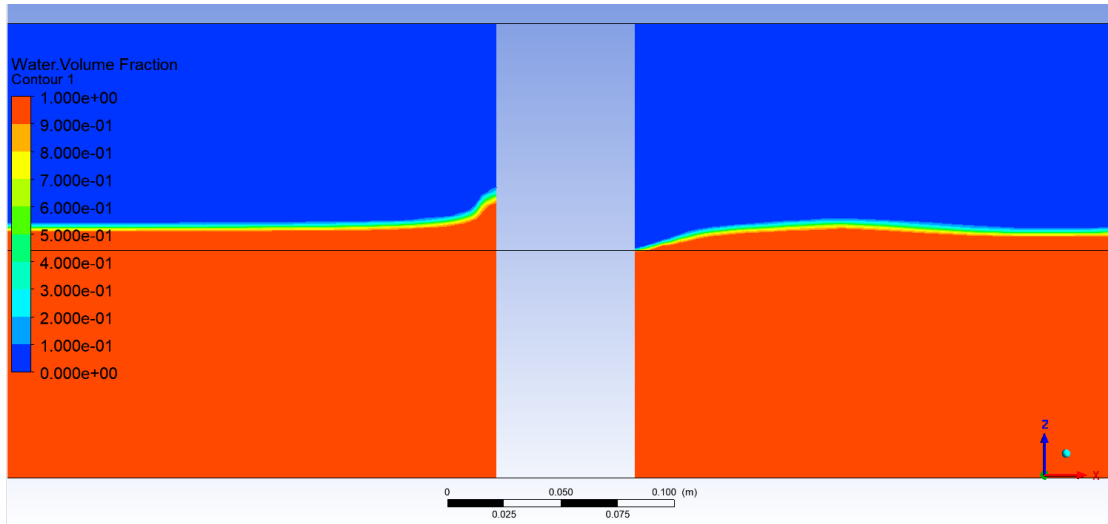
Στις παρακάτω εικόνες παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για ορθογωνική διατομή με ημικυκλικό ρύγχος και ουρά. Η ελεύθερη επιφάνεια (Εικ. 6.20) παρουσιάζεται ελαφρώς αυξημένη.



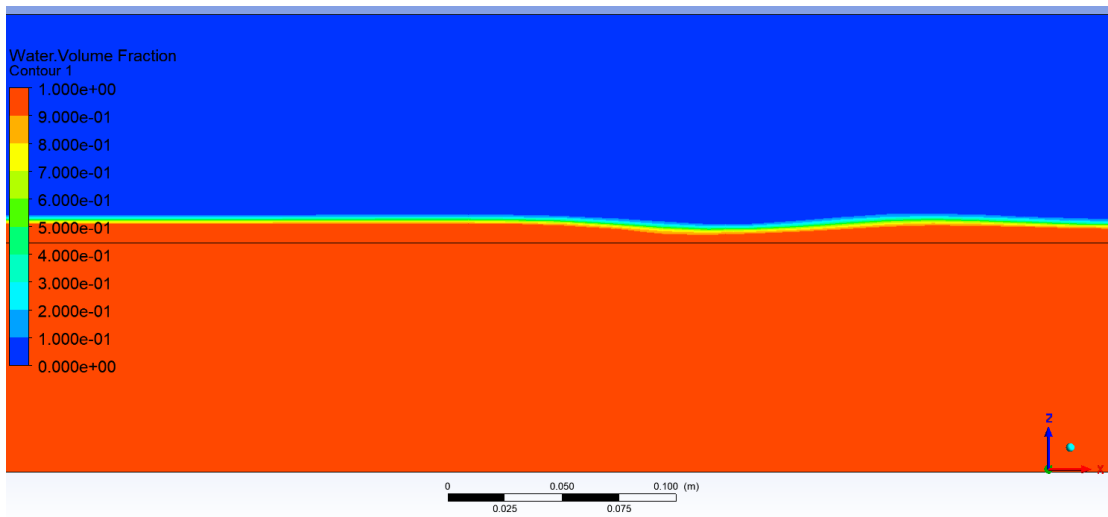
Εικόνα 6.20 – Διαμόρφωση της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας λόγω της παρουσίας του κυλινδρικού βάθρου με χρήση του μοντέλου k-ε

Στην Εικόνα 6.20 παρουσιάζεται η τρισδιάστατη δομή της διαμόρφωσης της ελεύθερης επιφάνειας ανάντη του βάθρου. Ανάντη του βάθρου παρατηρείται μια αύξηση της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας, εν συνεχεία μια πτώση στην άμεση γειτονία του βάθρου και τέλος η ροή αποκτά το κανονικό βάθος ροής. Η διαμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας παρουσιάζεται με μεγαλύτερη ευκρίνεια στις Εικ. 6.21, 6.22 και 6.23, οι οποίες προκύπτουν από τα αποτελέσματα των αριθμητικών προσομοιώσεων και έχουν ληφθεί ως κατά το μήκος τομές στις θέσεις $y = 0.15\text{m}$ (άξονας του καναλιού), $y = 0.075\text{m}$ και $y = 0.0375\text{m}$ (από το πλευρικό τοίχωμα του αγωγού).

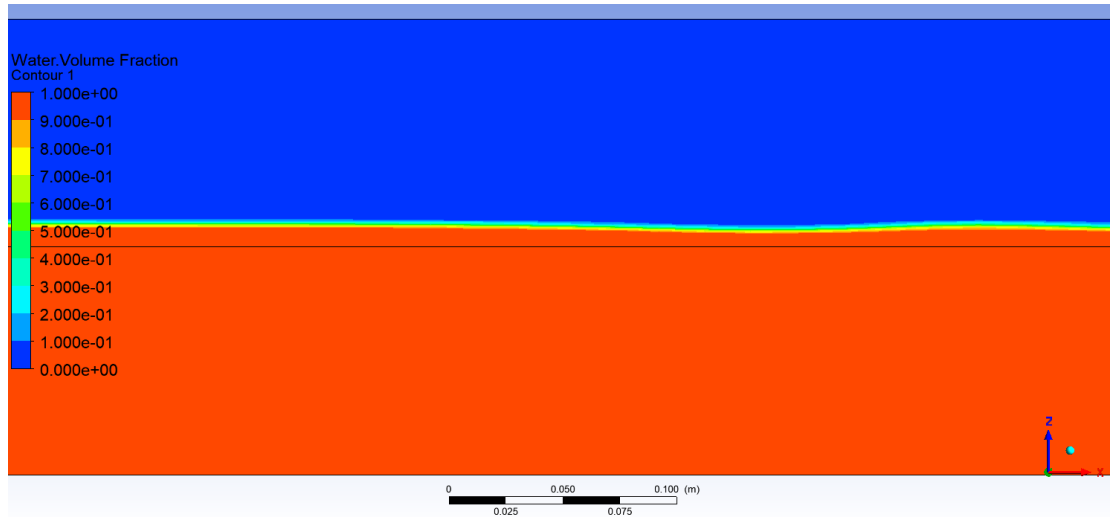
Σημειώνεται ότι το ποσοστό εμπλοκής στη περίπτωση της ορθογωνικής διατομής με ημικυκλικό ρύγχος και ουρά είναι ίσο με 5.07%.



Εικόνα 6.21 – Τομή στον άξονα του καναλιού ($y=0.15\text{m}$) – Διαμόρφωση ελεύθερης επιφάνειας

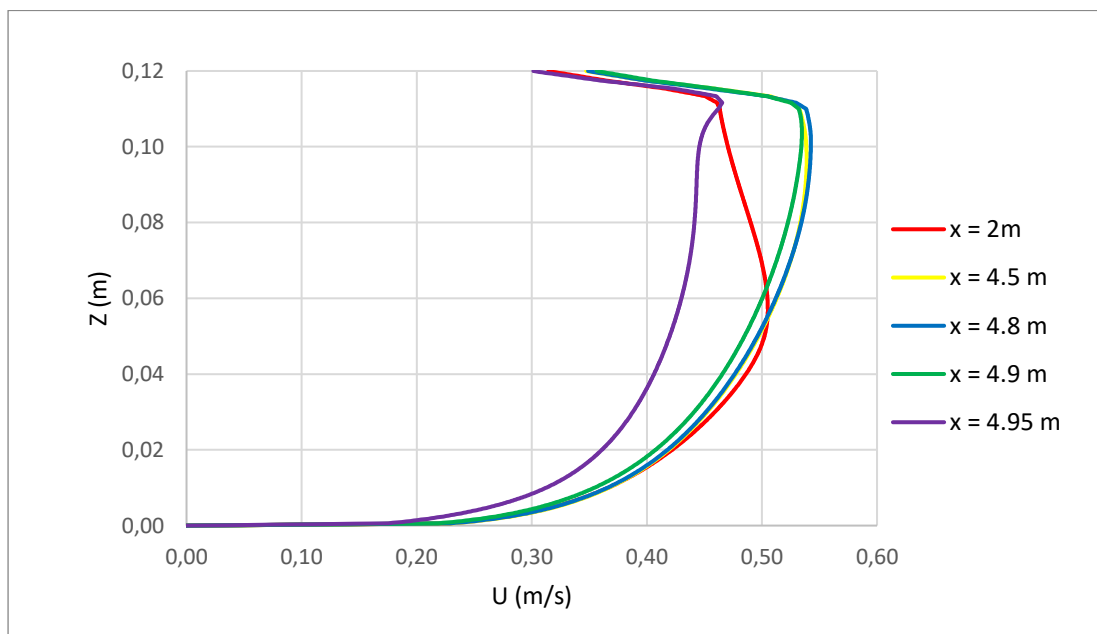


Εικόνα 6.22- Τομή στον άξονα του καναλιού ($y=0.075\text{m}$) – Διαμόρφωση ελεύθερης επιφάνειας



Εικόνα 6.23- Τομή στον άξονα του καναλιού ($y=0.0375m$) – Διαμόρφωση ελεύθερης επιφάνειας

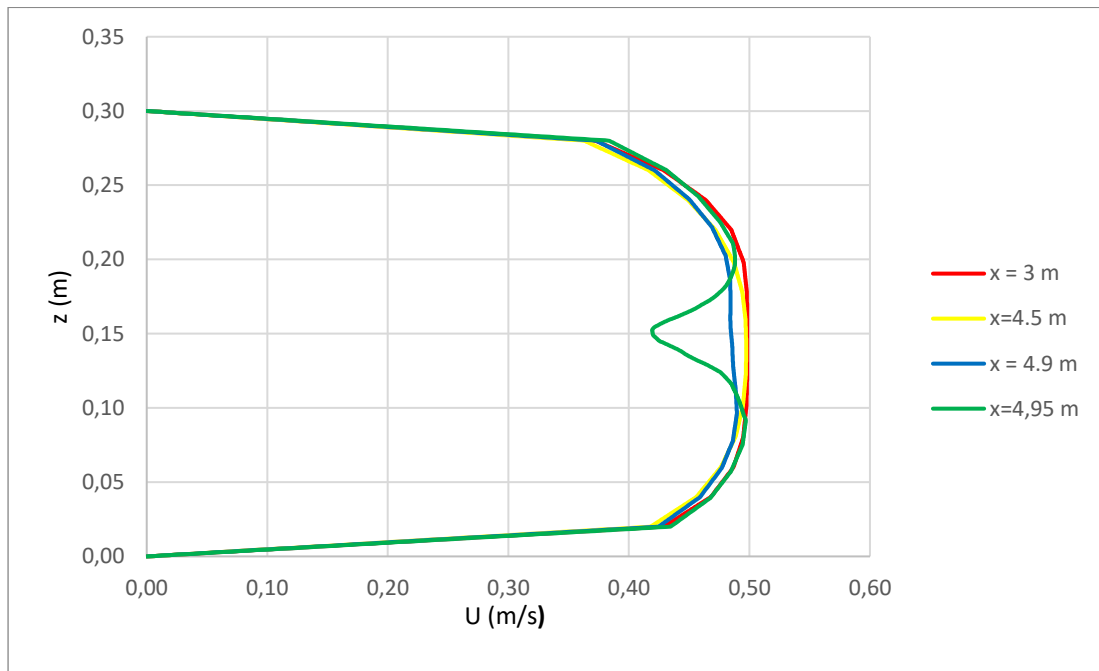
Στη συνέχεια παρουσιάζεται η κατανομή της διαμήκουσ ταχύτητας ως προς το βάθος σε διάφορες θέσεις κατά μήκος του καναλιού (Εικ.6.24). Παρατηρείται ότι η ροή αρχίζει και επηρεάζεται λόγω του βάθρου στη θέση $x = 4.9 m$ ενώ στη θέση $x = 4.95 m$ η ταχύτητα έχει μειωθεί σημαντικά.



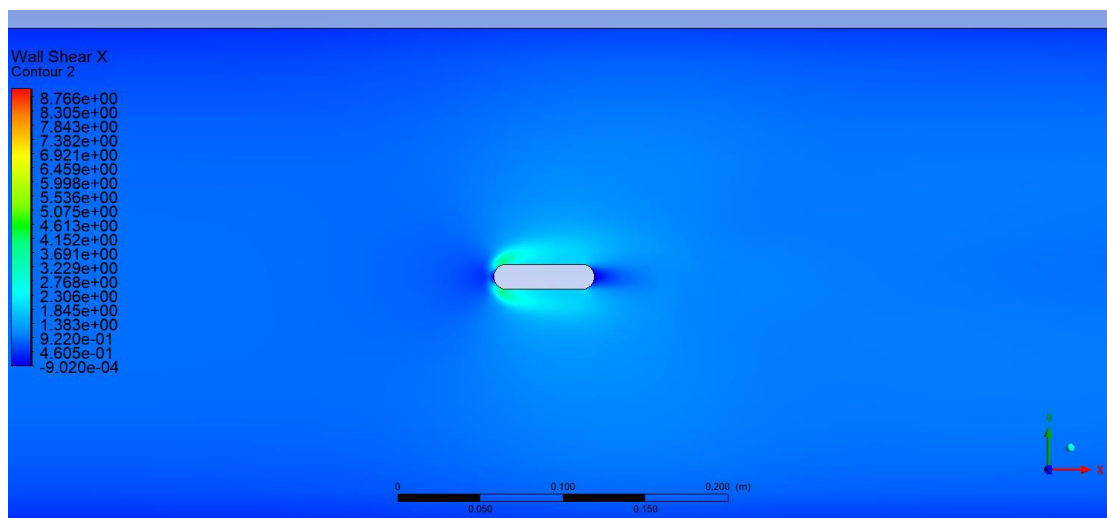
Εικόνα 6.24 Κατανομή της διαμήκουσ ταχύτητας ως προς το βάθος σε διάφορες θέσεις του καναλιού

Στην Εικ.6.25 δίνονται τα προφίλ της διαμήκουσ ταχύτητας κατά την εγκάρσια διεύθυνση σε τρεις θέσεις στον αγωγό, στα 3 m , 4.5 m, 4.9 m και 4.95 m από την αρχή του πεδίου επίλυσης παρουσία βάρθρου στη θέση $x=5m$.

Παρατηρείται από την παραπάνω εικόνα, από τα 4,9 m η ροή “αισθάνεται” το βάρθρο και η ταχύτητα μειώνεται και πολύ κοντά στο βάρθρο ($x=4.95 m$) η ταχύτητα αυξάνεται λόγω της στένωσης της διατομής του καναλιού. Ενώ στην Εικόνα 6.18 και 6.19 φαίνεται η κατανομή της διατμητικής τάσης στον πυθμένα.



Εικόνα 6.25- Κατανομή της διαμήκουσ ταχύτητας κατά την εγκάρσια έννοια σε βάθος ροής $y=0.05 m(1/2 y_n)$



Εικόνα 6.26- – Κατανομή διατμητικής τάσης στο πυθμένα

6.4 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Στην παρούσα εργασία μελετήθηκε το τρισδιάστατο πεδίο ροής που διαμορφώνεται σε ανοικτό αγωγό παρουσία βάθρου γέφυρας. Εξετάστηκε αγωγός με κλίση πυθμένα 1:1000, κανονικού βάθους ροής $y_n = 0.10 \text{ m}$, πλάτους $b = 0.30 \text{ m}$ και μήκους $l = 8.0 \text{ m}$. Όσον αφορά τη γεωμετρία του βάθρου, μελετήθηκαν δύο περιπτώσεις. Μια περίπτωση κυκλικής διατομής με διάμετρο $d = 3.342 \text{ cm}$ και μια περίπτωση ορθογωνικής διατομής με ημικυκλικό ρύγχος και ουρά, πλάτους $b = 1.522 \text{ cm}$ και συνολικού μήκους $l = 6,088 \text{ cm}$.

Στην αρχή μελετήθηκε το πεδίο ροής στον ανοικτό αγωγό χωρίς την παρουσία του βάθρου και τα αποτελέσματα που προέκυψαν συγκρίθηκαν με τις αναλυτικές εκφράσεις για την κατανομή της διαμήκου ταχύτητας και του τυρβώδους ιξώδους. Η σύγκριση των αριθμητικών αποτελεσμάτων με το λογαριθμικό νόμο της ταχύτητας βρέθηκε να είναι πολύ καλή με ένα σφάλμα της τάξεως 2,5 %.

Αναφορικά με την κατανομή του τυρβώδους ιξώδους, φαίνεται να ακολουθεί παραβολική κατανομή. Ειδικότερα, από τον πυθμένα μέχρι το μέσον του βάθους ροής οι τιμές που προκύπτουν από την αριθμητική προσομοίωση βρίσκονται σε καλή συμφωνία με την αναλυτική λύση. Λιγότερο καλή είναι η συμφωνία που παρατηρείται από το μέσο του βάθους ροής και μέχρι την ελεύθερη επιφάνεια.

Η μελέτη της διαμόρφωσης της ελεύθερης επιφάνειας δείχνει ότι προκαλείται μικρή ανύψωση λόγω της παρουσίας του βάθρου. Μεταξύ των δύο βάθρων παρατηρείται ότι η ροή “αισθάνεται” την παρουσία του βάθρου και μειώνεται η ταχύτητα πιο γρήγορα στη περίπτωση της κυκλικής διατομής, για την οποία προκύπτει και το μεγαλύτερο ποσοστό εμπλοκής. Επιπλέον, η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας ανάντη του βάθρου προκύπτει μικρότερη για την περίπτωση της ορθογωνικής διατομής με ημικυκλικό ρύγχος και ουρά, με μικρότερες διατμητικές τάσεις στο πυθμένα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ

[1] Βάσσης Ε. (2015). “Τρισδιάστατη αριθμητική προσομοίωση υπερκρίσιμης ροής σε ανοιχτό αγωγό με πλευρικά στοιχεία τραχύτητας”, Διατριβή Διπλώματος Ειδίκευσης, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πατρών, Πάτρα.

[2] Δημητρακόπουλος Α.Κ. (2005). “Ειδικά Θέματα Υδραυλικής Μηχανικής (Τυρβώδης Ροές)”, Πανεπιστήμιο Πατρών.

[3] Κουτρουβέλη Θ.Ι. (2012). "Τρισδιάστατη Αριθμητική Προσομοίωση Τυρβώδους Ροής σε Ανοιχτό Αγωγό με Εγκάρσιους Προβόλους", Διατριβή Διπλώματος Ειδίκευσης, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πατρών, Πάτρα.

[4] Κωνσταντινίδης Δ. (2012). “Γεφυροποιία” , Αλεξάνδρειο Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Θεσσαλονίκης

[5] Φουρνιώτης Θ. Νικόλαος (2005). "Αριθμητική Προσομοίωση Τυρβώδους Ροής σε Ανοιχτούς Αγωγούς με Συστοιχία Θινών στον Πυθμένα", Διατριβή Διπλώματος Ειδίκευσης, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πατρών, Πάτρα.

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ

[6] ANSYS Fluent User's Guide 14.5, Fluent, Inc.

[7] Bernard, P.S. & Wallace, J.M. (2002). “Turbulent Flow: Analysis Measurement and Prediction”, J.Wiley & Sons, Inc.

[8] Bradshaw, P. (2003). “Turbulent Flow: Analysis, Measurement and Prediction, Journal of Fluid Mechanics, 478, 344-345.

- [9] Chadwick, A. and Morfett, J. (1993). *Hydraulics in Civil and Environmental Engineering*, 2nd edn, E& FN Spon, London.
- [10] Chow, V.T. (1959). *Open Channel Hydraulics*. McGraw-Hill, New York.
- [11] C.G.Speziale, R.Abid and E.C.Anderson (1990). “A critical evaluation of two-equation turbulence models for near-wall turbulence”, AIAA Paper 90-1481.
- [12] Demuren, A.O, & Rodi, W. (1983). “Three-Dimensional Calculation of Film Cooling by a Row of Jets”, Notes in Numerical Fluid Mechanics, Proceedings of the Fifth GAAM Conference on Numerical Methods in Fluid Mechanics, Vol.7, pp.49-56.
- [13] Ferziger, J.H. & Peric, M. (2002). “Computational Methods for Fluid Dynamics”, Springer, 3rd Edition.
- [14] Fischer- Antze, T., Stoesser, T., Bates, P., & Olsen, N.R.B. (2001). “3D numerical modeling of open-channel flow with submerged vegetation”, *Journal of Hydraulic Research*, Vol.39 (3), pp. 303-310.
- [15] Fischer H.B. et al., (1979). “Mixing in Inland and Coastal Waters”, Academic Press.
- [16] Fourniotis et al (2019). “ Pier Shape Effect on Backwater Rise and Drag Force in Open-Channel Flow”, *International Review of Civil Engineering (I.RE.C.E.)*, Vol. 10, N. 3, ISSN 2036 – 9913.
- [17] Hamill L. (1999), *Bridge Hydraulics*.
- [18] Hamill, L. and McInally, G.A. (1990) “The hydraulic performance of two arch bridges during flood”, *Municipal Engineer*, 7, October, 241–256.

[19] Hamill, L. (1997) “Improved flow through bridge waterways by entrance rounding”, Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Municipal Engineer, 121, March, 7–21.

[20] Hirt, C.W. and Nichols, B.D. (1981), “Volume of fluid method (VOF) for the dynamics of free boundaries”, Journal of Computational Physics, 39: 201-222.

[21] Hickin, E.J. (1995), River Geomorphology.

[22] Hüseyin Burak EKMEKÇİ (2015). “Modification of a computational fluid dynamics model (ansys-fluent) for the purpose of river flow and sediment transport modeling”, MSc in in Civil Engineering, Graduate School of Engineering and Sciences of İzmir Institute of Technology.

[23] Kolmogorov, AN. (1942). “Equations of motion of an incompressible turbulent fluid”, Izv Akad Nauk SSSR Ser Phys VI No 1-2, p56.

[24] Katsigialou A. (2017). “Computational Investigation of Two Phase Flow in Artery Bifurcation”, MSc in Mechanical and Aeronautics Engineer, University of Patras.

[25] Launder, B.E. & Spalding, D.B. (1972). “Lectures in Mathematical Modeling of Turbulence”, Academic Press.

[26] Menter R. (1992). “Improved two-equation $k-\omega$ turbulence model for aerodynamic flows”, NASA TM-103975.

[27] Menter F.R. (2009). “Review of the shear-stress transport turbulence model experience from an industrial perspective”, Int. J. Comput. Fluid Dyn., 23 pp. 305-316.

[28] Menter F.R. (1994). “Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications”, AIAA J., 32, pp. 1598-1605.

- [29] Nezu, I. and Nakagawa, H. (1993). "Turbulence in open-channel flows", IAHR Monograph, Rotterdam, Balkema.
- [30] Osman A. (2006), Open Channel Hydraulics.
- [31] Pope, S.B. (2000). "Turbulent Flows", Cambridge University Press.
- [32] Rodi, W. (1980). "Turbulence Models and their Application in Hydraulics", IAHR Monograph, 3rd Edition, A.A. Balkema
- [33] Rameshwaran, P. & Nadeu, P.S. (2004). "Three-dimensional variation of a free surface variation in a meandering channel", Journal of Hydraulic Research, IAHR, Vol.42, No. 6, p. 603-615.
- [34] Rodi, W.,(1993). "Turbulence Models and their Application in Hydraulics", IAHR Monograph, 3rd Edition, A.A.Balkema.
- [35] Spalart, P.R. and Almaras, S.R. (1992,1995). "A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows", AIAA Paper 92-0439.
- [36] C. R. Suribabu, R.M. Sabarish, R. Narasimhan, A.R. Chandhru (2011). "Backwater Rise and Drag Characteristics of Bridge Piers under Sub-critical Flow Conditions", European Water, Vol. 36:27-35.
- [37] G. Seckin, S. Atabay (2005). "Experimental backwater analysis around bridge waterways", Can J Civ Eng, 32: 1015-1029.
- [38] Versteeg , H.K. and Malalasekera, W. (1995). "An introduction to computational fluid dynamics: The finite volume method", Edinburg, Longman.
- [39] Wilcox D.C. (1988). "Reassessment of the scale determining equation for advanced turbulence models", AIAA J., Vol.26, No.11, p1299.
- [40] Wilcox D.C. (1993). "Turbulence modelling for CFD" DCW Industries, La Canada, California, USA.

[41] Wilcox D. (2006). “Turbulence Modelling for CFD” (third ed.), DCW Industries, Inc.

[42] Yarnell D.L. (1934). “Bridge Piers as Channel Obstructions”, Technical Bulletin No. 442, U.S. Department of Agriculture, Washington, DC, USA