ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΔΥΤ. ΕΛΛΑΔΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ & ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ

Π Τ Υ Χ Ι Α Κ Η Ε Ρ Γ Α Σ Ι Α

«ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ-ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX»

ΜΗΛΙΩΝΗΣ ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ
ΠΑΠΑΓΕΩΡΓΟΠΟΥΛΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

ΕΠΟΠΤΕΥΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
Κος ΜΕΓΑΡΙΤΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ, ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟΣ ΥΠΟΤΡΟΦΟΣ

Μ Ε Σ Ο Λ Ο Γ Γ Ι 2 0 1 7

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΔΥΤ. ΕΛΛΑΔΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ & ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ

Π Τ Υ Χ Ι Α Κ Η Ε Ρ Γ Α Σ Ι Α

«ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ-ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX»

ΜΗΛΙΩΝΗΣ ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ
mh_liwnhs@hotmail.com
ΠΑΠΑΓΕΩΡΓΟΠΟΥΛΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ
papageo1992@gmail.com

ΕΠΟΠΤΕΥΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
Κος ΜΕΓΑΡΙΤΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ, ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟΣ ΥΠΟΤΡΟΦΟΣ

Μ Ε Σ Ο Λ Ο Γ Γ Ι 2 0 1 7

Οι διαπιστώσεις, τα αποτελέσματα, τα συμπεράσματα και οι πιθανές προτάσεις της παρούσας Πτυχιακής Εργασίας, εκτός των αναφορών που σημαίνονται ως λήμματα, αποτελούν προσωπικές θεωρητικές ή εμπειρικές διαπιστώσεις του φοιτητή/φοιτήτριας ή της ομάδας των φοιτητών που την επιμελήθηκαν και δεν απηχούν κατ' ανάγκη τη γνώμη του εισηγητή εκπαιδευτικού, ή του Εκπαιδευτικού Προσωπικού του Τμήματος Λογιστικής & Χρηματοοικονομικής ή του Α.Τ.Ε.Ι. Δυτικής Ελλάδας

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το σημαντικότερο πρότυπο στο χώρο της Διοικητικής Επιστήμης είναι ο Γραμμικός Προγραμματισμός, όπως και ίσως μία από τις σπουδαιότερες επιστημονικές ανακαλύψεις στην οικονομική επιστήμη. Πρόκειται για τον πιο εφαρμοσμένο κλάδο των Μαθηματικών με πληθώρα εφαρμογών στην επιστήμη των ηλεκτρονικών υπολογιστών.

Πιο ειδικά πρόκειται για μία μαθηματική μέθοδο που χρησιμοποιούν οι επιχειρήσεις για τη λύση προβλημάτων. Μέσω των προβλημάτων επιχειρείται να βρεθεί η άριστη χρήση των περιορισμένων πόρων μίας επιχείρησης με στόχο τη μεγιστοποίηση του κέρδους ή την ελαχιστοποίηση του κόστους μέσα στα όρια ορισμένων περιορισμών και δυνατοτήτων της επιχείρησης. Ο Γραμμικός Προγραμματισμός ασχολείται με την επίλυση του γραμμικού προβλήματος.

Για να επιτευχθεί αυτό μελετώνται οι ιδιότητες του γραμμικού προβλήματος, κατασκευάζονται μέθοδοι επίλυσης (αλγόριθμοι) και εξετάζονται τρόποι εφαρμογής των αποτελεσμάτων στη λήψη πολύπλοκων αποφάσεων σε διοικητικό ή οικονομικό επίπεδο με επιστημονικό τρόπο. Για παράδειγμα όταν πρόκειται να ληφθεί απόφαση οικονομικού προγραμματισμού, σχετικά με την ανάπτυξη οικονομικών δραστηριοτήτων, οι οποίες «συναγωνίζονται» μεταξύ τους για τους ίδιους πόρους.

Η κατανομή του κρατικού προϋπολογισμού μεταξύ διαφόρων προγραμμάτων, υπουργείων κλπ, η κατανομή των πρώτων υλών, του εργατικού δυναμικού και των μηχανών μίας επιχείρησης για την παραγωγή των προϊόντων της ή την εξυπηρέτηση των πελατών της, η κατανομή ενός κεφαλαίου μεταξύ ανταγωνιζομένων επενδυτικών ευκαιριών είναι μερικά αντιπροσωπευτικά παραδείγματα.

Στην παραγωγική διαδικασία ο Γραμμικός Προγραμματισμός βρίσκει πολλές εφαρμογές, καθώς αναζητούνται οι ποσότητες των παραγόμενων προϊόντων σε σχέση με τα αποθέματα, τις πρώτες ύλες, το προσωπικό και άλλους παράγοντες ώστε να μεγιστοποιηθεί το κέρδος. Μια επιχείρηση ή ένας οργανισμός έχει πολλά επιμέρους γραμμικά προβλήματα που πρέπει να αντιμετωπίσει. Τα κλασικά προβλήματα του γραμμικού προγραμματισμού είναι το πρόβλημα κατανομής πόρων, της μείξης προϊόντων, ενέργειας και προστασίας του περιβάλλοντος, της παραγωγικής διαδικασίας, της διοίκησης προσωπικού, marketing (προώθησης προϊόντων).

Μια γραμμική συνάρτηση η οποία καλείται αντικειμενική συνάρτηση και αποτελεί το αντικείμενο της μεγιστοποίησης του κέρδους ή ελαχιστοποίησης του κόστους, υπάρχει σε κάθε πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού.

Για την αντιμετώπιση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού ακολουθούνται δύο στάδια:

1. Κατασκευάζεται το μαθηματικό μοντέλο του Γραμμικού Προγραμματισμού για το συγκεκριμένο πρόβλημα.
2. Λύνεται το πρόβλημα με μία από τις μεθόδους που είναι ειδικές για την επίλυση του προβλήματος.

Η παρούσα πτυχιακή εργασία υλοποιήθηκε στα πλαίσια του προπτυχιακού προγράμματος του τμήματος Λογιστικής Χρηματοοικονομικής της Σχόλης Διοίκησης & Οικονομίας του Τεχνολογικού Εκπαιδευτικού Ιδρύματος Δυτικής Ελλάδας, από τους φοιτητές Μηλιώνη Ευάγγελο και Παπαγεωργόπουλο Ιωάννη, υπό την επίβλεψη του

καθηγητή Κου Μεγαρίτη Αθανασίου, τον οποίο και ευχαριστούμε θερμά για την καθοδήγηση και υποστήριξη σε όλη την επίπονη διαδικασία.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το θέμα της παρούσης πτυχιακής εργασίας είναι η «Επίλυση Γραμμικών Προβλημάτων Βελτιστοποίησης-Μέθοδος Simplex»

Αρχικά στην εισαγωγή παρουσιάζονται έννοιες αλλά και σημεία που θα αναπτυχθούν στην κυρίως εργασία.

Στο 1ο κεφάλαιο: «Εισαγωγικές Έννοιες Μαθηματικών», δίνονται βασικά στοιχεία για τους πίνακες, ορισμοί (διαστάσεις πίνακα, συμβολισμός πίνακα), βασικές πράξεις πινάκων (πίνακας πρόσθεσης, βαθμωτός πολλαπλασιασμός και μεταφορά, πολλαπλασιασμός πινάκων, υποπίνακας), γραμμικές εξισώσεις, οι γραμμικοί μετασχηματισμοί, εφαρμογές (θεωρία γραφήματος, ανάλυση και γεωμετρία, θεωρία πιθανοτήτων και στατιστική, συμμετρίες και μετασχηματισμοί στη φυσική, γραμμικοί συνδυασμοί των κβαντικών καταστάσεων, κανονικοί τρόποι, γεωμετρική οπτική, ηλεκτρονικά), και τέλος η βιβλιογραφική επισκόπηση.

Στο 2ο κεφάλαιο: «Εργαλεία Πραγματικής Ανάλυσης» καταγράφονται οι συναρτήσεις Μιας Μεταβλητής (συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής, Γραμμικές και δευτεροβάθμιες συναρτήσεις, Δευτεροβάθμιες συναρτήσεις), η παραγώγιση συναρτήσεως Μιας Μεταβλητής (γεωμετρική έννοια της παραγώγου, Όριο συνάρτησης, Σύνθετες συναρτήσεις και παραγώγιση - Αλυσωτός κανόνας, Μέθοδος πεπλεγμένης παραγώγισης, Αντίστροφες συναρτήσεις και παραγώγιση, Ελαστικότητα), οι Συνεχείς και Παραγωγίσιμες συναρτήσεις (Θεώρημα του Bolzano, Αύξουσα ή Φθίνουσα συνάρτηση), η Βελτιστοποίηση συνάρτησης Μιας Μεταβλητής (Ακρότατα σε ένα κλειστό διάστημα τιμών [a,b]), η Ολοκλήρωση συναρτήσεως (Αόριστο ολοκλήρωμα, Παραγοντική ολοκλήρωση, Ο σταθερός όρος στο αόριστο ολοκλήρωμα, Το ορισμένο ολοκλήρωμα), και τέλος οι προϋποθέσεις εφαρμογής του Γραμμικού Προγραμματισμού (Γραμμικότητα, Διαιρετότητα, Βεβαιότητα)

Το θέμα του 3ου κεφαλαίου είναι η: «Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα και στο Γραμμικό Προγραμματισμό», παρουσιάζονται ιστορικά στοιχεία, οι ορισμοί Γραμμικού Προγραμματισμού, η Λήψη Βέλτιστων Αποφάσεων (βελτιστοποίηση κριτηρίου, διατύπωση μαθηματικού μοντέλου βελτιστοποίησης), οι προσδιοριστικές μέθοδοι επιχειρησιακής ερευνάς, και τέλος ο γραμμικός προγραμματισμός (γενικά στοιχεία, μεθοδολογία γραμμικού προγραμματισμού, προϋποθέσεις εφαρμογής του γραμμικού προγραμματισμού).

Στο 4ο κεφάλαιο: «Γραφική Επίλυση Προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού», αναλύεται η γραφική επίλυση μοντέλων γραμμικού προγραμματισμού, τα μοντέλα γραμμικού προγραμματισμού με κενό και μη φραγμένο εφικτό σύνολο, και τέλος εφαρμογές/παραδείγματα (εύρεση σχεδίου παραγωγής, εύρεση σχεδίου οικονομίας καυσίμου).

Στο 5ο κεφάλαιο: «Η Μέθοδος Simplex», παρουσιάζεται η επίλυση ενός προβλήματος, το μαθηματικό πρότυπο, οι αρχές μεθόδου Simplex, και τέλος η επίλυση παραδείγματος με τη μέθοδο Simplex (γενικά στοιχεία, θεωρία των παιγνίων, θεωρία της αναμονής, θεωρία πιθανοτήτων, επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού).

Στο 6ο κεφάλαιο η: «Επίλυση Προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού - Εφαρμογές», δίνονται λυμένες ασκήσεις –προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού με τη μέθοδος Simplex.

Στο τελευταίο κεφάλαιο τα Συμπεράσματα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της πτυχιακής εργασίας «Επίλυση Γραμμικών Προβλημάτων Βελτιστοποίησης-Μέθοδος Simplex».

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ – ΕΙΚΟΝΩΝ-ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΠΙΝΑΚΕΣ

ΕΙΚΟΝΕΣ

ΣΧΗΜΑΤΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Με το Γραμμικό Προγραμματισμό, ως επέκταση της γραμμικής άλγεβρας, βρίσκονται βέλτιστες λύσεις σε προβλήματα τα οποία μπορούν να εκφραστούν με τη χρήση γραμμικών εξισώσεων και ανισοτήτων, δηλαδή το αντικείμενο της Επιχειρησιακής Έρευνας.

Η συγκεκριμένη μέθοδος προσδιορίζει τη βέλτιστη λύση στο πρόβλημα, εάν υποτεθεί πως στον πραγματικό κόσμο κάθε πρόβλημα μπορεί να αντιπροσωπευτεί με ακρίβεια από τις μαθηματικές εξισώσεις ενός γραμμικού συστήματος. Φυσικά, μέσω ενός συνόλου γραμμικών συναρτήσεων, ορισμένα σύνθετα προβλήματα του πραγματικού κόσμου ενδέχεται να αναπαρίστανται με σχετικά μεγαλύτερη ακρίβεια, ωστόσο η λύση που προκύπτει μπορεί να μην είναι σε καμία περίπτωση η βέλτιστη.

Βέβαια, μέσω του Γραμμικού Προγραμματισμού μπορεί να παρέχονται λογικές και ρεαλιστικές αναπαραστάσεις πολλών προβλημάτων του πραγματικού κόσμου με κριτήριο μια σειρά υποθέσεων που υιοθετούνται κατά την διαδικασία εξειδίκευσης του μαθηματικού υποδείγματος του προβλήματος.

Η βέλτιστη κατανομή πόρων και οι βέλτιστες μεταφορές σε επιχειρήσεις αποτελούν παραδείγματα Γραμμικού Προγραμματισμού και Επιχειρησιακής Έρευνας. Η καλύτερη δυνατή λύση σε προβλήματα τέτοιου τύπου ορίζεται ως προς κάποια μετρήσιμα κριτήρια, π.χ. ελάχιστο κόστος, συνδυασμός κέρδους με ρίσκο, κ.τ.λ. Τα δεδομένα του προβλήματος συχνά στις εφαρμογές, είναι ελλιπή και οι «βέλτιστες» αποφάσεις λαμβάνονται υπό συνθήκη αβεβαιότητας.

Σε αυτές τις περιπτώσεις, χρησιμοποιείται η μεθοδολογία των Πιθανοτήτων και της Στατιστικής, με τους αντίστοιχους δείκτες αξιοπιστίας. Για την επίλυση ενός προβλήματος της Επιχειρησιακής Έρευνας η χαρακτηριστική διαδικασία είναι (Κολέτσος & Στογιάννης, 2015):

a) η μαθηματική μοντελοποίηση του προβλήματος,
b) η αξιοποίηση της δομής του μαθηματικού μοντέλου για επινόηση κατάλληλων αλγορίθμων βελτιστοποίησης,
c) η αριθμητική λύση με τη χρήση υπολογιστή.

Ένα ευρύ φάσμα δραστηριοτήτων καλύπτουν τα προβλήματα που τίθενται, με αποτέλεσμα η μοντελοποίηση ή προσομοίωση να αξιοποιεί διαφορετικούς επιστημονικούς κλάδους ή συνδυασμούς αυτών. Ως «εργαλεία» της Επιχειρησιακής Έρευνας χρησιμοποιείται μία μερική εποπτεία αυτών των κλάδων που είναι: Στατιστική, Βελτιστοποίηση, Βέλτιστος Έλεγχος, Θεωρία Παιγνίων, Νευρωνικά Δίκτυα, Ρομποτική, Επιστήμη των Υπολογιστών, Μηχανική όλων των ειδικοτήτων, Management, Έλεγχος Αποθεμάτων (Inventory Control), ακόμα και στοιχεία Ψυχολογίας και Κοινωνιολογίας.

1 ΚΕΦΑΛΑΙΟ: «ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

1.1 ΓΕΝΙΚΑ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΠΙΝΑΚΕΣ

Στην επιστήμη των μαθηματικών, ένας πίνακας είναι μια ορθογώνια[1] διάταξη αριθμών, συμβόλων, ή εκφράσεων, που είναι διατεταγμένα σε σειρές και στήλες. Στοιχεία ή εγγραφές ονομάζονται τα μεμονωμένα στοιχεία σε ένα πίνακα. Ένα παράδειγμα πίνακα 2 γραμμών και 2 στηλών είναι (Πίνακας (Matrix)-Wikipedia, 2017):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{6} & \mathbf{9} \end{bmatrix}.$$

Οι πίνακες που έχουν ίδιες διαστάσεις έχουν τη δυνατότητα να προστεθούν ή αφαιρεθούν στοιχείο προς στοιχείο. Ωστόσο ο ισχύων κανόνας για τον πολλαπλασιασμό πινάκων αναφέρει ότι οι δύο πίνακες γίνεται να πολλαπλασιαστούν μόνο όταν ο αριθμός των στηλών του πρώτου ισούται με τον αριθμό των γραμμών του δευτέρου (Νικολαΐδης, 2003).

Οι γραμμικοί μετασχηματισμοί πρόκειται για μια σημαντική εφαρμογή των πινάκων οι οποίοι παριστάνουν, γενικεύσεις των γραμμικών συναρτήσεων όπως $\mathrm{f(x) = 4x}$. Παραδείγματος χάριν, η περιστροφή διανυσμάτων σε ένα χώρο τριών διαστάσεων είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός ο οποίος μπορεί να αναπαρασταθεί από έναν πίνακα περιστροφής «R». Αν «v» είναι ένα διάνυσμα στήλης (ένας πίνακας με μόνο μία στήλη) το οποίο περιγράφει τη θέση ενός σημείου στο χώρο, τότε το γινόμενο «Rv» είναι μία στήλη διάνυσμα το οποίο περιγράφει τη θέση εκείνου του σημείου μετά από μία περιστροφή. Ο πίνακας που αναπαριστά τη σύνθεση δύο γραμμικών μετασχηματισμών είναι το γινόμενο δύο πινάκων (Χατζηνικολάου, 2003).

Οι πίνακες επίσης εφαρμόζονται στην επίλυση συστήματος γραμμικών εξισώσεων[2]. Αν, για παράδειγμα, ο πίνακας είναι τετραγωνικός, μπορεί να εξαχθούν συμπεράσματα για μερικές από τις ιδιότητές του υπολογίζοντας την ορίζουσά του.

Δηλαδή, ένας τετραγωνικός πίνακας έχει αντίστροφο αν και μόνο αν η ορίζουσά του δεν είναι μηδέν. Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα παρέχουν μια διορατικότητα στη γεωμετρία των γραμμικών μετασχηματισμών.

Σε πολλά επιστημονικά πεδία βρίσκονται εφαρμογές των πινάκων. Λόγου χάριν σε κάθε κλάδο της φυσικής, συμπεριλαμβανομένων της κλασικής μηχανικής, οπτικής, ηλεκτρομαγνητικής, κβαντομηχανικής[3], και κβαντικής ηλεκτροδυναμικής[4], όπου χρησιμοποιούνται για τη μελέτη των φυσικών φαινομένων, δηλαδή την κίνηση των στερεών σωμάτων. Επίσης, σε γραφικά ηλεκτρονικών υπολογιστών, χρησιμοποιούνται για το σχεδιασμό εικόνας τριών διαστάσεων σε οθόνη δύο διαστάσεων.

[1]Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ή απλά ορθογώνιο στην ευκλείδεια γεωμετρία είναι το παραλληλόγραμμο που έχει μία γωνία ορθή. Ειδική περίπτωση ορθογωνίου είναι το τετράγωνο.

[2]Σύστημα γραμμικών εξισώσεων ή ανισώσεων ή αλλιώς γραμμικό σύστημα είναι ένα σύνολο από γραμμικές εξισώσεις ή ανισώσεις με τους ίδιους αγνώστους, τους οποίους προσπαθούμε να προσδιορίσουμε ώστε να επαληθεύουν όλες τις εξισώσεις ή ανισώσεις του συνόλου.

[3]Η κβαντομηχανική περιγράφει τη συμπεριφορά της ύλης στο μοριακό, ατομικό και υποατομικό επίπεδο.

[4]Η κβαντική ηλεκτροδυναμική (QED - Quantum electrodynamics) είναι η σχετικιστική κβαντική θεωρία πεδίου της ηλεκτροδυναμικής. Στην ουσία, περιγράφει πώς το φως και η ύλη αλληλεπιδρούν και είναι η πρώτη θεωρία, όπου επιτυγχάνεται πλήρης συμφωνία μεταξύ κβαντομηχανικής και ειδικής σχετικότητας.

Όπως, επίσης, χρησιμοποιούνται στη θεωρία πιθανοτήτων και στη στατιστική. Οι στοχαστικοί πίνακες χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν σύνολα πιθανοτήτων, για παράδειγμα, χρησιμοποιούνται μέσα στον αλγόριθμο PageRank[5] με τον οποίο ταξινομούνται οι σελίδες στην αναζήτηση του Google. Ο λογιστικός πίνακας γενικεύεται στις κλασικές αναλυτικές έννοιες όπως είναι οι παράγωγοι και τα εκθετικά σε υψηλότερες διαστάσεις (Πίνακας (Matrix)-Wikipedia, 2017).

Τέλος, άλλος ένας σημαντικός κλάδος της αριθμητικής ανάλυσης[6] έχει αφοσιωθεί στην ανάπτυξη αποτελεσματικών αλγορίθμων για τους υπολογισμούς πίνακα. Πρόκειται για ένα θέμα αιώνων και σήμερα είναι αναπτυσσόμενος τομέας της έρευνας. Οι μέθοδοι αποσύνθεσης πίνακα απλοποιούνται από τους υπολογισμούς, τόσο θεωρητικά όσο και πρακτικά. Οι αλγόριθμοι που προσαρμόζονται σε συγκεκριμένες δομές πίνακα, όπως οι αραιοί πίνακες και οι σχεδόν διαγώνιοι πίνακες, διευκολύνουν τους υπολογισμούς στη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων[7] και άλλους υπολογισμούς. Οι άπειροι πίνακες απαντώνται στην πλανητική θεωρία και την ατομική θεωρία.

Ο πίνακας που αντιπροσωπεύει τον παράγωγο φορέα, ο οποίος δρα στη Σειρά Τέιλορ[8] μίας συνάρτησης είναι ένα απλό παράδειγμα ενός άπειρου πίνακα (Παλαιολόγου, 2016).

1.2 ΟΡΙΣΜΟΙ

Μία ορθογώνια διάταξη αριθμών ή άλλων μαθηματικών αντικειμένων, όπου ορίζονται πράξεις όπως η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός ονομάζεται πίνακας.

Πιο συνηθισμένα, ένας πίνακας στο πεδίο F είναι μία ορθογώνια διάταξη βαθμίδων του F. Οι πιο γενικοί τύποι εγγραφών συζητούνται παρακάτω (Πίνακας (Matrix)-Wikipedia, 2017), (Ανδρεαδάκης, et al., 2000).

Για παράδειγμα, αυτός είναι ένας πραγματικός πίνακας:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0,8 \\ 14,5 & 6,2 \\ 8,7 & -5,7 \end{bmatrix}.$$

Εγγραφές ή στοιχεία ονομάζονται οι αριθμοί, τα σύμβολα ή οι εκφράσεις στον πίνακα. Γραμμές και στήλες, ονομάζονται οι οριζόντιες και κάθετες γραμμές αντίστοιχα των εγγραφών ενός πίνακα (Χατζηνικολάου, 2003).

1.2.1 Διαστάσεις πίνακα

Ο αριθμός των γραμμών και στηλών που περιέχει ένας πίνακας ορίζει τη διάστασή του. Για παράδειγμα, ένας πίνακας με m γραμμές και n στήλες ονομάζεται

[5]Το PageRank είναι ο αλγόριθμος αναζήτησης της Google που δημιουργήθηκε για να κατατάξει τις ιστοσελίδες σε βαθμίδες ποιότητας. Η κλίμακα του PageRank ξεκινάει από το μηδέν ως το 10.

[6]Αριθμητική ανάλυση είναι η μελέτη των αλγορίθμων οι οποίοι χρησιμοποιούν μαθηματικές προσεγγίσεις (σε αντιδιαστολή με τους γενικούς συμβολικούς υπολογιστικούς) για την επίλυση προβλημάτων της μαθηματικής ανάλυσης (όπως διακρίνεται από διακριτά μαθηματικά).

[7]Μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων είναι μια αριθμητική μέθοδος (δηλαδή, μέθοδος υπολογισμού με χρήση Η/Υ) για τον υπολογισμό προσεγγιστικών λύσεων μερικών διαφορικών εξισώσεων.

[8]Σειρά Τέιλορ είναι η αναπαράσταση μίας συνάρτησης ως άθροισμα απείρων όρων οι οποίοι υπολογίζονται από τις τιμές των παραγώγων της σε ένα συγκεκριμένο σημείο.

$m \times n$ πίνακας ή «m»-επί-«n» πίνακας, ενώ τα m και n ονομάζονται διαστάσεις του (Χατζηνικολάου, 2003).

Οι πίνακες με μία μόνη γραμμή λέγονται διανύσματα γραμμής, και με μία μόνη στήλη ονομάζονται διανύσματα στήλης. Τετραγωνικός πίνακας είναι εκείνος ο οποίος έχει τον ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών. Αντίστοιχα, ένας πίνακας με άπειρο αριθμό γραμμών ή στηλών (ή και τα δύο) ονομάζεται «άπειρος πίνακας». Σε μερικά περιβάλλοντα όπως στα προγράμματα υπολογιστικής άλγεβρας μπορεί να εννοηθεί και ένας πίνακας χωρίς γραμμές ή χωρίς στήλες, που ονομάζεται «άδειος πίνακας» (Ανδρεαδάκης, et al., 2000).

Πίνακας 1.1: Οι διαστάσεις ενός πίνακα.

Όνομα	**Διάσταση**	**Παράδειγμα**	**Περιγραφή**
Διάνυσμα γραμμής	$1 \times n$	$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$	Ένας πίνακας με μία γραμμή, μερικές φορές χρησιμοποιείται για να αναπαραστήσει ένα διάνυσμα
Διάνυσμα στήλης	$n \times 1$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}$	Ένας πίνακας με μία στήλη, μερικές φορές χρησιμοποιείται για να αναπαραστήσει ένα διάνυσμα
Τετραγωνικός πίνακας	$n \times n$	$\begin{bmatrix} -2{,}3 & 0{,}8 \\ 14{,}5 & 6{,}2 \end{bmatrix}$	Ένας πίνακας με τον ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών, μερικές φορές χρησιμοποιείται για να αναπαραστήσει ένα γραμμικό μετασχηματισμό από ένα διανυσματικό χώρο στον εαυτό του, όπως αντανάκλαση, περιστροφή, ή διάτμηση.

Πηγή: (Παλαιολόγου, 2016), (Πίνακας (Matrix)-Wikipedia, 2017).

1.2.2 Συμβολισμός πίνακα

Συνήθως οι πίνακες είναι γραμμένοι σε αγκύλες (Νικολαΐδης, 2003):

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdot & \cdot & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdot & \cdot & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & & & \alpha_{mn} \end{bmatrix}.$$

Διαφορετικά χρησιμοποιούνται μεγάλες παρενθέσεις αντί για αγκύλες (Νικολαΐδης, 2003):

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdot & \cdot & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdot & \cdot & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & & & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Οι ιδιαίτερες μορφές στο συμβολισμό ενός συμβολικού πίνακα είναι ποικίλες, με μερικές επικρατούσες τάσεις.

Συνήθως οι πίνακες συμβολίζονται με τη χρήση κεφαλαίων γραμμάτων (όπως «Α» στο παραπάνω παράδειγμα), ενώ τα αντίστοιχα πεζά γράμματα, με δύο δείκτες (π.χ. $\alpha_{11}, ή\ \alpha_{1,1}$), αντιπροσωπεύουν τις εγγραφές. Επιπλέον πολλοί συγγραφείς χρησιμοποιώντας κεφαλαία γράμματα για το συμβολισμό των πινάκων, χρησιμοποιούν μία ειδική έμφαση, συνήθως έντονη γραφή σε όρθια θέση (όχι πλάγια γραφή), για περαιτέρω διάκριση των πινάκων από τα άλλα μαθηματικά αντικείμενα. Ένας διαφορετικός συμβολισμός περιλαμβάνει τη χρήση μίας διπλής υπογράμμισης με μεταβλητό όνομα, με ή χωρίς έντονους χαρακτήρες, (π.χ., $\underline{\underline{A}}$) (Νικολαΐδης, 2003).

Η εγγραφή στην i-οστή γραμμή και j-οστή στήλη του πίνακα A μερικές φορές αναφέρεται ως i,j, (i,j), ή $(i,j)^{η}$ εγγραφή του πίνακα, και συνηθέστερα αναφέρεται ως $a_{i,j}$, ή a_{ij}. Άλλοι συμβολισμοί για εκείνη την εγγραφή είναι A[i,j] ή $A_{i,j}$.

Για παράδειγμα, το (1,3) στοιχείο του παρακάτω πίνακα A είναι 9[9] (Παλαιολόγου, 2016):

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{9} & \mathbf{7} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{9} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{4} \end{bmatrix}.$$

Μερικές φορές, τα στοιχεία ενός πίνακα ορίζονται από ένα τύπο όπως $a_{i,j} = f(i, j)$. Για παράδειγμα, κάθε μία από τις εγγραφές του παρακάτω πίνακα A τύπου 3×4 προσδιορίζεται από $a_{ij} = i - j$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}.$$

Τότε, ο ίδιος ο πίνακας μερικές φορές είναι ορισμένος από εκείνο τον τύπο, με τετράγωνες αγκύλες ή διπλές παρενθέσεις.

Ο πίνακας παραπάνω είναι ορισμένος ως A= [i-j], ή A = ((i-j)). Με την προϋπόθεση ότι η διάσταση του πίνακα είναι $m \times n$, τότε ο τύπος που αναφέρθηκε παραπάνω f(i, j) είναι έγκυρος για κάθε $i = 1, ..., m$ και κάθε $j = 1, ..., n$. Αυτό μπορεί να προσδιοριστεί είτε χωριστά, είτε χρησιμοποιώντας $m \times n$ ως δείκτης.

Για παράδειγμα, ο πίνακας A παραπάνω είναι 3×4 και μπορεί να οριστεί ως $A = [i - j]$ $(i = 1, 2, 3,\ j = 1, ..., 4)$, ή $A = [i - j]$ 3×4.

Σε μερικές γλώσσες προγραμματισμού χρησιμοποιούνται πίνακες με διπλούς δείκτες (ή πίνακες των πινάκων) για να αναπαραστήσουν ένα $m \times n$ πίνακα. Επίσης, μερικές γλώσσες προγραμματισμού αρχίζουν την αρίθμηση των δεικτών του πίνακα από το μηδέν, σε όποια περίπτωση τα στοιχεία ενός $m \times n$ πίνακα έχουν δείκτες $0 \leq i \leq m - 1$ και $0 \leq j \leq n - 1$. Θα ακολουθηθεί η πιο κοινή σύμβαση στο γράψιμο μαθηματικών κειμένων όπου η απαρίθμηση αρχίζει από το 1.

Το σύνολο όλων των $m \times n$ πινάκων συμβολίζεται **M**(m, n).

1.3 ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Για να τροποποιηθούν πίνακες υπάρχει ένας αριθμός βασικών λειτουργιών που μπορούν να εφαρμοστούν και ονομάζονται (Νικολαΐδης, 2003):

- πίνακας πρόσθεσης, βαθμωτού πολλαπλασιασμού και μεταφοράς,
- πίνακας πολλαπλασιασμού,
- λειτουργίες γραμμής, και
- υποπίνακας.

[9]Επίσης συμβολίζεται a_{13}, $a_{1,3}$, A[1,3] ή $A_{1,3}$.

1.3.1 Πίνακας πρόσθεσης, βαθμωτός πολλαπλασιασμός και μεταφορά

Αυτές τις λειτουργίες των πινάκων επεκτείνουν οικείες λειτουργίες των αριθμών. Παραδείγματος χάριν, η πρόσθεση είναι αντιμεταθετική, δηλαδή, ο πίνακας του αθροίσματος δεν εξαρτάται από τη διάταξη των προσθετέων: A + B = B + A. Η μεταφορά είναι σύμφωνη με την πρόσθεση και τον κλιμακωτό πολλαπλασιασμό, όπως εκφράζεται από $(cA)^T = c(A^T)$ και $(A + B)^T = A^T + B^T$. Τελικά, $(A^T)^T = A$ (Νικολαΐδης, 2003).

1. Πρόσθεση:

Πρόσθεση υπάρχει όταν το άθροισμα A+B δύο m-επί-n πινάκων A και B υπολογίζεται: $(A + B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}$, όπου $1 \le i \le m$ και $1 \le j \le n$.

Για παράδειγμα:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & 5+0 & 1+4 \\ 3+0 & 7+2 & 3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 3 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

2. Βαθμωτός πολλαπλασιασμός:

Ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός cA ενός πίνακα A και ενός αριθμού c (επίσης ονομάζεται βαθμωτός στη γλώσσα της αφηρημένης άλγεβρας) που δίνεται πολλαπλασιάζοντας κάθε στοιχείο του A με το c: $(cA)_{i,j} = c \cdot A_{i,j}$.

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 7 & 3 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 15 & 3 \\ 9 & 21 & 9 \end{bmatrix}$$

3. Μεταφορά

Η μεταφορά ενός m - επί - n πίνακα A είναι ο n – επί - m πίνακας A^T (επίσης συμβολίζεται A^{tr} ή ^tA) σχηματίζεται μετατρέποντας τις γραμμές σε στήλες και αντίστροφα:

$(A^T)_{i,j} = A_{j,i}$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

1.3.2 Πολλαπλασιασμός πινάκων

Ας υποτεθεί ότι υπάρχει ένας πίνακας A διαστάσεων m x n και ένας πίνακας B διαστάσεων r x k. Ο πολλαπλασιασμός των πινάκων μπορεί να πραγματοποιηθεί μόνο όταν n = r, δηλαδή όταν το πλήθος των στηλών του A ισούται με το πλήθος των γραμμών του B. Αν ισχύει αυτό, τότε το γινόμενο AB είναι ένας πίνακας C με διαστάσεις m x k[10] (Παλαιολόγου, 2016).

Δηλαδή A (m x n) x B (n x k) = C (m x k). Το στοιχείο c_{ij} του γινομένου C ισούται με το εσωτερικό γινόμενο της i-σειράς του A με τη j-στήλη του B[11].

---

[10]Η πράξη της διαίρεσης πινάκων δεν υφίσταται.

[11]Υπάρχουν τρεις τύποι μιας σειράς ενεργειών:

- Πρόσθεση σειράς, που είναι η προσθήκη μιας γραμμής σε μια άλλη.
- Πολλαπλασιασμός μιας σειράς, δηλαδή πολλαπλασιάζοντας όλες τις καταχωρήσεις μιας σειράς με μια μη-μηδενική σταθερά.
- Αλλαγή σειράς, δηλαδή η εναλλαγή δυο σειρών ενός πίνακα.

Αυτές οι λειτουργίες χρησιμοποιούνται με συγκεκριμένους τρόπους, οι οποίες περιλαμβάνουν την επίλυση γραμμικών εξισώσεων και την εύρεση ενός αντίστροφου πίνακα.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2*0+3*2 & 2*5+3*3 & 2*(-1)+3*6 \\ 4*0+(-2)*2 & 4*5+(-2)*3 & 4*(-1)+(-2)*6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0+6 & 10+9 & -2+18 \\ 0-4 & 20-6 & -4-12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 19 & 16 \\ -4 & 14 & -16 \end{bmatrix} = \boldsymbol{C}.$$

1.3.3 Υποπίνακας

Ο υποπίνακας ενός πίνακα δημιουργείται με τη διαγραφή οποιασδήποτε συλλογής γραμμών ή στηλών.

Δηλαδή, για τον ακόλουθο 3-4 πίνακα, μπορεί να κατασκευαστεί ένας 2-3 υποπίνακας αφαιρώντας τη γραμμή 2 και τη στήλη 4:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 5 & 4 \\ 5 & 5 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 5 \\ 6 & 3 & 8 \end{bmatrix}.$$

Υπολογίζοντας την ορίζουσα[12] ορισμένων υποπινάκων βρίσκονται οι δευτερεύοντες πίνακες και οι συμπαράγοντες ενός πίνακα (Παλαιολόγου, 2016).

1.4 ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

Στη γραμμική άλγεβρα αλλά και στην επίλυση γραμμικών συστημάτων, η ορίζουσα είναι μια τιμή, άμεσα συσχετιζόμενη με ένα τετραγωνικό πίνακα. Υπολογίζεται από τα στοιχεία του πίνακα με συγκεκριμένη αριθμητική σχέση. Κατά την επίλυση συστήματος γραμμικών εξισώσεων το σύστημα έχει μοναδική λύση ακριβώς όταν η ορίζουσα είναι μη μηδενική, όταν η ορίζουσα είναι μηδέν είτε δεν υπάρχουν λύσεις είτε υπάρχουν άπειρες. Ενώ για την επίλυση γραμμικού μετασχηματισμού ενός διανυσματικού χώρου για τις ίδιες συνθήκες σημαίνει ότι για το μετασχηματισμό ορίζεται η αντίστροφη πράξη. Έτσι για την τιμή της ορίζουσας ενός τετραγωνικού πίνακα με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς υπάρχει μια γεωμετρική ερμηνεία: η απόλυτη τιμή της ορίζουσας αντιστοιχεί στην κλίμακα με την οποία το εμβαδόν ή ο όγκος πολλαπλασιάζεται με το σχετικό γραμμικό μετασχηματισμό, ενώ το πρόσημό της δείχνει αν ο μετασχηματισμός διατηρεί τον προσανατολισμό (Παλαιολόγου, 2016).

Άρα για έναν 2×2 πίνακα με ορίζουσα -2, όταν εφαρμόζεται στην περιοχή ενός επιπέδου με πεπερασμένο εμβαδόν, θα μετασχηματιστεί σε μια περιοχή με το διπλάσιο εμβαδόν, ενώ αντιστρέφει τον προσανατολισμό της.

---

[12]Η ορίζουσα είναι μια τιμή, η οποία σχετίζεται με ένα τετραγωνικό πίνακα. Μπορεί να υπολογιστεί από τα στοιχεία του πίνακα σε μια συγκεκριμένη αριθμητική έκφραση, αν και υπάρχουν και άλλοι τρόποι να βρούμε αυτήν την τιμή. Η ορίζουσα παρέχει σημαντικές πληροφορίες όταν ο πίνακας αποτελείται από τους συντελεστές ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων, ή όταν αντιστοιχεί σε ένα γραμμικό μετασχηματισμό ενός διανυσματικού χώρου.

Για παράδειγμα, εάν ένας πίνακας ένας είναι 2x2 (2 γραμμές και 2 στήλες) τότε η ορίζουσα ορίζεται ως εξής :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \, \alpha_{12} \\ \alpha_{21} \, \alpha_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Det} = \alpha_{11} * \alpha_{22} - \alpha_{12} * \alpha_{21}$$

Άρα για τον υπολογισμό της ορίζουσας ενός πίνακα θα πρέπει ο πίνακας να έχει τόσες στήλες όσες και γραμμές (NxN).

Και έστω πίνακας Α, $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha_{11}} & \boldsymbol{\alpha_{12}} & \boldsymbol{\alpha_{13}} \\ \boldsymbol{\alpha_{21}} & \boldsymbol{\alpha_{22}} & \boldsymbol{\alpha_{23}} \\ \boldsymbol{\alpha_{31}} & \boldsymbol{\alpha_{32}} & \boldsymbol{\alpha_{33}} \end{bmatrix}$

Η ορίζουσα (Det) ορίζεται ως εξής:

$$\mathrm{Det} = \boldsymbol{\alpha_{11}} \begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha_{22}} & \boldsymbol{\alpha_{23}} \\ \boldsymbol{\alpha_{32}} & \boldsymbol{\alpha_{33}} \end{vmatrix} - \boldsymbol{\alpha_{12}} \begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha_{21}} & \boldsymbol{\alpha_{23}} \\ \boldsymbol{\alpha_{31}} & \boldsymbol{\alpha_{33}} \end{vmatrix} + \boldsymbol{\alpha_{13}} \begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha_{21}} & \boldsymbol{\alpha_{22}} \\ \boldsymbol{\alpha_{31}} & \boldsymbol{\alpha_{32}} \end{vmatrix}$$

Για παράδειγμα, η ορίζουσα του πίνακα, $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, υπολογίζεται χρησιμοποιώντας αυτόν τον κανόνα:

$$\mathbf{Det} = \mathbf{5} \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{5} \end{vmatrix} - \mathbf{3} \begin{vmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} \end{vmatrix} + (\mathbf{-1}) \begin{vmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{Det} = \mathbf{5} * (\mathbf{5} - \mathbf{0}) - \mathbf{3} * (\mathbf{-5} - \mathbf{4}) - \mathbf{1} * (\mathbf{0} - \mathbf{2}) = \mathbf{5} * \mathbf{5} - \mathbf{3} * (\mathbf{-9}) - \mathbf{1} * (\mathbf{-2}) \Rightarrow$$

$$\mathbf{Det} = \mathbf{25} + \mathbf{27} + \mathbf{2} = \mathbf{54}$$

1.5 ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Η μέθοδος των πινάκων χρησιμοποιείται στην επίλυση πολλαπλών γραμμικών εξισώσεων, δηλαδή, σε συστήματα γραμμικών εξισώσεων.

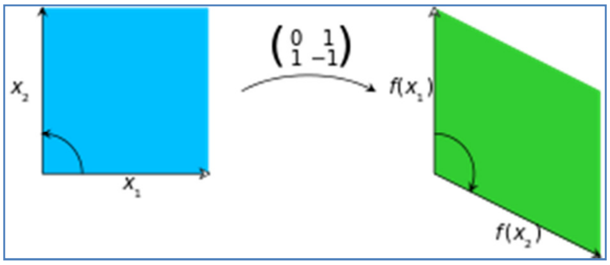
Έτσι, εάν το Α είναι ένας m-n πίνακας, το X συμβολίζει ένα διάνυσμα στήλης (δηλαδή, n×1-πίνακας) n μεταβλητών X_1, X_2, ..., X_n, και b είναι ένα m×1-διάνυσμα στήλης, τότε η εξίσωση ενός πίνακα: Ax = b, είναι ισοδύναμο με το σύστημα γραμμικών εξισώσεων:

$$\begin{gathered} \mathbf{A_{1,1}} \, \mathbf{X_1} + \mathbf{A_{1,2}} \mathbf{X_2} + \cdots + \mathbf{A_{1,n}} \mathbf{X_n} = \mathbf{b_1} \\ \vdots \\ \mathbf{A_{m,1}} \, \mathbf{X_1} + \mathbf{A_{m,2}} \mathbf{X_2} + \cdots + \mathbf{A_{m,n}} \mathbf{X_n} = \mathbf{b_m} \end{gathered}$$

1.6 ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Ένας πραγματικός μ-ν πίνακας Α οδηγεί σε ένα γραμμικό μετασχηματισμό $R^{\nu} \rightarrow R^{\mu}$ που απεικονίζει κάθε διάνυσμα x του R^{ν} στο γινόμενο Ax, το οποίο είναι διάνυσμα του R^{μ}. Το ίδιο ισχύει και αντίστροφα καθώς, κάθε γραμμικός μετασχηματισμός f: $R^{\nu} \rightarrow R^{\mu}$ προκύπτει από ένα μοναδικό μ-ν πίνακα A. Πιο αναλυτικά, το (i, j)-στοιχείο του A είναι η $i^{οστή}$ συντεταγμένη του $f(e_j)$, όπου $e_j = (0,...,0,1,0,...,0)$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα με 1 στη j-θέση. Ο πίνακας A αντιπροσωπεύει το γραμμικό μετασχηματισμό f και ονομάζεται πίνακας μετασχηματισμού της f (Ανδρεαδάκης, et al., 2000).

Παραδείγματος χάριν, ο 2×2 πίνακας A=$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, μπορεί να θεωρηθεί ως ο μετασχηματισμός του τετραγώνου σε ένα παραλληλόγραμμο με κορυφές στο (0, 0), (a, b), (a + c, b + d), και (c, d). Το παραλληλόγραμμο που απεικονίζεται στα δεξιά (πράσινο χρώμα) του Σχήματος 1.1 προκύπτει από το πολλαπλασιασμό του A με κάθε ένα από τα διανύσματα-στήλη: $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, και $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ με τη σειρά.

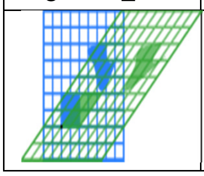
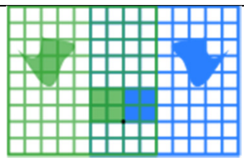
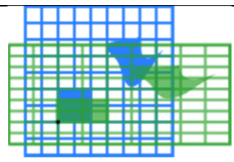
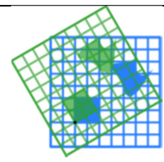


Σχήμα 1.1: Τα διανύσματα που αναπαριστώνται από έναν 2×2 πίνακα αντιστοιχούν σε πλευρές ενός τετραγώνου μετασχηματισμένες σε ένα παραλληλόγραμμο.

Οι κορυφές του τετραγώνου καθορίζονται από αυτά τα διανύσματα.

Στον ακόλουθο πίνακα 1.2 παρουσιάζεται μια σειρά από 2 × 2 πραγματικούς πίνακες με τις σχετικές γραμμικές απεικονίσεις του R^2 (γραμμικός μετασχηματισμός/ R-χώρος). Το μπλε γραμμοσκιασμένο είναι το πρωτότυπο και το πράσινο είναι το μετασχηματισμένο. Οι άξονες (0,0) επισημαίνονται με μαύρα σημεία (Παλαιολόγου, 2016).

Πίνακας 1.2: Σειρά από 2 × 2 πραγματικούς πίνακες με τις σχετικές γραμμικές απεικονίσεις του R^2 (R-χώρος).

Οριζόντια διάτμηση με m=1.25	Αντανάκλαση μέσω του κατακόρυφου άξονα	Γραμμικός μετασχηματισμός (r = 3/2 squeeze mapping)	Αλλαγή κλίμακας με έναν παράγοντα 3/2	Περιστροφή κατά $\pi/6^R$ = 30°
$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1.25} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{3/2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2/3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{3/2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3/2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \boldsymbol{cos(\pi/6^R)} & \boldsymbol{-sin(\pi/6^R)} \\ \boldsymbol{sin(\pi/6^R} & \boldsymbol{cos(\pi/6^R)} \end{bmatrix}$
				

Πηγή: (Πίνακας (Matrix)-Wikipedia, 2017), (Παλαιολόγου, 2016).

Σύμφωνα με αντιστοιχία 1-προς-1 μεταξύ των πινάκων και των γραμμικών απεικονίσεων, ο πολλαπλασιασμός πινάκων αντιστοιχεί στη σύνθεση των γραμμικών απεικονίσεων. Εάν ένας $\kappa - \mu$ πίνακας B αντιπροσωπεύει μια άλλη γραμμική απεικόνιση g: $R^{\mu} \rightarrow R^{\kappa}$, τότε η σύνθεση $g \circ f$ αντιπροσωπεύεται από τον πίνακα BA:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(Ax) = B(Ax) = (BA)x.$$

Η τελευταία ισότητα δημιουργείται από την προηγούμενη συσχέτιση του πολλαπλασιασμού πινάκων.

Η τάξη ενός πίνακα A είναι ο μέγιστος αριθμός των γραμμικών ανεξάρτητων διανυσμάτων στη σειρά του πίνακα, όπου είναι το ίδιο με τον μέγιστο αριθμό των γραμμικών ανεξάρτητων διανυσμάτων στήλης. Αντίστοιχα, από το A παριστάνεται η διάσταση της εικόνας της γραμμικής απεικόνισης. Σύμφωνα με το θεώρημα μηδενικού βαθμού η διάσταση του πυρήνα kernel ενός πίνακα συν το βαθμό ισούται με τον αριθμό των στηλών του πίνακα (Ανδρεαδάκης, et al., 2000).

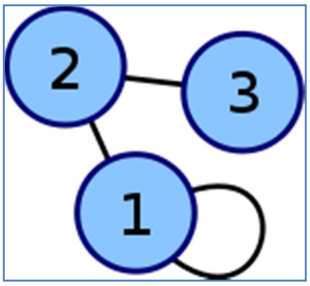
1.7 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Τόσο στα μαθηματικά όσο και σε άλλες επιστήμες υπάρχουν πολυάριθμες εφαρμογές των πινάκων.

Παρακάτω παρουσιάζονται συνοπτικά κάποιες εφαρμογές των πινάκων (Παλαιολόγου, 2016):

1.7.1 Θεωρία Γραφήματος

Μια βασική έννοια της θεωρίας γραφήματος είναι ο πίνακας γειτνίασης (adjacency matrix) ενός πεπερασμένου γραφήματος. Σε αυτόν καταγράφεται ποια από τις κορυφές του γραφήματος συνδέονται με μια ακμή. Λογικοί πίνακες ονομάζονται οι πίνακες που περιέχουν μόνο δύο διαφορετικές τιμές (1 και 0 που σημαίνει για παράδειγμα «ναι» και «όχι», αντίστοιχα). Πληροφορίες σχετικά με τις αποστάσεις των άκρων (ή κόστος), περιέχει η απόσταση πίνακα. Αυτές οι έννοιες μπορούν να εφαρμοστούν σε ιστοσελίδες συνδεδεμένες με υπερσυνδέσμους ή πόλεις που συνδέονται με δρόμους κλπ. Σε περίπτωση κατά την οποία το οδικό δίκτυο είναι εξαιρετικά πυκνό, τότε οι πίνακες τείνουν να είναι αραιοί, δηλαδή, περιέχουν λίγες μη μηδενικές εγγραφές. Συνεπώς, στην θεωρία διαδικτύου μπορούν να χρησιμοποιηθούν ειδικά προσαρμοσμένοι αλγοριθμικοί πίνακες (Παλαιολόγου, 2016).



Εικόνα 1.1: Ένα μη-διατεταγμένο γράφημα.

Πηγή: (Παλαιολόγου, 2016).

Ο πίνακας γειτνίασης που αντιστοιχεί στο γράφημα της Εικόνας 1.1 είναι:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

1.7.2 Συμμετρίες και μετασχηματισμοί στη φυσική

Στη σύγχρονη φυσική καθοριστικό ρόλο διαδραματίζουν οι γραμμικοί μετασχηματισμοί και οι σχετικές συμμετρίες. Παραδείγματος χάριν, τα στοιχειώδη σωματίδια στη θεωρία κβαντικού πεδίου ταξινομούνται ως αναπαραστάσεις της ομάδας Lorentz της ειδικής σχετικότητας (Ανδρεαδάκης, et al., 2000).

2 ΚΕΦΑΛΑΙΟ: «ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ»

2.1 ΓΕΝΙΚΑ

Ένας κλάδος της μαθηματικής ανάλυσης που ασχολείται με τους πραγματικούς αριθμούς και τις πραγματικές συναρτήσεις μίας πραγματικής μεταβλητής είναι η πραγματική ανάλυση (ή αλλιώς θεωρία των συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής).

Πρόκειται για την ενασχόληση με τις αναλυτικές ιδιότητες των πραγματικών συναρτήσεων και ακολουθιών, συμπεριλαμβανομένων της σύγκλισης[13] και των ορίων των ακολουθιών πραγματικών αριθμών, του λογισμού των πραγματικών αριθμών, της συνέχειας, της ομαλότητας και σχετικών ιδιοτήτων των πραγματικών συναρτήσεων (Wikipedia-Real analysis, 2017).

Μια περιοχή της μαθηματικής ανάλυσης η οποία μελετά έννοιες όπως τις ακολουθίες και τα όριά τους, τη συνέχεια, την παραγώγιση, την ολοκλήρωση και τις ακολουθίες συναρτήσεων είναι η πραγματική ανάλυση. Την πραγματική ανάλυση ενδιαφέρουν οι πραγματικοί αριθμοί, συχνά συμπεριλαμβανομένων του θετικού και του αρνητικού απείρου ώστε να σχηματιστεί η εκτεταμένη πραγματική ευθεία. Η πραγματική ανάλυση συνδέεται στενά με τη μιγαδική ανάλυση[14], η οποία μελετά γενικά τις αντίστοιχες ιδιότητες των μιγαδικών[15] αριθμών. Στη μιγαδική ανάλυση, είναι φυσικό να ορίζεται η παραγώγιση μέσω ολόμορφων[16] συναρτήσεων, οι οποίες έχουν μια σειρά από χρήσιμες ιδιότητες, όπως το να μπορούν να παραγωγιστούν επαναλαμβανόμενα, να εκφράζονται ως δυναμοσειρές[17], και να ικανοποιούν τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy[18].

Συνήθως είναι πιο φυσικό εξετάζονται στην πραγματική ανάλυση παραγωγίσιμες, ομαλές ή αρμονικές συναρτήσεις, οι οποίες εφαρμόζονται ευρύτερα, αλλά μπορεί να στερούνται μερικών ισχυρότερων ιδιοτήτων των ολόμορφων συναρτήσεων. Ωστόσο, αποτελέσματα όπως το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας είναι πιο απλά όταν εκφράζονται μέσω των μιγαδικών αριθμών.

---

[13] Διαισθητικά, μια ακολουθία λέμε ότι έχει όριο ή ότι συγκλίνει σε ένα αριθμό L, όταν οι όροι της πλησιάζουν όλο και περισσότερο τον αριθμό αυτό καθώς ο δείκτης της αυξάνεται απεριόριστα.

[14] Η μιγαδική ανάλυση, γνωστή παραδοσιακά ως η θεωρία των συναρτήσεων των μιγαδικών μεταβλητών, είναι ο κλάδος της μαθηματικής ανάλυσης που ερευνά τις συναρτήσεις των μιγαδικών αριθμών. Είναι χρήσιμη σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών, συμπεριλαμβανομένης της αλγεβρικής γεωμετρίας, της θεωρίας των αριθμών, της συνδυαστικής αναλυτικής, των εφαρμοσμένων μαθηματικών, όπως επίσης και στη φυσική, συμπεριλαμβανομένης της υδροδυναμικής και της θερμοδυναμικής, και επίσης σε τομείς της μηχανικής όπως η πυρηνική, η αεροδιαστημική, η μηχανολογική και η ηλεκτρολογική μηχανική.

[15] Οι μιγαδικοί αριθμοί είναι μία επέκταση του συνόλου των πραγματικών αριθμών με την προσθήκη του στοιχείου , που λέγεται φανταστική μονάδα, και έχει την ιδιότητα: $i^2=-1$.

[16] Οι ολόμορφες συναρτήσεις είναι τα βασικά αντικείμενα μελέτης στην μιγαδική ανάλυση. Μια ολόμορφη συνάρτηση είναι μια μιγαδική συνάρτηση μιας ή περισσότερων μιγαδικών μεταβλητών που είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο μιας περιοχής του πεδίου ορισμού της Η ύπαρξη μιας μιγαδικής παραγώγου σε μια περιοχή τιμών είναι πολύ σημαντική, γιατί υποδηλώνει ότι κάθε ολόμορφη συνάρτηση είναι στην πραγματικότητα απείρως διαφορίσιμη και ίση με τη δική της σειρά Taylor.

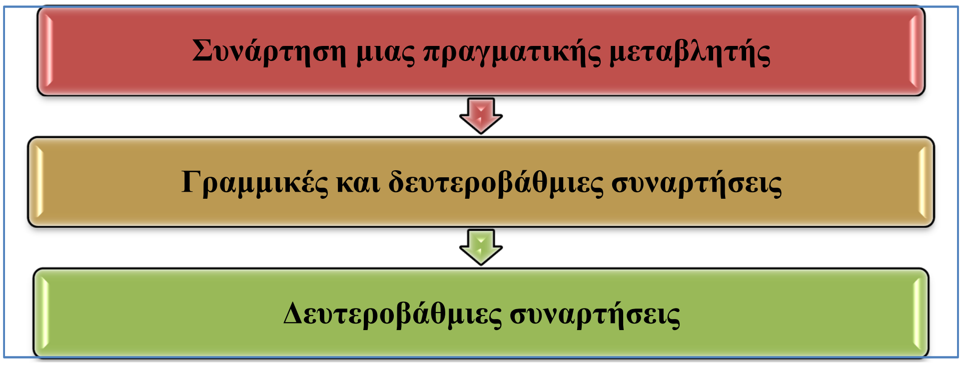
[17] Είναι η αναπαράσταση μίας συνάρτησης ως άθροισμα απείρων όρων οι οποίοι υπολογίζονται από τις τιμές των παραγώγων της σε ένα συγκεκριμένο σημείο.

[18] Εκφράζει το γεγονός ότι η ολόμορφη συνάρτηση που ορίζεται πάνω σε ένα κλειστό δίσκο, καθορίζεται πλήρως από τις τιμές της στο σύνορο του δίσκου αυτού και παρέχει τους ολοκληρωτικούς τύπους για όλες τις παραγώγους της ολόμορφης συνάρτησης.

Συχνά στην πραγματική ανάλυση, όπως ο υπολογισμός πραγματικών ολοκληρωμάτων μέσω του λογισμού των καταλοίπων, χρησιμοποιούνται τεχνικές από τη θεωρία των αναλυτικών συναρτήσεων μιας μιγαδικής μεταβλητής (Παπαδημητράκης, 2015).

2.2 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Στο παρακάτω Σχήμα 2.1 φαίνονται τα πεδία των συναρτήσεων μιας μεταβλητής:



Σχήμα 2.1: Πεδία συναρτήσεων μιας μεταβλητής.

Συγκεκριμένα (Κολέτσος, Γραμμικός Προγραμματισμός, 2017):

2.2.1 Συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής

Μια συνάρτηση ορίζεται όταν συσχετιστεί κάθε στοιχείο ενός συνόλου D (Domain) με ένα και μόνο στοιχείο ενός συνόλου R (Range) μέσω ενός κανόνα f.

Τα σύνολα D και R καλούνται πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών της συνάρτησης αντίστοιχα.

Βασικές συναρτήσεις & πεδίο ορισμού:

$\mathrm{f(x)} = \log \mathrm{x}\,,\ D(f) = (0, \infty)$

$\mathrm{f(x)} = \frac{1}{\mathrm{x}}\,, D(f) = R - \{0\}$

$\mathrm{f(x)} = \sqrt{x}\,, D(f) = [0, \infty)$

2.2.2 Γραμμικές και δευτεροβάθμιες συναρτήσεις

Μια γραμμική συνάρτηση έχει την μορφή:

$$y = ax + b$$

Η παράμετρος b γεωμετρικά εκφράζει τη θέση της ευθείας στο επίπεδο ενώ η παράμετρος a την κλίση της ευθείας σε σχέση με τον οριζόντιο άξονα Ox (δηλαδή εκφράζει την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζεται από τον άξονα Ox και την ευθεία).

2.2.3 Δευτεροβάθμιες συναρτήσεις

Η δευτεροβάθμια συνάρτηση στη γενική μορφή της είναι:

$$y = f\,(x) = ax^2 + bx + c$$

Ο τύπος δίνει τις ρίζες της εξίσωσης x_1 και x_2 (δηλαδή οι λύσεις της f(x)=0):

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ όπου $\alpha \neq 0$

Εάν $\Delta = b^2 - 4 \times a \times c < 0$, τότε οι ρίζες είναι μη πραγματικές

Εάν $\Delta = b^2 - 4 \times a \times c > 0$, τότε οι ρίζες είναι πραγματικές και διάφορες μεταξύ τους.

Εάν $\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = 0$, τότε υπάρχει μια πραγματική ρίζα.

Για τις ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης ισχύει:

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ και $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Επίσης εάν α>0 τότε η συνάρτηση f είναι κυρτή (convex function) και ελάχιστο έχει στο σημείο:

$$(x,y) = (-\frac{b}{2a}, c\frac{b^2}{4a}).$$

Εάν α<0 τότε η συνάρτηση f είναι κοίλη (concave function) και μέγιστο έχει στο σημείο:

$$(x,y) = (-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}).$$

2.3 ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Τα πεδία παραγώγισης συναρτήσεως μιας μεταβλητής φαίνονται στο παρακάτω Σχήμα 2.2:

Σχήμα 2.2: Πεδία παραγώγισης συναρτήσεως μιας μεταβλητής.

Συγκεκριμένα (Κολέτσος, Γραμμικός Προγραμματισμός, 2017):

2.3.1 Γεωμετρική έννοια της παραγώγου

Η κλίση της εφαπτομένης στο εν λόγω σημείο είναι παράγωγος της συνάρτησης y = f(x) στο σημείο [α, f(α)] και συμβολίζεται με f΄(α).

Την παράγωγο f΄(α) της συνάρτησης f στο σημείο α του πεδίου ορισμού της δίνει ο τύπος:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Η γενική μορφή της παραγώγου για οποιοδήποτε σημείο x του πεδίου ορισμού της συνάρτησης f είναι:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης y = f(x) στο σημείο [α, f(α)] είναι:

$y - f(a) = f'(a) \times (x - a)$ ή μετά τις πράξεις $y = (f(a) - f'(a) \times a) + f'(a) \times x$

Η παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο α, εσωτερικό του πεδίου ορισμού της, δίνει το στιγμιαίο ή οριακό ρυθμό μεταβολής της f στο α.

Εναλλακτικά η παράγωγος συμβολίζεται $\frac{dy}{dx}$ ή $\frac{df(x)}{dx}$

(το παραπάνω δεν πρόκειται για κλάσμα, αλλά για το πηλίκο της μεταβολής df της τιμής της συνάρτησης f προς τη μεταβολή dx της μεταβλητής x από την οποία και προκαλείται). Τα μεγέθη df και dx ονομάζονται διαφορικά της f και της x αντίστοιχα. Έτσι τελικά: $df(x) = f'(x)dx$.

Η δεύτερη παράγωγος έχει ως εξής:

$$f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

2.3.2 Όριο συνάρτησης

Το όριο της συνάρτησης f(x) είναι ο αριθμός A όταν η x τείνει στο α, εάν η f(x) τείνει στο A καθώς η x τείνει προς το α (αλλά δεν ισούται με αυτό), δηλαδή:

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = A$$

Όταν υπολογίζεται το όριο σε μια περιοχή του α όπου τείνει το x, πρέπει να υπάρχουν τιμές της x και από τις δύο πλευρές, πολύ κοντά στο α.

2.3.3 Σύνθετες συναρτήσεις και παραγώγιση - Αλυσωτός κανόνας

Έστω ότι υπάρχει η σύνθετη συνάρτηση y = f(u) όπου u = g(x), η οποία εναλλακτικά γράφεται και ως $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$. Στην περίπτωση αυτή πρώτα υπολογίζεται η συνάρτηση g(x) και μετά επί του αποτελέσματος που βρέθηκε, εφαρμόζεται η συνάρτηση f. Μια οποιαδήποτε μεταβολή της ανεξάρτητης μεταβλητής x σημαίνει και μια μεταβολή στην u και άρα μεταβολή της y (αλυσωτή αντίδραση). Έτσι ισχύει ο αλυσωτός κανόνας:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

2.3.4 Μέθοδος πεπλεγμένης παραγώγισης

Αν δύο μεταβλητές x και y σχετίζονται με μια εξίσωση, τότε για να επίλυση της παραγώγου $\frac{dy}{dx}$ ακολουθούνται τα εξής βήματα:

a) Παραγωγίζονται και τα δύο μέλη της εξίσωσης ως προς x θεωρώντας την y ως συνάρτηση του x (χρήση του αλυσωτού κανόνα).
b) Επιλύεται η προκύπτουσα εξίσωση ως προς $\frac{dy}{dx}$.

2.3.5 Αντίστροφες συναρτήσεις και παραγώγιση

Στην περίπτωση που η συνάρτηση f είναι «ένα προς ένα» στο πεδίο ορισμού της A (και μόνο τότε) και με πεδίο τιμών B, τότε η f έχει μια αντίστροφη συνάρτηση g με πεδίο ορισμού B και πεδίο τιμών A. Μεταξύ των παραγώγων των αντίστροφων συναρτήσεων f και g ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$g'[f(x)] * f'(x) = 1$, ή εναλλακτικά

$g'(y) = 1/f'(x)$ όταν $f'(x) \neq 0$

Για την εύρεση της αντίστροφης συνάρτησης ακολουθούνται τα εξής βήματα:

a) Γράφεται η εξίσωση, η οποία ορίζει τη συνάρτηση $y = f(x)$.
b) Εναλλάσσονται τα x και y, για να προκύψει $x = f(y)$.
c) Επιλύεται η εξίσωση $x = f(y)$ ως προς y σε όρους x (αν είναι εφικτό).
d) Αν η λύση $y = g(x)$ που προκύπτει είναι μοναδική, τότε η συνάρτηση g είναι η αντίστροφη συνάρτηση.

2.3.6 Ελαστικότητα

Με την ελαστικότητα μετράται η ποσοστιαία μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής, η οποία οφείλεται σε μια μικρή ποσοστιαία μεταβολή της ανεξάρτητης μεταβλητής.

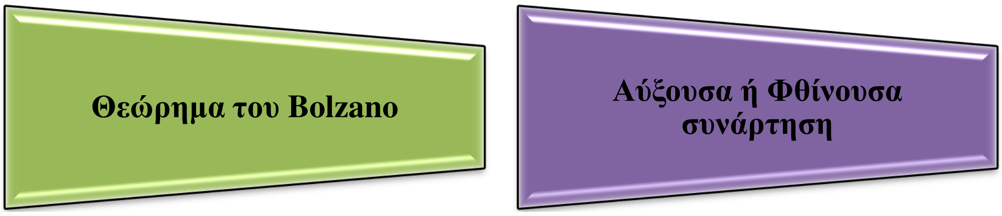
Για τη συνάρτηση y = f(x), η ελαστικότητα δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$\varepsilon_{yx} = \frac{\Delta y/y}{\Delta x/x} = \frac{x}{y} \times \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \times f'(x)$$

Η ελαστικότητα πρόκειται για ένα αδιάστατο μέγεθος, το οποίο δεν εξαρτάται από μονάδες μέτρησης των υπεισερχόμενων μεγεθών. Στα οικονομικά οι πιο συνηθισμένες μορφές ελαστικότητας είναι η ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή, η ελαστικότητα ζήτησης ως προς το εισόδημα, η σταυροειδής ελαστικότητα ζήτησης, η ελαστικότητα προσφοράς.

2.4 ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Τα πεδία συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων μιας μεταβλητής φαίνονται στο παρακάτω Σχήμα 2.2:



Σχήμα 2.3: Πεδία συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων μιας μεταβλητής.

Συγκεκριμένα (Κολέτσος, Γραμμικός Προγραμματισμός, 2017):

2.4.1 Θεώρημα του Bolzano

Αν μία συνεχής συνάρτηση ορίζεται σε ένα κλειστό πεδίο τιμών $[\alpha, \beta]$, δηλαδή το χ μπορεί να παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ α και β συμπεριλαμβανομένων και των δύο ακραίων τιμών α και β, τότε η συνάρτηση παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ του $f(a)$ και του $f(\beta)$, δηλαδή το πεδίο τιμών της είναι το $[f(\alpha), f(\beta)]$.

Το παραπάνω θεώρημα χρησιμοποιείται για την απόδειξη ότι η μία συνάρτηση έχει μία ρίζα μεταξύ δύο συγκεκριμένων τιμών.

Υπολογίζεται το $f(a)$ και το $f(\beta)$. Αν το γινόμενο $f(a) \times f(\beta)$ είναι αρνητικό, τότε το ένα άκρο του διαστήματος τιμών είναι αρνητικό και το άλλο θετικό. Συνεπώς το 0 ανήκει στο διάστημα τιμών.

2.4.2 Αύξουσα ή Φθίνουσα συνάρτηση

Για να αποδειχθεί ότι μία συνάρτηση είναι αύξουσα ή φθίνουσα σε ένα διάστημα ορισμού της υπολογίζεται πρώτα η παράγωγος συνάρτηση $f'(x)$.

Στην περίπτωση που η παράγωγος $f'(x)$ μιας συνάρτησης $f(x)$ είναι θετική σε ένα διάστημα τότε σε εκείνο το διάστημα ή συνάρτηση είναι αύξουσα. Ενώ, αν η παράγωγος είναι αρνητική, τότε η συνάρτηση είναι φθίνουσα.

Τέλος, αν η παράγωγος είναι 0, τότε η συνάρτηση παρουσιάζει στάσιμα σε εκείνο το σημείο.

2.5 ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Τα ακρότατα σημεία μιας συνάρτησης (ελάχιστο ή μέγιστο) βρίσκονται με την εύρεση της τιμής (ή των τιμών) της ανεξάρτητης μεταβλητής, στην οποία η εξαρτημένη μεταβλητή λαμβάνει την ελάχιστη ή μέγιστη τιμή της.

Η παραγώγιση χρησιμοποιείται με σκοπό να εντοπιστούν και να μετρηθούν τα ακρότατα σημεία μιας συνάρτησης (Κολέτσος, Γραμμικός Προγραμματισμός, 2017).

Κριτήρια προσδιορισμού ακρότατων σημείων μιας συνάρτησης $y = f(x)$:

Μέγιστο: $\frac{dy}{dx} = 0$ (κριτήριο πρώτης παραγώγου)

και $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ (κριτήριο δεύτερης παραγώγου)

Ελάχιστο: $\frac{dy}{dx} = 0$ (κριτήριο πρώτης παραγώγου)

και $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ (κριτήριο δεύτερης παραγώγου)

Στη συνέχεια ακολουθούν τα βήματα εύρεσης ακρότατων σημείων μιας συνάρτησης $y = f(x)$:

a) Βρίσκεται η συνάρτηση της πρώτης παραγώγου $f'(x)$.
b) Τίθεται η παράγωγος συνάρτηση ίση με μηδέν ($f'(x) = 0$) και επιλύεται η εξίσωση που προκύπτει, βρίσκοντας ποιες τιμές του x μηδενίζουν την $f'(x)$.
c) Βρίσκεται η δεύτερη παράγωγος, $f''(x)$, παραγωγίζοντας τη συνάρτηση της πρώτης παραγώγου, $f'(x)$.
d) Υπολογίζονται οι τιμές της δεύτερης παραγώγου για κάθε τιμή του x που βρέθηκαν στο βήμα (β) και ελέγχεται αν είναι θετικές ή αρνητικές.

Ορισμός σημείου καμπής:

Αν $f''(x) \geq 0$ τότε η f είναι κυρτή.

Αν $f''(x) \leq 0$ τότε η f είναι κοίλη.

Αν $f''(x) = 0$ και η $f''(x)$ αλλάζει πρόσημο στο c, τότε το c είναι σημείο καμπής της f (δηλαδή η f αλλάζει από κυρτή σε κοίλη ή το αντίστροφο).

2.5.1 Ακρότατα σε ένα κλειστό διάστημα τιμών [a,b]

Αν ζητείται η εύρεση μέγιστης ή ελάχιστης τιμής μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα [a,b], και η συνάρτηση δεν παρουσιάζει στάσιμα (δηλαδή δεν υπάρχουν σημεία όπου $f'(x) = 0$) ή τα στάσιμα δεν είναι ακραία σημεία αλλά είναι σημεία καμπής (δηλαδή $f'(x) = 0$ και $f''(x) = 0$), τότε το μέγιστο ή ελάχιστο της συνάρτησης βρίσκεται στα άκρα του διαστήματος και είναι το σημείο $(a, f(a))$ ή το σημείο $(b, f(b))$.

2.5.2 Λυμένες εφαρμογές συναρτήσεων

- **1η λυμένη εφαρμογή**

Μια εταιρεία παράγει Q μονάδες ενός προϊόντος με κόστος που δίνεται από την συνάρτηση $C(Q) = 6000 + 10Q$. Τα έσοδα από την πώληση Q ποσότητας του προϊόντος δίνονται από την συνάρτηση $R(Q) = 12Q$. Πότε η εταιρεία έχει κέρδος και πότε ζημιά;

Λύση:

Η συνάρτηση κέρδους είναι:

$K(Q) = R(Q) - C(Q) = 12Q - (6000 + 10Q) = 2Q - 6000.$

Επομένως η επιχείρηση έχει κέρδος για $Q > 3000$, ενώ χάνει χρήματα για $0 \leq Q < 3000$.

- **2η λυμένη εφαρμογή**

Μια βιομηχανία καθορίζει την τιμή πώλησης $P(Q)$ κάθε μονάδας ενός προϊόντος, συναρτήσει της ποσότητας Q των μονάδων παραγωγής, σύμφωνα με τον τύπο $P(Q) = 900 - 2Q$, Το κόστος παραγωγής Q μονάδων ενός προϊόντος δίνεται από τη συνάρτηση $C(Q) = -Q^2 + 400Q$.

- Να βρεθούν οι συναρτήσεις εσόδων $R(Q)$ και κερδών $K(Q)$,
- Να προσδιοριστεί η ποσότητα του προϊόντος που μεγιστοποιεί τη συνάρτηση των κερδών και το μέγιστο κέρδος.

Λύση:

Οι συναρτήσεις εσόδων και κερδών είναι, αντίστοιχα, $R(Q) = P(Q)Q = (900 - 2Q)Q = -2Q^2 + 900Q$

και

$$K(Q) = R(Q) - C(Q) = -2Q^2 + 900Q - (-Q^2 + 400Q) = -Q^2 + 500Q.$$

Έχουμε

$K'(Q) = (-Q^2 + 500Q)' = -2Q + 500.$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της K φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Q	∞ 250 +∞
K΄(Q)	+ 0 -
K(Q)	$\nearrow$ K(250) $\searrow$

Επομένως το μέγιστο κέρδος παρουσιάζεται όταν η βιομηχανία παράγει 250 μονάδες από το προϊόν και είναι ίσο με 62500 €.

- **3η λυμένη εφαρμογή**

Ένα εργοστάσιο παραγωγής ενός μηχανικού εξαρτήματος λειτουργεί t ώρες εβδομαδιαία με κόστος:

$$C(t) = \frac{1}{t^2} \cdot [2(t - 35)^2 + 750]$$

δεκάδες χιλιάδες ευρώ. Πόσες ώρες εβδομαδιαία πρέπει να λειτουργήσει το εργοστάσιο ώστε να έχει το ελάχιστο κόστος;

Λύση:

Έχουμε:

$$C'(t) = \frac{1}{t^2} \cdot [2(t - 35)^2 + 750] + \frac{1}{t}[4(t - 35)]$$

$$= \frac{-2(t^2 - 70t + 1225) - 750 + 4t^2 - 140t}{t^2}$$

$$= \frac{2t^2 - 3200}{t^2}$$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της C φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Q	∞	40	+∞
C'(Q)	+	0	-
C(Q)	$\searrow$	C(40)	$\nearrow$

Επομένως το εργοστάσιο πρέπει να λειτουργήσει 40 ώρες εβδομαδιαία.

- **4η λυμένη εφαρμογή**

Η αξία ενός αυτοκινήτου (σε ευρώ), t χρόνια μετά την αγορά του, δίνεται από τον τύπο:

$$f(t) = 14400 - 36t^2, \qquad 0 \leq t \leq 20.$$

- Να βρεθεί η αξία του αυτοκινήτου μετά από 5 χρόνια και μετά από 90 μήνες
- Να δειχθεί ότι η αξία του αυτοκινήτου μειώνεται συνεχώς
- Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της αξίας του αυτοκινήτου, δέκα χρόνια μετά την αγορά του.

Λύση:

Η αξία του αυτοκινήτου μετά από 5 χρόνια θα είναι:

$$f\,(5) = 14400 - 36 \cdot 25 = 14400 - 900 = 13500\,€$$

ενώ μετά από 90 μήνες θα είναι:

$$f\,(7.5) = 14400 - 36 \cdot 56.25 = 14400 - 2025 = 12375\,€.$$

Επειδή $f'(t) = 72t \quad 0 < t \leq 20$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [0, 20]. Επομένως η αξία του αυτοκινήτου μειώνεται συνεχώς.

Τέλος ο ρυθμός μεταβολής της αξίας του αυτοκινήτου, δέκα χρόνια μετά την αγορά του είναι:

$$f'(10) = -72 \cdot 10 = -720.$$

2.6 ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Τα πεδία ολοκλήρωσης συναρτήσεως φαίνονται στο παρακάτω Σχήμα 2.4:

Σχήμα 2.4: Πεδία ολοκλήρωσης συναρτήσεως.

Συγκεκριμένα (Κολέτσος, Γραμμικός Προγραμματισμός, 2017):

2.6.1 Αόριστο ολοκλήρωμα

Το αόριστο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης $f(x)$ πρόκειται για μία άλλη συνάρτηση $F(x)$ τέτοια ώστε η παράγωγος της $F(x)$ να είναι η $f(x)$.

Το αόριστο ολοκλήρωμα της $f(x)$ συμβολίζεται με $F(x) \;= \int f(x)dx$.

2.6.2 Παραγοντική ολοκλήρωση

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

2.6.3 Ο σταθερός όρος στο αόριστο ολοκλήρωμα

Παρατηρείται ότι η συνάρτηση του ολοκληρώματος περιλαμβάνει πάντα και έναν σταθερό όρο. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι αν η παράγωγος της $F(x)$ είναι η $f(x)$ δηλαδή $F'(x) \;= f(x)$ τότε και η παράγωγος της συνάρτησης $F(x) + C$ είναι επίσης η $f(x)$ καθώς $(F(x) + C)' \;= F'(x) \;+ C' \;= F'(x) \;+ 0 \;= f(x)$.

Σε προβλήματα εύρεσης του ολοκληρώματος (π.χ. όταν δίνεται η συνάρτηση του οριακού κόστους και ζητείται να βρεθεί η συνάρτηση του συνολικού κόστους) η τιμή της σταθεράς C προσδιορίζεται από κάποια άλλη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί η συνάρτηση.

2.6.4 Το ορισμένο ολοκλήρωμα

Το ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης $f(x)$ μεταξύ δύο σημείων a και b αποτελεί ένας αριθμός που μετρά το εμβαδόν της περιοχής που περιέχεται μεταξύ της καμπύλης της συνάρτησης, του άξονα των χ και των δύο κάθετων στον άξονα χ ευθειών $x \;= \alpha$ και $x \;= b$.

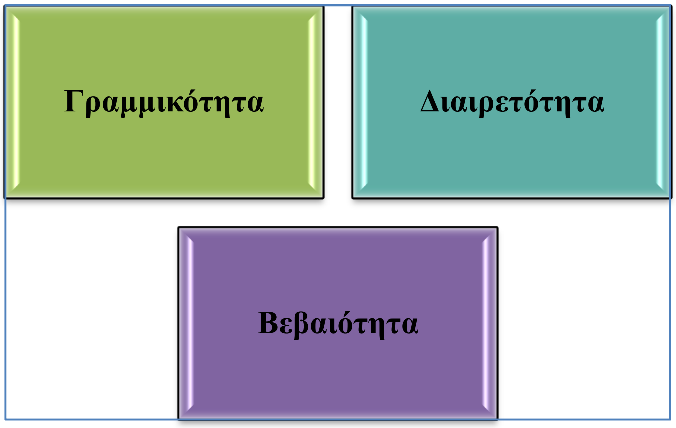
Το ορισμένο ολοκλήρωμα της f από $x \;= \alpha$ μέχρι $x \;= b$ συμβολίζεται με $\int_a^b \mathrm{f(x)\,dx}\,[\mathrm{F\,(x)}]_{\mathrm{x-a}}^{\mathrm{x-b}} = \mathrm{F(b) - F(a)}$ όπου F είναι το αόριστο ολοκλήρωμα της f, δηλαδή $F'(x) = f(x)$.

Για να υπολογιστεί το ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης $f(x)$ μεταξύ των σημείων a και b, βρίσκεται κατ’ αρχήν την συνάρτηση του αόριστου ολοκληρώματος $F(x)$.

Υπολογίζονται οι τιμές της συνάρτησης στα δύο άκρα και αφαιρείται η τιμή του κάτω άκρου από την τιμή του άνω άκρου. Το ορισμένο ολοκλήρωμα μπορεί να είναι ένας θετικός ή αρνητικός αριθμός (όταν η συνάρτηση βρίσκεται κάτω από τον άξονα των χ, παίρνει δηλαδή αρνητικές τιμές το αντίστοιχο εμβαδόν θεωρείται ότι έχει αρνητικό πρόσημο).

2.7 ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΕΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Εξετάζοντας κάποιες περιπτώσεις όπου μπορεί να εφαρμοστεί ο γραμμικός προγραμματισμός όπως και τη γενική διατύπωση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού, είναι σημαντικό να εξεταστούν οι απαιτούμενες προϋποθέσεις για την εφαρμογή του σε ένα οποιοδήποτε πρόβλημα βελτιστοποιήσεως. Αυτές περιορίζουν γενικά το φάσμα των δυνατοτήτων εφαρμογής του γραμμικού προγραμματισμού. Οι προϋποθέσεις που πρέπει να ισχύουν για να διατυπωθεί ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι οι: α) Γραμμικότητα β) Διαιρετότητα και γ) Βεβαιότητα (Σχήμα 2.5) (Κολέτσος, Γραμμικός Προγραμματισμός, 2017).



Σχήμα 2.5: Προϋποθέσεις εφαρμογής του γραμμικού προγραμματισμού.

Συγκεκριμένα (Κολέτσος, Γραμμικός Προγραμματισμός, 2017):

2.7.1 Γραμμικότητα

Όλες οι συναρτήσεις του προβλήματος, αντικειμενική συνάρτηση και περιορισμοί πρέπει να είναι γραμμικές ως προς τις άγνωστες μεταβλητές $x_1, x_2, \dots, x_r$. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να ισχύουν οι ιδιότητες της αναλογικότητας και της προσθετικότητας, δηλαδή εάν y είναι μια συνάρτηση r μεταβλητών και $a_1, a_2, \dots, a_r$ είναι σταθερές, τότε πρέπει να ισχύει:

$$y(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_rx_r) = a_1y(x_1) + a_2y(x_2) + \dots + a_ry(x_r)$$

Μια αρκετά καλή προσέγγιση με γραμμικές συναρτήσεις μπορεί να γίνει σε πολλές περιπτώσεις στις οποίες δεν ισχύει απόλυτα η προϋπόθεση της γραμμικότητας.

2.7.2 Διαιρετότητα

Για το μοντέλο του γραμμικού προγραμματισμού υποτίθεται ότι κάθε δραστηριότητα (δηλ μεταβλητή) πρέπει να είναι συνεχής και επομένως άπειρα διαιρετή. Αυτό συνεπάγεται ότι όλα τα επίπεδα δραστηριοτήτων και όλες οι χρήσεις πόρων μπορούν να πάρουν κλασματικές τιμές ή ακέραιες τιμές. Όταν η υπόθεση της διαιρετότητας δεν ισχύει υπάρχουν δύο ενδεχόμενα:

a) Αγνόηση της υπόθεσης αυτής, λύση του προβλήματος με μεθόδους γραμμικού προγραμματισμού, και στρογγυλοποίηση των τιμών των μεταβλητών στην κοντινότερη ακέραια μονάδα. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται κυρίως όταν οι τιμές των μεταβλητών είναι μεγάλες.
b) Χρήση τεχνικών του ακέραιου προγραμματισμού όταν οι τιμές των μεταβλητών είναι μικρές (π.χ. 0 ή 1), όπως σε πολλά προβλήματα επενδύσεων.

2.7.3 Βεβαιότητα

Το μοντέλο του γραμμικού προγραμματισμού προϋποθέτει ότι όλες οι παράμετροι του προβλήματος είναι γνωστές με απόλυτη βεβαιότητα.

Στην περίπτωση που μερικοί ή όλοι οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης ή των περιορισμών είναι τυχαίες μεταβλητές, τότε το πρόβλημα γίνεται πρόβλημα στοχαστικού προγραμματισμού.

3 ΚΕΦΑΛΑΙΟ: «ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ ΚΑΙ ΣΤΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟ»

3.1 ΓΕΝΙΚΑ

Η «επιστήμη που ασχολείται με τη βελτιστοποίηση -optimization- της απόδοσης ενός συστήματος» ορίζει την Επιχειρησιακή Έρευνα (Operations Research). Πιο συγκεκριμένα, «πρόκειται για ένα σύνολο από τεχνικές, οι οποίες χρησιμοποιώντας (μαθηματικά) μοντέλα, δημιουργούν μια ποσοτική και ορθολογιστική βάση για τη λήψη αποφάσεων που θα βελτιστοποιήσουν τη λειτουργία του υπό μελέτη συστήματος». Συχνά χαρακτηρίζεται και με τους όρους Διοικητική Επιστήμη (Management Science), Λήψη Διοικητικών Αποφάσεων (Decision Making), ή Ποσοτική Ανάλυση (Quantitative Analysis) (Τσάντας, 2007).

Δεν πρόκειται απλά για μια συλλογή τεχνικών, καθώς αποτελεί κυρίως την ενδεδειγμένη διαδικασία επιστημονικής προσέγγισης των προβλημάτων κατανομής των περιορισμένων πόρων που παρουσιάζονται σε συστήματα των φυσικών και κοινωνικών επιστημών. Γενικά, η Επιχειρησιακή Έρευνα συνεισφέρει (Bronson & Naadimuthu, 2010):

- υποστηρίζοντας τις αποφάσεις της διοίκησης ενός υπαρκτού συστήματος για κάποιο λειτουργικό πρόβλημα με τη δημιουργία ενός μαθηματικού – αναλυτικού μοντέλου ή, αν κάτι τέτοιο δεν είναι εφικτό, με ένα μοντέλο προσομοίωσης με το οποίο ο ηλεκτρονικός υπολογιστής να προσεγγίσει τη συμπεριφορά του συστήματος
- μελετώντας τη δομή των παραπάνω αποφάσεων για να είναι εφικτή η ανάπτυξη μιας διαδικασίας εύρεσής τους (επίλυση του μοντέλου)
- διατυπώνοντας τη μαθηματική θεωρία που οδηγεί στην απόφαση, η οποία βελτιστοποιεί τον προκριθέντα στόχο (κριτήριο επίδοσης του συστήματος), ή που συγκρίνει διαφορετικούς τρόπους ενεργειών αποτιμώντας ένα συγκεκριμένο κριτήριο επίδοσης.

Γενικά πλέον είναι παραδεκτό, ότι η Επιχειρησιακή Έρευνα μπορεί να αντιμετωπίσει επιτυχώς περίπλοκα και πολύπλοκα προβλήματα, πολλές φορές σε στοχαστικά περιβάλλοντα αβεβαιότητας. Με τη βοήθεια αναλυτικών τεχνικών αλλά και τεχνικών προσομοίωσης, διευκολύνεται η εις βάθος κατανόησή τους προκρίνοντας ταυτόχρονα πρακτικές επίλυσης.

3.2 ΙΣΤΟΡΙΚΉ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Η αρχή της Επιχειρησιακής Έρευνας ως επιστήμης προσδιορίζεται στη διάρκεια του Δευτέρου Παγκοσμίου Πολέμου, αν και τεχνικές - μοντέλα Επιχειρησιακής Έρευνας αναφέρονται από την αρχή του αιώνα. Υπήρχε άμεση ανάγκη εξαιτίας του πολέμου, για την αποτελεσματική κατανομή των λιγοστών πόρων στις διάφορες στρατιωτικές εξορμήσεις. Συνεπώς, αρχικά στην Αγγλία και κατόπιν στις ΗΠΑ, συγκροτήθηκαν ομάδες επιστημόνων για να πραγματοποιήσουν επιστημονικές έρευνες σε στρατιωτικές επιχειρήσεις, –research on (military) operations– (Τσάντας, 2007).

Οι πρωτοπόρες ομάδες επιχειρησιακών ερευνητών υπήρξαν τόσο θεαματικές και επιτυχείς, ώστε γρήγορα έγιναν ευρέως αποδεκτές, πολλαπλασιάστηκαν και ενεπλάκησαν με την επίλυση πάσης φύσεως στρατιωτικών προβλημάτων. Για παράδειγμα με την τοποθέτηση των ραντάρ στην Αγγλία, τον αντιαεροπορικό έλεγχο, τον προσδιορισμό του βέλτιστου μεγέθους των νηοπομπών, τον εντοπισμό και βομβαρδισμό των εχθρικών υποβρυχίων, κλπ.

Το τέλος του πολέμου ακολούθησε η βιομηχανική έκρηξη η οποία έφερε στην επιφάνεια πολύπλοκα προβλήματα διοίκησης, παραγωγής και εμπορίου προϊόντων, κλπ. Πολύ γρήγορα, πολλοί από τους επιστήμονες που συμμετείχαν στις στρατιωτικές ομάδες επιχειρησιακών ερευνητών και τώρα βρίσκονταν σε θέσεις κλειδιά στον ιδιωτικό ή τον ερευνητικό τομέα, ανακάλυψαν ότι τα νέα προβλήματα γενικά ήταν αυτά που είχαν αντιμετωπίσει και κατά τη διάρκεια του πολέμου, με τη διαφορά ότι το πεδίο εφαρμογής είχε αλλάξει. Μέχρι τα μέσα της δεκαετίας του 1950 τα άτομα αυτά καθιέρωσαν τη χρήση της Επιχειρησιακής Έρευνας σε επιχειρήσεις, βιομηχανίες και μεγάλους οργανισμούς –research on operations–.

Ακολούθως, από τη μια η γρήγορη ανάπτυξη νέων μεθοδολογιών (πολλά από τα πιο γνωστά εργαλεία της Επιχειρησιακής Έρευνας αναπτύχθηκαν πριν το 1960) και από την άλλη η εμφάνιση των ηλεκτρονικών υπολογιστών, οδήγησαν στη ραγδαία διάδοση της Επιχειρησιακής Έρευνας. Πλέον, δεν υπάρχει επιχείρηση, βιομηχανία, κρατική υπηρεσία και οργανισμός παροχής υπηρεσιών, ασχέτως μεγέθους, που να μην κάνει χρήση κάποιας/ων τεχνικής/κών Επιχειρησιακής Έρευνας (Τσάντας, 2007).

3.3 ΟΡΙΣΜΟΙ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Επειδή όλες οι μαθηματικές σχέσεις του προβλήματος είναι γραμμικές χρησιμοποιείται ο όρος γραμμικός. Γραμμική είναι η σχέση κατά την οποία, αν πολλαπλασιαστεί π.χ. ο αριθμός των υπαλλήλων (ή των μηχανών) μιας επιχείρησης με έναν αριθμό, η παραγωγή των αγαθών της επιχείρησης θα πολλαπλασιασθεί με τον αριθμό αυτό. Η παράσταση με γεωμετρικό τρόπο των παραπάνω γραμμικών σχέσεων εμφανίζει ευθείες γραμμές.

Στην Επιχειρησιακή Έρευνα, ο όρος προγραμματισμός όπως χρησιμοποιείται, δεν πρέπει να συγχέεται με τον προγραμματισμό ηλεκτρονικών υπολογιστών. Ο όρος προγραμματισμός στην ποσοτική ανάλυση και στο επιστημονικό management, περιλαμβάνει την ανάπτυξη και την επίλυση διάφορων επιχειρησιακών προβλημάτων μέσω μαθηματικών μοντέλων. Πάντως είναι πολύ σπουδαίος ο ρόλος του ηλεκτρονικού υπολογιστή στην επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού αλλά και γενικότερα στην επίλυση προβλημάτων με τις μεθοδολογίες της Επιχειρησιακής Έρευνας. Στην πράξη πολλά από τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού που προκύπτουν, είναι τόσο πολύπλοκα ώστε η επίλυσή τους γίνεται μόνο μέσω ειδικών προγραμμάτων ηλεκτρονικού υπολογιστή.

Κάθε επιχειρηματική δραστηριότητα απαιτεί για την υλοποίησή της λίγους ή περισσότερους πόρους, ανεξάρτητα από τον απαιτούμενο όγκο εργασίας ή από τη σπουδαιότητά της. Ανάλογα με τη φύση και τις ιδιαιτερότητες των δραστηριοτήτων των οποίων την πραγματοποίηση εξυπηρετούν, αυτοί οι πόροι μπορούν να είναι πολλών ειδών. Σε έναν οργανισμό ή σε μία επιχείρηση πολλές αποφάσεις που λαμβάνονται, αφορούν την αποτελεσματική αξιοποίηση και χρήση των πόρων της επιχείρησης. Ο μηχανικός εξοπλισμός της επιχείρησης, οι εργαζόμενοι, τα επενδεδυμένα κεφάλαια και τα κεφάλαια κίνησης, οι διαθέσιμοι χώροι της επιχείρησης, οι πρώτες ύλες και άλλα νοούνται ως πόροι μιας επιχείρησης. Οι πόροι της επιχείρησης μπορούν να διατεθούν για την παραγωγή των προϊόντων (όπως οι πρώτες ύλες και ο εξοπλισμός) ή υπηρεσιών (όπως ο χρόνος των εργαζομένων), τη διάθεση και διανομή των προϊόντων, τη διαφήμιση και διάφορες επενδυτικές αποφάσεις της επιχείρησης (π.χ. κεφάλαια).

Οι κάθε είδους πόροι είναι περιορισμένοι εξαιτίας των σύγχρονων εξαιρετικά ανταγωνιστικών συνθηκών, της πολυπλοκότητας των περισσότερων επιχειρηματικών κινήσεων, των συνεχώς αυξανόμενων αναγκών και της πρόνοιας της ίδιας της φύσης. Η διαπίστωση ότι πολλά από τα μέσα είναι διαθέσιμα σε περιορισμένο βαθμό έρχεται πριν καν υλοποιηθεί ένα επιχειρησιακό σχέδιο. Για το λόγο αυτό το πρόβλημα της ορθολογικής διαχείρισής τους, προκειμένου να επιτευχθεί το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα, κρίνεται ουσιώδες (Δινοπούλου & Χιωτίδης, 2012), (Μπότσαρης, Επιχειρησιακή έρευνα, 2011).

3.4 ΛΗΨΗ ΒΕΛΤΙΣΤΩΝ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

Η λέξη σύστημα χρησιμοποιείται καθημερινά. Σύμφωνα με το λεξικό του Webster (New World Dictionary) σύστημα είναι «ένα σύνολο από τοποθετήσεις αντικειμένων και υποκειμένων τα οποία σχετίζονται κατά τέτοιο τρόπο ώστε να αποτελούν μία ολότητα». Όλοι οι άνθρωποι είναι μέλη πολλών και διάφορων συστημάτων, της οικογένειας, του πανεπιστημίου, της κοινωνίας κ.ά.. Σε όλες τις επιστήμες, κοινωνικές, φυσικές, βιολογικές, κλπ συναντιέται η έννοια του συστήματος.

Με τη λέξη σύστημα στην Επιχειρησιακή Έρευνα γίνεται αναφορά σε όλου του είδους τις επιχειρήσεις, βιομηχανίες, κρατικές υπηρεσίες, οργανισμούς παροχής υπηρεσιών, κλπ. Η χρήση του κατάλληλου για την κάθε περίπτωση μαθηματικού μοντέλου, «μιας αναπαράστασης του συστήματος στην οποία, οι σημαντικές μεταξύ των πραγματικών χαρακτηριστικών σχέσεις, έχουν αντικατασταθεί με παρόμοιες σχέσεις μεταξύ μαθηματικών στοιχείων, ενώ οι μη-σημαντικές έχουν αγνοηθεί» είναι η επιστημονική πρακτική για τη μελέτη ενός συστήματος και την αντιμετώπιση προβλημάτων προερχόμενα από τις όποιες λειτουργικές περιοχές του. Το μοντέλο δεν απεικονίζει με ακρίβεια κάθε πτυχή της λειτουργίας του συστήματος καθώς ούτε είναι εφικτό, ούτε είναι ο στόχος. Η ύπαρξη ισομορφίας με όλες τις σημαντικές για το προς μελέτη πρόβλημα πλευρές αποτελεί τη θεμελιώδη επιδίωξη της διατύπωσής του. Σε ένα ακριβές μοντέλο αναπαριστώνται ικανοποιητικά όλα τα στοιχεία τα οποία θεωρητικά είναι απαραίτητα για τη λήψη «κάποιας» απόφασης για την επίλυση του προβλήματος, ενώ δεν περιέχει άσχετες με αυτό λεπτομέρειες ή υποθέσεις (Τσάντας, 2007; Μπότσαρης, Επιχειρησιακή έρευνα, 2011).

Η διαδικασία λήψης αποφάσεων για την αντιμετώπιση -λύση- κάποιου προβλήματος δίνεται στην Εικόνα 3.1. Γενικά, αποτελείται από δύο στάδια, την προετοιμασία και την ανάλυση. Συγκεκριμένα, η προετοιμασία περιλαμβάνει τρία βήματα της διαδικασίας:

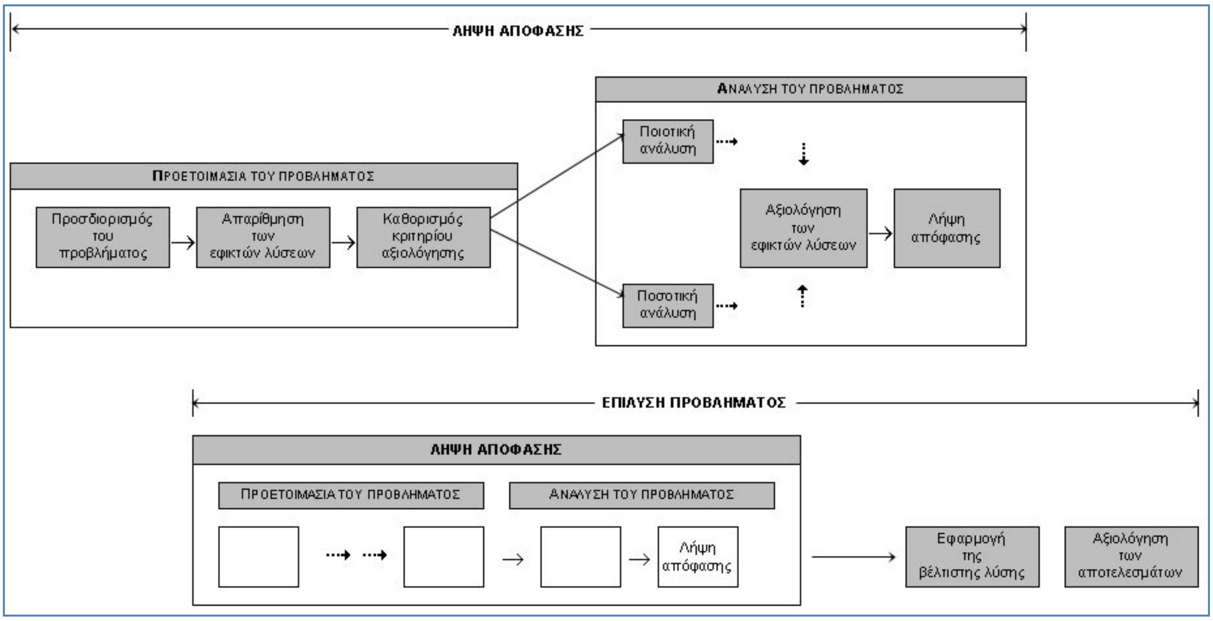
- την αναγνώριση και το σαφή προσδιορισμό του προβλήματος,
- την απαρίθμηση των εφικτών (εναλλακτικών) λύσεών του, και
- τον καθορισμό κριτηρίου/ρίων αξιολόγησής τους,

ενώ ο όρος ανάλυση, δύο:

- την αξιολόγηση των εφικτών λύσεων με βάση το/τα κριτήριο/ρια, και
- την επιλογή της βέλτιστης λύσης (λήψη απόφασης).

Βέβαια για τη λύση του προβλήματος θα πρέπει στη συνέχεια να υπάρξει:

- ✓ εφαρμογή της βέλτιστης λύσης, και
- ✓ αξιολόγηση των αποτελεσμάτων της.



Εικόνα 3.1: Μεθοδολογία αντιμετώπισης (επίλυση) ενός προβλήματος.

Πηγή: (Τσάντας, 2007).

Στην «αξιολόγηση των εφικτών λύσεων», δηλαδή στο στάδιο της ανάλυσης υπάρχουν τόσο ποιοτικοί όσο και ποσοτικοί παράγοντες (Εικόνα 3.1). Η ποιοτική ανάλυση εστιάζει στην εμπειρία και τη διαίσθηση των μελών του συστήματος, και χρησιμοποιείται (κυρίως) σε περιπτώσεις που χαρακτηρίζονται ως προφανείς ή έχουν προκύψει και κατά το παρελθόν. Ωστόσο, τις πιο πολλές φορές τα προβλήματα είναι ιδιαίτερα περίπλοκα και στην επίλυσή τους μπορεί να οδηγήσει μόνον η ποσοτικοποίηση όλων των εμπλεκομένων παραμέτρων τους. Ο μοναδικός επιστημονικά παραδεκτός τρόπος επίτευξης της ζητούμενης ποσοτικοποίησης είναι η διατύπωση ενός μαθηματικού μοντέλου που αναπαριστά ικανοποιητικά όλες τις πτυχές του προβλήματος. Συνεπώς, οι συνθήκες λειτουργίας του συστήματος (οι οποίες προσδιορίζουν το σύνολο των εφικτών λύσεων του προβλήματος που μελετάται), αλλά και το κριτήριο αξιολόγησής τους (η βελτιστοποίηση του οποίου θα προκρίνει κάποια από αυτές ως «τη λύση») μετατρέπονται σε μαθηματικές και/ή λογικές σχέσεις και σύμβολα. Άρα, η μορφή ενός μαθηματικού μοντέλου το οποίο προσεγγίζει μέσω της Επιχειρησιακής Έρευνας -μαθηματικό μοντέλο βελτιστοποίησης- κάποιο πρόβλημα, τυπικά έχει την εξής οργάνωση (Τσάντας, 2007):

3.4.1 Βελτιστοποίηση κριτηρίου (Maximize ή Minimize)

Η βελτιστοποίηση της λειτουργίας του συστήματος είναι ο βασικός λόγος για τον οποίο κατασκευάζεται ένα μαθηματικό μοντέλο του, ωστόσο με τη χρήση του επιδιώκεται παράλληλα (Τσάντας, 2007):

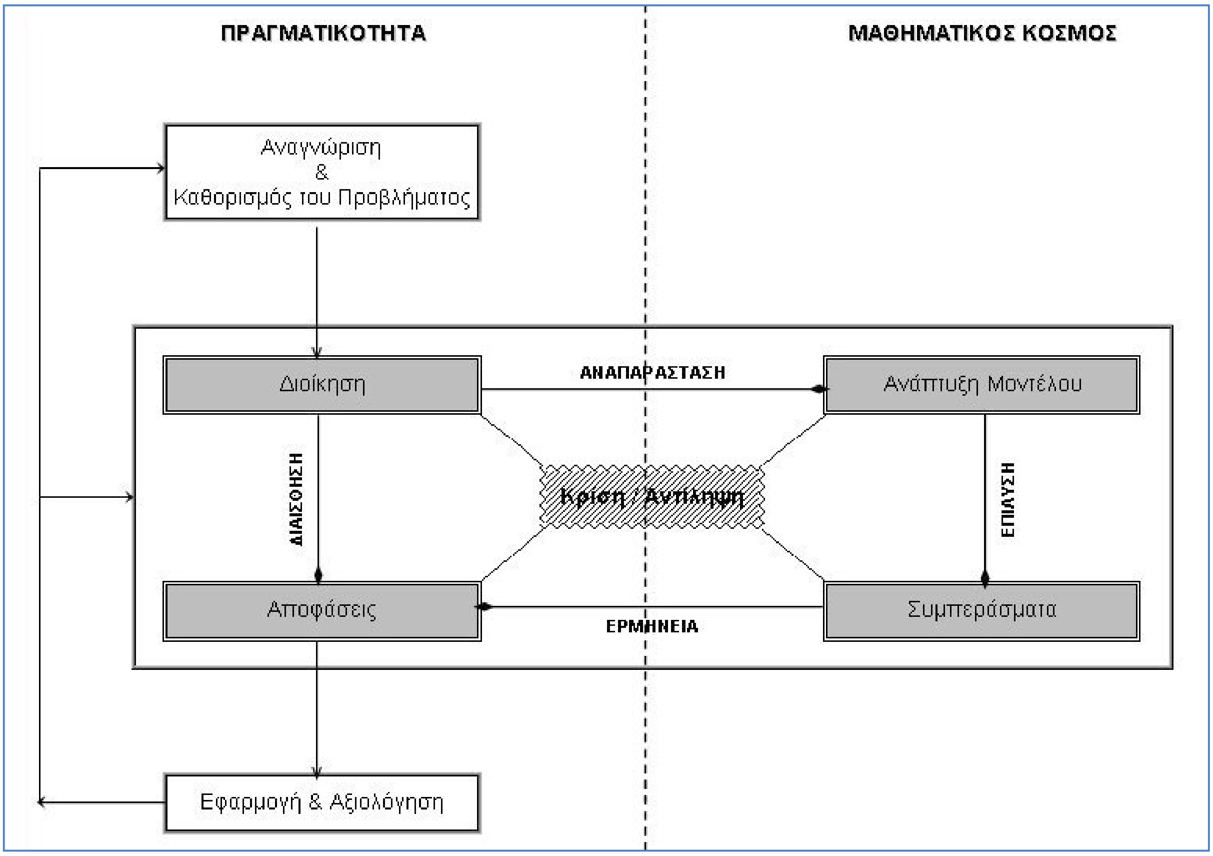
- Η περιγραφή του συστήματος και η εμβάθυνση στις διάφορες πτυχές του,
- Η πρόβλεψη της μελλοντικής συμπεριφοράς του,
- Ο ορισμός δεικτών λειτουργικότητας των επί μέρους τμημάτων του,
- Η εκτεταμένη μελέτη της συμπεριφοράς του συστήματος κάτω από διαφορετικές υποθετικές συνθήκες λειτουργίας (what-if analysis),
- Η εύρεση λύσεων σε διάφορα ζητήματα – προβλήματα,
- Η αποφυγή της εμφάνισης προβληματικών καταστάσεων στο σύστημα προειδοποιώντας έγκαιρα για την εμφάνισή τους,

- Η συνδρομή στον σχεδιασμό καλύτερων (ανάλογων) συστημάτων ή η βελτίωση των υπαρχόντων.

3.4.2 Διατύπωση Μαθηματικού Μοντέλου Βελτιστοποίησης

Η Επιχειρησιακή Έρευνα στοχεύει στην πρόταση μιας σειράς διαδοχικών βημάτων τα οποία θα διατυπώνουν ένα ποσοτικό πρότυπο, του μαθηματικού -συμβολικού κόσμου, που να αναπαριστά τον πραγματικό - καθημερινό κόσμο που πρέπει να αντιμετωπιστεί (Τσάντας, 2007):

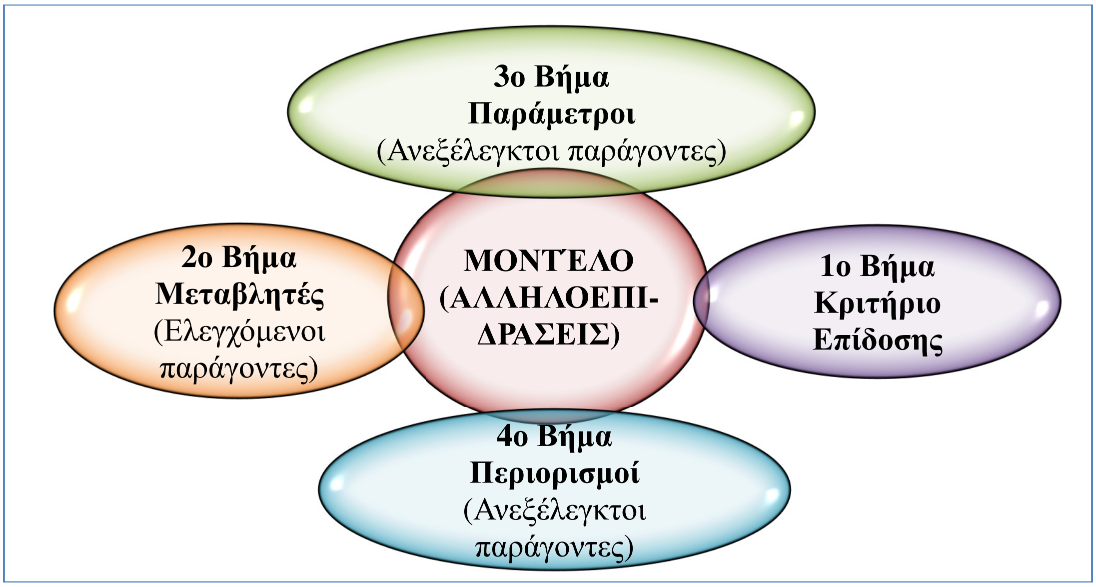
1. **Αναγνώριση του προβλήματος και συλλογή των δεδομένων**: Ο ορισμός του προβλήματος σχετίζεται με τη μελέτη του συστήματος, με την οποία επιδιώκεται η καταγραφή μιας λεπτομερούς διατύπωσης του υπάρχοντος προβλήματος (παράλληλα με την παραδοχή της ύπαρξής του). Στη φάση αυτή, προσδιορίζονται οι σημαντικές συνιστώσες του προβλήματος, καθορίζονται οι επιθυμητοί στόχοι, εντοπίζονται οι περιορισμοί που επιβάλλονται από τη λειτουργία του συστήματος, συγκεντρώνονται τα απαραίτητα για την ποσοτικοποίηση των στόχων και περιορισμών δεδομένα και γίνεται έλεγχος της αξιοπιστίας τους.
2. **Κατασκευή του σχετικού με το εξεταζόμενο πρόβλημα μοντέλου**: Η ανάπτυξη του μοντέλου έχει ως στόχο τη μετατροπή όλων των βασικών συνιστωσών του προβλήματος, όπως αυτές διατυπώθηκαν και προσδιορίστηκαν στο προηγούμενο βήμα, σε μαθηματικές και/ή λογικές σχέσεις. Αυτό θα συμβεί με το να αγνοηθούν (αρχικά) οι λειτουργικές λεπτομέρειες του μοντέλου -μαύρο κουτί- και να στραφεί η προσοχή στον προσδιορισμό της εισόδου και της εξόδου από αυτό. Οι παράμετροι, οι μεταβλητές απόφασης και οι περιορισμοί τους οποίους θα πρέπει να ικανοποιούν καταγράφονται ως είσοδος, ενώ το κριτήριο αξιολόγησης – επίδοσης καταγράφεται ως έξοδος (Εικόνα 3.2).
    - **a.** Η μαθηματική αναπαράσταση του κριτηρίου επίδοσης είναι η συνάρτηση των μεταβλητών απόφασης με τη βελτιστοποίησή του να αποτελεί το στόχο που πρέπει να επιτευχθεί, όπως αυτός καθορίστηκε στο προηγούμενο βήμα της υπό συζήτηση διαδικασίας.
    - **b.** Οι τιμές των μεταβλητών απόφασης αποτελούν την ποσοτική έκφραση της απόφασης που πρέπει να ληφθεί. Πρόκειται για τα δομικά στοιχεία του προβλήματος των οποίων οι επιβαλλόμενες από το μελετητή τιμές προσδιορίζουν τη συμπεριφορά του κριτηρίου επίδοσης. Συνεπώς, το αντικείμενο της ζητούμενης απόφασης είναι ο καθορισμός των τιμών με τις οποίες βελτιστοποιείται (maximize ή minimize) η αντικειμενική συνάρτηση.
    - **c.** Παράμετροι είναι μετρήσιμα στοιχεία των οποίων οι τιμές παραμένουν (γνωστές) σταθερές, και καθορίζονται από εξωγενείς ως προς το εξεταζόμενο πρόβλημα παράγοντες, σε όλη τη διάρκεια της επίλυσής του.
    - **d.** Ο προκαθορισμένος στόχος πρέπει να επιτευχθεί κάτω από τις συνθήκες λειτουργίας του συστήματος οι οποίες επιβάλλουν περιορισμούς στις τιμές που μπορούν να αποδοθούν στις μεταβλητές απόφασης.



Εικόνα 3.2: Η προσέγγιση της Επιχειρησιακής Έρευνας στην αντιμετώπιση (επίλυση) ενός προβλήματος.

Πηγή: (Τσάντας, 2007).

Ας υποτεθεί ότι υπάρχει ένα πρόβλημα μείγματος προϊόντων όπου ένα σύστημα, το οποίο εκμεταλλεύεται τους πόρους που έχει στη διάθεσή του παράγει μια σειρά προϊόντων. Οι ποσότητες που πρέπει να παράγονται από κάθε προϊόν, για να μεγιστοποιούνται τα συνολικά κέρδη (βελτιστοποίηση του τεθέντος κριτηρίου επίδοσης) κάτω από περιορισμούς όπως οι διαθέσιμες ποσότητες των απαιτουμένων πρώτων υλών, η ζήτηση της αγοράς, η χωρητικότητα των αποθηκευτικών χώρων, κλπ είναι οι μεταβλητές απόφασης. Το ζητούμενο μαθηματικό μοντέλο βελτιστοποίησης σχηματίζεται από όλες τις λογικές και μαθηματικές συναρτήσεις οι οποίες αναπαριστούν τις διαπλεκόμενες σχέσεις αίτιου και αποτελέσματος που υπάρχουν μεταξύ των ανωτέρω παραγόντων (Εικόνα 3.3). Οι μεταβλητές απόφασης πρέπει οπωσδήποτε να υπάρχουν σε ένα μοντέλο βελτιστοποίησης, ενώ διατυπώνονται μοντέλα χωρίς αντικειμενική συνάρτηση (σπανιότατα), αλλά και μοντέλα χωρίς περιορισμούς (unconstrained optimization) (Μπότσαρης, Επιχειρησιακή έρευνα, 2011), (Τσάντας, 2007).



Εικόνα 3.3: Το μαθηματικό μοντέλο βελτιστοποίησης (είσοδοι – έξοδοι).

Πηγή: (Μπότσαρης, Επιχειρησιακή έρευνα, 2011).

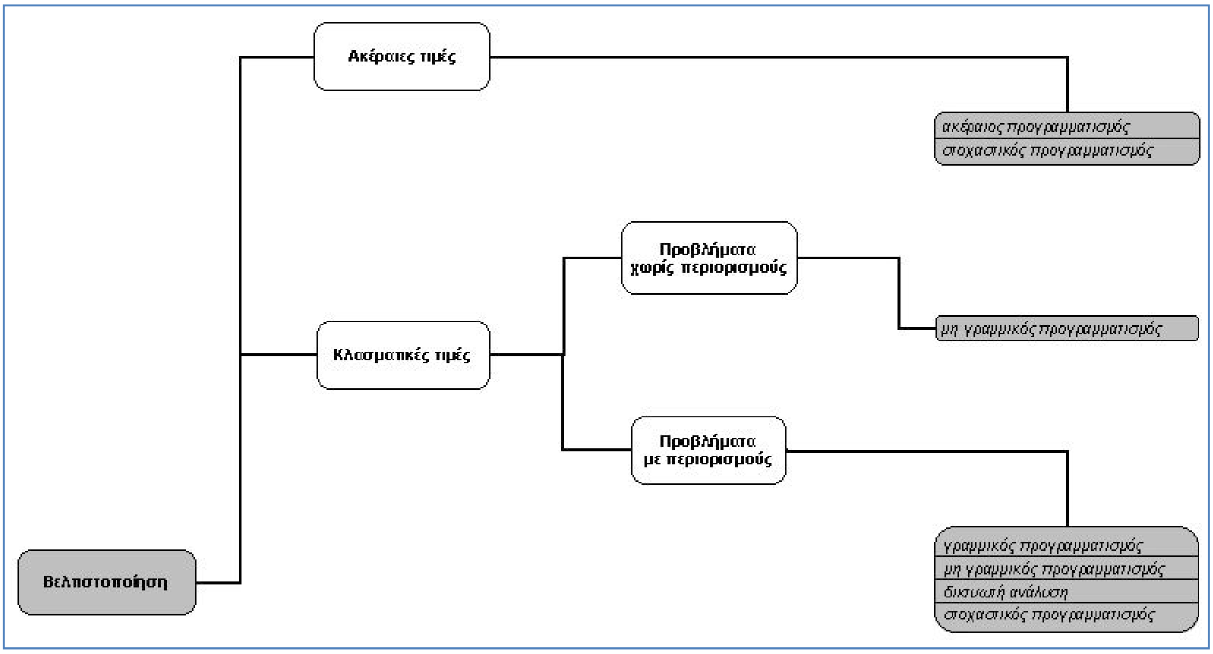
3. **Επίλυση του προτεινόμενου μοντέλου:** αφού οργανωθεί το πρόβλημα, η συλλογή των δεδομένων και ο ορισμός της εισόδου/εξόδου του μοντέλου που προκρίθηκε, γίνεται προσπάθεια εντοπισμού της βέλτιστης λύσης του. Δηλαδή ο προσδιορισμός εκείνων των τιμών των μεταβλητών απόφασης οι οποίες, ικανοποιώντας τους λειτουργικούς περιορισμούς του συστήματος, θα βελτιστοποιήσουν το κριτήριο επίδοσης. Στο σημείο αυτό ο μελετητής θα πρέπει να μπορεί να ταυτοποιήσει το διατυπωθέν μοντέλο με κάποιο από τα γνωστά – θεμελιωμένα μοντέλα της Επιχειρησιακής Έρευνας. Το ευκολότερο μέρος της όλης διαδικασίας είναι η επίλυση τέτοιων μοντέλων καθώς γίνεται με τη χρήση τεκμηριωμένων αλγορίθμων, ενσωματωμένων σε κάποιο κατάλληλο λογισμικό. Η λύση πρέπει πάντοτε να συνοδεύεται από ανάλυση ευαισθησίας (sensitivity analysis). Με την ανάλυση ευαισθησίας εντοπίζονται οι παράμετροι του προβλήματος που είναι κρίσιμες για τη λύση (μεταβολή των τιμών τους συνεπάγεται και μεταβολή της λύσης).
4. **Εφαρμογή και αξιολόγηση της προτεινόμενης λύσης**: Με την εφαρμογή και αξιολόγηση της προτεινόμενης λύσης επιχειρείται ο προσεκτικός έλεγχος της λύσης για να διαπιστωθεί αν οι τιμές της έχουν νόημα και μπορούν να εφαρμοστούν. Οι συνήθεις λόγοι που οδηγούν στην ύπαρξη μιας μη-παραδεκτής λύσης είναι συνιστώσες του προβλήματος που παραβλέφθηκαν ή υπέρ-απλουστεύθηκαν και δεδομένα που εκτιμήθηκαν λάθος. Όταν συμβεί αυτό το μοντέλο θα πρέπει να αναθεωρηθεί κι ολόκληρη η διαδικασία να επαναληφθεί εκ νέου. Σε ένα μαθηματικό μοντέλο βελτιστοποίησης, που θεωρείται μια συμβολική αναπαράσταση του πραγματικού κόσμου, καταγράφονται μόνο τα κύρια στοιχεία του (είναι ανέφικτο να επιχειρηθεί η συμμετοχή όλων των πτυχών του). Άρα, η επίλυση του μοντέλου που θα διατυπωθεί, οδηγεί σε προτάσεις οι οποίες απορρέουν αποκλειστικά από αυτό, δηλαδή δε λαμβάνεται υπόψη ο βαθμός απλοποίησης που έχει κι ούτε φυσικά η επιλογή των βασικών παραμέτρων που έχει γίνει. Τα αποτελέσματα του μοντέλου σε αυτό το τελικό στάδιο, ερμηνεύονται κάτω από τις συνθήκες του πραγματικού κόσμου, ενσωματώνοντας δηλαδή ότι παραλήφθηκε στη φάση της κατασκευής του. Με τη διαδικασία αυτή, επαυξημένη με τη διαίσθηση και εμπειρία της διοίκησης (Εικόνα 3.2), εξασφαλίζονται σωστότερες και καλύτερες αποφάσεις.

3.5 ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Οι έννοιες μαθηματικό μοντέλο βελτιστοποίησης και προσδιοριστικό μοντέλο συνήθως ταυτίζονται. Στο προσδιοριστικό περιβάλλον μοντελοποίησης, είναι γνωστές με κάποια βεβαιότητα οι επιπτώσεις όλων των εναλλακτικών αποφάσεων. Στο γεγονός αυτό οδηγεί η παραδοχή ότι όλες οι πληροφορίες που είναι απαραίτητες για την εύρεση και αξιολόγηση των λύσεων του εξεταζόμενου προβλήματος είναι γνωστές με βεβαιότητα.

Βέβαια, αποφάσεις μπορούν να ληφθούν και σε περιβάλλον αβεβαιότητας, η οποία μπορεί να υπάρχει εκεί εκ κατασκευής ή να έχει προκύψει από έλλειψη πληροφοριών και μη προβλέψιμες μεταβολές. Επίσης, το αποτέλεσμα του προσδιοριστικού περιβάλλοντος που παράγεται, κρίνει το κατά πόσο μια απόφαση είναι «καλή». Στην αντίθετη περίπτωση, στο στοχαστικό περιβάλλον της αβεβαιότητας όπου η πιθανότητα υποκαθιστά την πλήρη πληροφόρηση, το ενδιαφέρον στρέφεται πέραν του αποτελέσματος και στην πιθανότητα πραγματοποίησής του.

Η ανάγκη δημιουργίας ενός νέου προτύπου προκύπτει όταν κανένα από τα γνωστά πρότυπα δε συμβάλλει στη λύση του προβλήματος. Για την κατασκευή ενός νέου μοντέλου και της λύσης του, εκτός από βαθιά γνώση των μαθηματικών, θα πρέπει τουλάχιστον να έχει κατανοηθεί σε μεγάλο βαθμό η δημιουργία των υπαρχόντων μοντέλων (Τσάντας, 2007).



Εικόνα 3.4: Ταξινομημένη παρουσίαση των πιο γνωστών προσδιοριστικών αλγορίθμων (μαθηματικών μοντέλων βελτιστοποίησης[19].

Πηγή: (Τσάντας, 2007).

Η παρουσίαση των διάφορων υπαρχόντων προτύπων σε μορφή «συνταγών μαγειρικής» είναι σοβαρό λάθος για αυτόν ακριβώς το λόγο. Σε σωρεία κακών εφαρμογών της Επιχειρησιακής Έρευνας (σε αναλογία με το αντίστοιχο φαινόμενο της Στατιστικής) έχει οδηγήσει η τακτική αυτή, συνοδευόμενη από την τυφλή χρήση των λογισμικών.

[19]Βασισμένο στο περιεχόμενο ενός δικτυακού τόπου.

Όμως εκτός από τη θεωρητική κατάρτιση κι άποψη, για τη σωστή εφαρμογή των μεθόδων της Επιχειρησιακής Έρευνας απαιτείται κι ένας δείκτης ευφυΐας και αντίληψης. Αυτό αποδεικνύεται από τη γνωστή ιστορία με τίτλο «το πρόβλημα του ανελκυστήρα». Σε ένα ψηλό κτίριο με γραφεία, ο κόσμος παραπονιόταν στη διοίκηση επειδή οι ανελκυστήρες καθυστερούσαν απελπιστικά. Η μελέτη όμως μιας ομάδας επιχειρησιακών ερευνητών απέδειξε ότι οι μέσοι χρόνοι αναμονής για την έλευση του ανελκυστήρα, όπως και οι αναμενόμενοι χρόνοι αναμονής από τη στιγμή εισόδου στο κτίριο μέχρι την άφιξη του επισκέπτη στον προορισμό του ήταν παραδεκτοί. Επιπλέον μελέτη, υπέδειξε ότι το όλο πρόβλημα ήταν καθαρά πρόβλημα ανυπομονησίας και ανίας και τίποτε περισσότερο. Τα παράπονα σταμάτησαν, όταν τοποθετήθηκαν μεγάλοι καθρέπτες σε όλους τους ορόφους γύρω από τους ανελκυστήρες. Το αποτέλεσμα ήταν οι επισκέπτες να απασχολούνται παρατηρώντας τους εαυτούς τους και τους άλλους καθώς περίμεναν την έλευση του ανελκυστήρα (Τσάντας, 2007).

3.6 ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

3.6.1 Γενικά

Με το Γραμμικό Προγραμματισμό επιτρέπεται η κατανομή των περιορισμένων πόρων μιας επιχείρησης με τον πιο αποτελεσματικό τρόπο. Οι περιορισμοί μπορεί να έχουν σχέση με το διαθέσιμο προσωπικό, τις διαθέσιμες ώρες των μηχανημάτων, τα κεφάλαια μιας επιχείρησης, τις αποθήκες, τις πρώτες ύλες κ.τ.λ. Η κατανομή των πόρων μπορεί να έχει σχέση με την παραγωγή διαφορετικών προϊόντων, το πρόγραμμα παραγωγής, την επιλογή επενδυτικών σχεδίων, το κόστος παραγωγής κ.τ.λ. Με τη συγκεκριμένη μεθοδολογία λύνονται προβλήματα που έχουν σκοπό τη μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση μιας γραμμικής συνάρτησης που υπόκειται σε περιορισμούς υπό μορφή γραμμικών ανισοτήτων (Ζησιμόπουλος, 2007).

Αρχικά για την εφαρμογή της μεθόδου Γραμμικού Προγραμματισμού είναι απαραίτητη η δημιουργία μαθηματικής διατύπωσης του συγκεκριμένου επιχειρησιακού προβλήματος. Ανάλογα με τη φύση του προβλήματος η διατύπωση αυτή μπορεί να είναι αρκετά πολύπλοκη.

Κάθε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού συσχετίζεται με ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού που ονομάζεται δυϊκό (dual). Αν η αρχική διατύπωση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού ονομαστεί σαν αρχικό πρόβλημα (primal), τότε το αρχικό μπορεί να μετατραπεί στο αντίστοιχό του δυϊκό (dual). Μεταξύ αρχικού-δυϊκού μία βασική ιδιότητα είναι ότι η βέλτιστη λύση στο ένα συνεπάγεται βέλτιστη λύση στο άλλο. Στη συνέχεια αναφέρεται η κανονική μορφή (canonical form) ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού.

Ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης (maximization) είναι σε κανονική μορφή αν όλοι οι περιορισμοί του είναι του τύπου $\leq$ και οι μεταβλητές του μη αρνητικές ($\chi_i \geq 0$).

Ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης (minimization) είναι σε κανονική μορφή αν όλοι οι περιορισμοί του είναι του τύπου $\geq$ και οι μεταβλητές του μη θετικές ($\chi_i \leq 0$).

Για την μετατροπή ενός αρχικού προβλήματος στο αντίστοιχό του δυϊκό θα πρέπει το αρχικό να είναι σε κανονική μορφή.

3.6.2 Μεθοδολογία γραμμικού προγραμματισμού

Το σύνολο των υπολογιστικών τεχνικών που προσδιορίζουν το μέγιστο ή το ελάχιστο μιας γραμμικής συνάρτησης της οποίας οι μεταβλητές απαιτείται να ικανοποιούν ένα σύστημα γραμμικών ανισοεξισώσεων ονομάζεται γραμμικός προγραμματισμός (linear programming). Στον τρόπο αξιοποίησης των διαθέσιμων πόρων ενός συστήματος αναφέρονται τέτοιας μορφής προβλήματα έτσι ώστε οι απαιτήσεις του συστήματος να ικανοποιούνται και η απόδοσή του να βελτιστοποιείται.

Το σύνολο αλληλεπιδρώντων στοιχείων, τα οποία συνεργάζονται μεταξύ τους για την επίτευξη κάποιου κοινού σκοπού καλείται σύστημα (system). Οι κανόνες που διέπουν τη λειτουργία του συστήματος είναι οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των δομικών στοιχείων του. Όσον αφορά το βέλτιστο τρόπο λειτουργίας ή τη βέλτιστη δομή ενός συστήματος, η λήψη αποφάσεων (decision making) δεν γίνεται με αυτό το ίδιο το σύστημα, αλλά με ένα μοντέλο του (model). Δηλαδή με μια αναπαράσταση του πραγματικού συστήματος, η οποία πρέπει να το απεικονίζει όσο το δυνατόν πιο πιστά.

Για να εφαρμοστεί ο γραμμικός και γενικότερα ο μαθηματικός προγραμματισμός για τη βελτιστοποίηση της λειτουργίας ή της δομής ενός συστήματος, προϋποτίθεται η περιγραφή του με ένα μαθηματικό μοντέλο (mathematical model). Η μοντελοποίηση του συστήματος με ένα μαθηματικό μοντέλο επιτυγχάνεται με μαθηματικές σχέσεις, οι οποίες περιγράφουν τόσο τη δομή του όσο και τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των δομικών στοιχείων του συστήματος.

Στη βελτιστοποίηση (optimization) μιας συνάρτησης, της οποίας οι μεταβλητές απαιτείται να ικανοποιούν ένα σύστημα ανισοεξισώσεων οδηγεί συχνά η μαθηματική μοντελοποίηση ενός συστήματος. Η μαθηματική μοντελοποίηση του συστήματος της συνάρτησης αναζητεί το μέγιστο ή το ελάχιστο, περιγράφοντας ένα κριτήριο ή μέτρο απόδοσης του συστήματος. Οι φυσικοί περιορισμοί στους οποίους υπόκειται το σύστημα αντιπροσωπεύονται από τις ανισοεξισώσεις του μοντέλου. Μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού υφίσταται όταν η προς βελτιστοποίηση συνάρτηση και οι ανισοεξισώσεις του μοντέλου είναι γραμμικές ως προς τις μεταβλητές, οι οποίες εκφράζουν τις αποφάσεις που πρόκειται να ληφθούν.

Ήδη από 1826 με τον Fourier είχε ξεκινήσει η μελέτη των γραμμικών ανισώσεων οι οποίες έχουν τις ρίζες τους στη μεθοδολογία του γραμμικού προγραμματισμού. Ωστόσο, τα θεωρητικά μοντέλα οικονομικής ισορροπίας και βέλτιστης κατανομής πόρων, τα οποία αναπτύχθηκαν κατά τη δεκαετία του 1930 αποτέλεσαν τη βάση του γραμμικού προγραμματισμού. Το γραμμικό μοντέλο μιας αναπτυσσόμενης οικονομίας του von Neumann (1935-1936) και το μοντέλο εισροών-εκροών (input-output model) του Leontief (1951), το οποίο περιγράφει τις σχέσεις αλληλεξάρτησης μεταξύ των παραγωγικών κλάδων μιας οικονομίας κατέχουν προέχουσα θέση.

Το 1973 απονεμήθηκε στον Leontief το Βραβείο Νόμπελ Οικονομίας καθώς το μοντέλο εισροών-εκροών έτυχε σημαντικής θεωρητικής ανάπτυξης και εφαρμογής σε πολλά προβλήματα οικονομικού προγραμματισμού. Βέβαια, το μοντέλο του Leontief δεν απαιτούσε τη βελτιστοποίηση κάποιας συνάρτησης, αλλά μόνο την επίλυση ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων. Ωστόσο, στον Dantzig (1951) οφείλεται η σημερινή μορφή του μοντέλου του γραμμικού προγραμματισμού, καθώς και η βασική τεχνική για την επίλυση γραμμικών προβλημάτων βελτιστοποίησης, η μέθοδος simplex, (Μπότσαρης, Τσάντας, & Γεωργίου, 2006).

3.6.3 Προϋποθέσεις εφαρμογής του γραμμικού προγραμματισμού

Εκτός από την εξέταση κάποιων περιπτώσεων όπου είναι δυνατό να εφαρμοστεί ο γραμμικός προγραμματισμός και τη γενική διατύπωση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού είναι σημαντικό να εξεταστούν οι απαιτούμενες προϋποθέσεις για την εφαρμογή του σε ένα οποιοδήποτε πρόβλημα βελτιστοποίησης. Από αυτές περιορίζεται το φάσμα των δυνατοτήτων εφαρμογής του γραμμικού προγραμματισμού. Για να διατυπωθεί ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού οι προϋποθέσεις που πρέπει να ισχύουν είναι οι εξής: Γραμμικότητα, Διαιρετότητα και Βεβαιότητα (Μπότσαρης, Τσάντας, & Γεωργίου, Σημειώσεις Γραμμικού Προγραμματισμού, 2006).

3.6.3.1 Γραμμικότητα

Γραμμικές ως προς τις άγνωστες μεταβλητές $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_r$, πρέπει να είναι όλες οι συναρτήσεις του προβλήματος, αντικειμενική συνάρτηση και περιορισμοί. Συνεπώς, πρέπει να ισχύουν οι ιδιότητες της αναλογικότητας και της προσθετικότητας, δηλαδή εάν y είναι μια συνάρτηση r μεταβλητών και $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ είναι σταθερές, πρέπει να ισχύει: $y(\alpha_1\chi_1 + \alpha_2\chi_2 + \cdots + \alpha_r\chi_r) = \alpha_1 y(\chi_1) + \alpha_2 y(\chi_2) + \cdots + \alpha_r y(\chi_r)$.

Σε περιπτώσεις όπου δεν ισχύει απόλυτα η προϋπόθεση της γραμμικότητας, μπορεί να γίνει μια αρκετά καλή προσέγγιση με γραμμικές συναρτήσεις.

3.6.3.2 Διαιρετότητα

Στο μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού πρέπει κάθε δραστηριότητα (μεταβλητή) να είναι συνεχής και επομένως άπειρα διαιρετή. Άρα, όλα τα επίπεδα δραστηριοτήτων και όλες οι χρήσεις πόρων έχουν τη δυνατότητα να πάρουν κλασματικές τιμές ή ακέραιες τιμές. Όταν δεν ισχύει η υπόθεση της διαιρετότητας υπάρχουν δύο ενδεχόμενα:

- Να αγνοηθεί η υπόθεση αυτή, δηλαδή να λυθεί το πρόβλημα με μεθόδους γραμμικού προγραμματισμού, και οι τιμές των μεταβλητών να στρογγυλευθούν στην κοντινότερη ακέραια μονάδα. Όταν οι τιμές των μεταβλητών είναι μεγάλες τότε κυρίως εφαρμόζεται αυτή η μέθοδος.
- Αντίθετα όταν οι τιμές των μεταβλητών είναι μικρές (π.χ. 0 ή 1) όπως σε πολλά προβλήματα επενδύσεων, τότε πρέπει να χρησιμοποιηθούν τεχνικές του ακέραιου προγραμματισμού.

3.6.3.3 Βεβαιότητα

Στο μοντέλο του γραμμικού προγραμματισμού όλες οι παράμετροι του προβλήματος είναι γνωστές με απόλυτη βεβαιότητα. Όμως, στην περίπτωση που μερικοί ή όλοι οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης ή των περιορισμών είναι τυχαίες μεταβλητές, τότε το πρόβλημα γίνεται πρόβλημα στοχαστικού προγραμματισμού.

4 ΚΕΦΑΛΑΙΟ: «ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ»

4.1 ΓΕΝΙΚΑ

Ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με δύο μόνο μεταβλητές μπορεί να επιλυθεί με γραφική επίλυση, η οποία παρουσιάζεται στη συνέχεια με τη βοήθεια ενός παραδείγματος. Έστω πρόβλημα του προσδιορισμού του μεγίστου και του ελαχίστου της συνάρτησης $\mathrm{z} = 6\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2$ με τους περιορισμούς: $x_1 + x_2 \leq 10,\ x_2 \leq 4,\ 2x_1 + x_2 \geq 14,\ x_1 + 3x_2 \geq 12,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$.

Στο αρχικό στάδιο της γραφικής επίλυσης του προβλήματος περιλαμβάνεται ο προσδιορισμός του εφικτού συνόλου, δηλαδή ο προσδιορισμός των σημείων (x_1, x_2) του επιπέδου που ικανοποιούν ταυτόχρονα και τους έξι περιορισμούς.

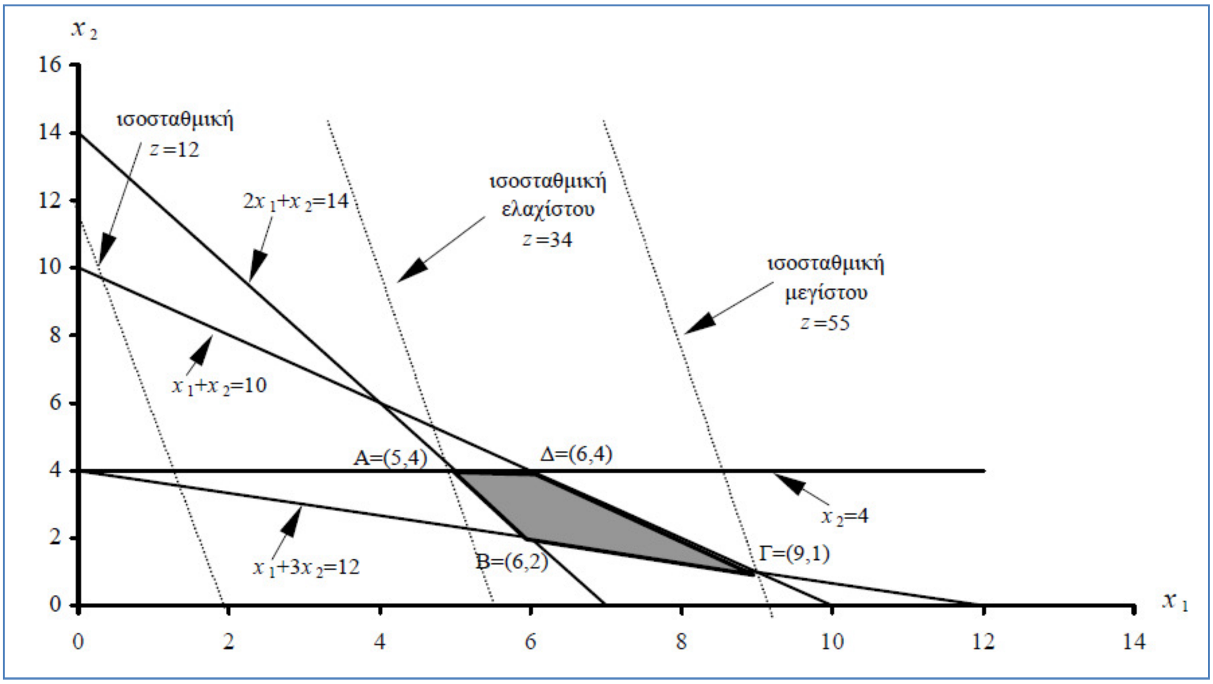
Αρχικά διαπιστώνεται ότι η απαίτηση μη αρνητικότητας των μεταβλητών απόφασης περιορίζει τον εφικτό χώρο του προβλήματος στο θετικό τεταρτημόριο, αφού η $x_1 \geq 0$ αποδέχεται όλα τα σημεία τα δεξιά της ευθείας $x_1 = 0$, ενώ η $x_2 \geq 0$ είναι ο ημιχώρος επάνω από την ευθεία $x_2 = 0$.

Κατόπιν μπορεί να διαπιστωθεί ότι κάθε γραμμική ανίσωση με δύο μεταβλητές, όπως για παράδειγμα η ανίσωση $2\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 \geq 14$, ισχύει στο ένα μόνο από τα δύο ημιεπίπεδα, στα οποία η ανισότητα αυτή διαιρεί το δισδιάστατο χώρο $(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2)$. Το σύνορο μεταξύ των δύο ημιεπιπέδων είναι η ευθεία $2\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 = 14$, όπου η ανισότητα ικανοποιείται οριακά. Κάτω από την ευθεία αυτή είναι το ημιεπίπεδο, όπου η ανισότητα παραβιάζεται (Μπότσαρης, Τσάντας, & Γεωργίου, 2006).

4.2 ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Γενικά, ισχύει ότι κάθε ευθεία της μορφής $\alpha_1\mathrm{x}_1 + \alpha_2\mathrm{x}_2 = b$ χωρίζει το επίπεδο $\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2$ σε δύο ημιεπίπεδα, τα οποία καθορίζονται από τις ανισότητες $\alpha_1\mathrm{x}_1 + \alpha_2\mathrm{x}_2 \leq b$ και $\alpha_1\mathrm{x}_1 + \alpha_2\mathrm{x}_2 \geq b$. Ο πιο απλός τρόπος για να διαπιστωθεί σε ποιο ημιεπίπεδο ισχύει η κάθε ανισότητα, είναι να θεωρηθεί ένα τυχόν σημείο του επιπέδου και να ελεγχθεί ποια από τις δύο ανισότητες ικανοποιούν οι συντεταγμένες του.

Έτσι, λοιπόν, εντοπίζεται το ημιεπίπεδο, το οποίο περιγράφει καθεμιά από τις έξι ανισώσεις του εξεταζόμενου προβλήματος. Αυτό συμβαίνει χαράσσοντας τις ευθείες που αντιστοιχούν σε κάθε περιορισμό - ανίσωση που ονομάζονται περιοριστικές ευθείες. Το εφικτό σύνολο του προβλήματος ορίζεται από την τομή των έξι αυτών ημιεπιπέδων. Στο Σχήμα 4.1, φαίνεται ότι οι ανισώσεις οι οποίες αποτελούν τους περιορισμούς του προβλήματος, συναληθεύουν στο σύνορο και το εσωτερικό του σκιασμένου χωρίου (η εφικτή περιοχή). Κάθε σημείο που βρίσκεται εκτός της σκιασμένης αυτής περιοχής αντιπροσωπεύει λύση που δεν είναι εφικτή και παραβιάζει τουλάχιστον μία από τις ανισότητες.



Σχήμα 4.1: Γραφική επίλυση μοντέλων γραμμικού προγραμματισμού.

Πηγή: (Μπότσαρης, Τσάντας, & Γεωργίου, 2006).

Αφού έχει προσδιοριστεί το εφικτό σύνολο του προβλήματος πρέπει κατόπιν να βρεθεί το σημείο του συνόλου αυτού που βελτιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση. Προς την κατεύθυνση αυτή, παρατηρείται ότι μια συνάρτηση της μορφής $z = c_1x_1 + c_2x_2$, όπως είναι η αντικειμενική συνάρτηση ενός μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού στο χώρο των δύο διαστάσεων, εισάγει στο πρόβλημα μια οικογένεια ευθειών, οι οποίες χαρακτηρίζονται από διαφορετικές τιμές του z, που έχουν όμως την ίδια κλίση $-c_1/c_2$, είναι δηλαδή παράλληλες (αφού $x_2 = \frac{z}{c_2} + (\frac{-c_1}{c_2})x_1$). Ας υποτεθεί μια από αυτές τις παράλληλες ευθείες και συγκεκριμένα εκείνη που ορίζεται από την εξίσωση $c_1x_1 + c_2x_2 = \bar{z}$, για κάποια συγκεκριμένη τιμή $\bar{z}$. Τότε η τιμή (στάθμη) της αντικειμενικής συνάρτησης σε όλα τα σημεία που ανήκουν στη ευθεία $c_1x_1 + c_2x_2 = \bar{z}$, είναι σταθερή και ίση με $z = \bar{z}$. Γι' αυτό οι παράλληλες ευθείες που προκύπτουν για τις διάφορες τιμές του z, ονομάζονται ισοσταθμικές (contours) ή ευθείες ίσου κέρδους/κόστους (isoprofit/isocost). Καθώς μεταβάλλεται το κέρδος (κόστος) z, οι ευθείες αυτές σαρώνουν ολόκληρο το δισδιάστατο χώρο.

Στο Σχήμα 4.1 έχει τοποθετηθεί η ισοσταθμική $6x_1 + x_2 = 12$, η οποία αντιστοιχεί σε κέρδος (κόστος) $z = 12$. Μια άλλη ισοσταθμική είναι εκείνη, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων (0, 0) και η οποία αντιστοιχεί στην τιμή $z = 0$. Η σχετική θέση των ισοσταθμικών $z = 12$ και $z = 0$, υποδεικνύει ότι όταν αυξάνεται η τιμή του z, οι ισοσταθμικές μετατοπίζονται προς τα πάνω και δεξιά. Από τα σημεία, βέβαια, των ισοσταθμικών ενδιαφέρον έχουν μόνο εκείνα, τα οποία ανήκουν στο σκιασμένο χωρίο, δηλαδή τα σημεία που ανήκουν στην τομή των ισοσταθμικών με το εφικτό σύνολο.

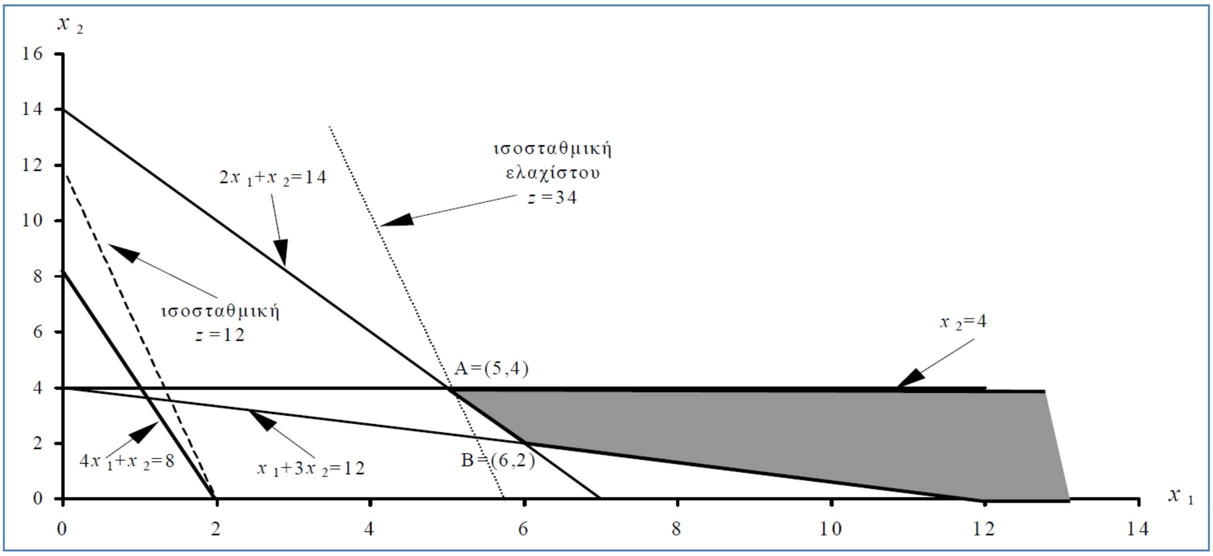
Έτσι, προκειμένου να προσδιοριστεί το μέγιστο, πρέπει να μετατοπιστεί η ισοσταθμική $z = 12$ προς τα πάνω και δεξιά, παράλληλα προς τον εαυτό της, μέχρι το σημείο εκείνο, μετά το οποίο κάθε άλλη ισοσταθμική που θα αντιστοιχούσε σε μεγαλύτερη τιμή του Z θα βρισκόταν έξω από τον εφικτό χώρο. Η τελευταία επαφή των ισοσταθμικών ευθειών με τον εφικτό χώρο γίνεται στο σημείο $\Gamma = (9,1)$. Η τιμή της ισοσταθμικής που διέρχεται από το σημείο αυτό, βρίσκεται αντικαθιστώντας τις τιμές $x_1 = 9$, και $x_2 = 1$ στη σχέση για την αντικειμενική συνάρτηση $z = 6x_1 + x_2$. Έτσι, το σημείο που μεγιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση είναι το $\Gamma = (9,1)$ και η μέγιστη τιμή του z είναι $z^{max} = 6 \times 9 + 1 = 55$.

Για να προσδιοριστεί το ελάχιστο της αντικειμενικής συνάρτησης, πρέπει να βρεθεί η πρώτη ισοσταθμική ευθεία που τέμνει τον εφικτό χώρο προς την αντίθετη κατεύθυνση (τη κατεύθυνση μείωσης της τιμής του z). Η τομή αυτή συμβαίνει στο σημείο A με συντεταγμένες $A(5,4)$, από όπου διέρχεται η ισοσταθμική $z = 34$. Επομένως, η αντικειμενική συνάρτηση ελαχιστοποιείται στο σημείο $A(5,4)$ και η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με $z^{min} = 6 \times 5 + 4 = 34$.

Παρατηρείται, λοιπόν, ότι η πρώτη και η τελευταία τομή των ισοσταθμικών ευθειών με το εφικτό σύνολο γίνεται σε μια κορυφή του σκιασμένου χωρίου. Αν, όμως, είχε ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση $z = 2x_1x_2$, της οποίας οι ισοσταθμικές είναι παράλληλες προς την ευθεία που εισάγει ο περιορισμός $2x_1x_2 \leq 14$, , τότε η πρώτη (τελευταία) επαφή των ισοσταθμικών ευθειών με το εφικτό σύνολο θα είχε επιτευχθεί σε ένα ολόκληρο ευθύγραμμο τμήμα, εκείνο που ορίζεται από τα σημεία $A(5,4)$ και $B(6,2)$. Στην περίπτωση αυτή το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης της z έχει απειρία βέλτιστων λύσεων, αφού κάθε σημείο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ είναι βέλτιστο και δίνει την άριστη τιμή στο $z = 14$. Μεταξύ βέβαια των βέλτιστων λύσεων θα ανήκαν και οι κορυφές Α και Β, ενώ σε όλα τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος, δηλαδή της ακμής που ορίζουν οι δύο αυτές κορυφές, η αντικειμενική συνάρτηση θα είχε την ίδια ελάχιστη τιμή (τιμή του Z στο σημείο Α: $A = z^A = 2 \times 5 + 4 = 14$, τιμή του z στο σημείο Β: $A = z^B = 2 \times 6 + 2 = 14$). Συνεπώς, το πρόβλημα ελαχιστοποίησης θα είχε και πάλι μονοσήμαντη απάντηση ως προς την ελάχιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης σε άπειρες όμως βέλτιστες λύσεις (Μπότσαρης, Τσάντας, & Γεωργίου, Σημειώσεις Γραμμικού Προγραμματισμού, 2006).

4.3 ΜΟΝΤΕΛΑ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ ΜΕ ΚΕΝΟ ΚΑΙ ΜΗ ΦΡΑΓΜΕΝΟ ΕΦΙΚΤΟ ΣΥΝΟΛΟ

Το εφικτό σύνολο, το οποίο ορίζεται από τους περιορισμούς $x_1 + x_2 \leq 10$, $x_2 \leq 4$, $2x_1 + x_2 \geq 14$, $x_1 + 3x_2 \geq 12$, $x_1 \geq 0$, και $x_2 \geq 0$ είναι ένα φραγμένο χωρίο και, μάλιστα, πρόκειται για ένα κυρτό πολύγωνο. Ένα σύνολο ονομάζεται κυρτό, αν το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει οποιαδήποτε δύο σημεία του συνόλου, ανήκει εξ' ολοκλήρου εντός του συνόλου. Αν όμως αφαιρεθεί ο περιορισμός $x_1 + x_2 \leq 10$, τότε όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.2, το εφικτό σύνολο του προβλήματος είναι ένα μη φραγμένο πολύπλευρο, το οποίο ωστόσο εξακολουθεί να είναι κυρτό. Το εφικτό σύνολο ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού είναι μη φραγμένο, όταν μία ή περισσότερες από τις μεταβλητές του προβλήματος μπορούν να έχουν απείρως μεγάλες τιμές εντός του εφικτού χώρου, όπως στο συγκεκριμένο παράδειγμα η x_1.



Σχήμα 4.2: Μοντέλα γραμμικού προγραμματισμού με κενό και μη φραγμένο εφικτό σύνολο.

Πηγή: (Μπότσαρης, Τσάντας, & Γεωργίου, Σημειώσεις Γραμμικού Προγραμματισμού, 2006).

Όπως παρατηρείται στο Σχήμα 4.2, η αντικειμενική συνάρτηση $z = 6x_1 + x_2$ έχει και πάλι ελάχιστο στο σημείο $A(5,4)$. Όμως, η τιμή του z μπορεί να γίνει οσοδήποτε μεγάλη και να βρεθεί το μέγιστο της αντικειμενικής συνάρτησης, το οποίο αποκλίνει στο άπειρο, αφού τίποτα δεν περιορίζει την προς τα πάνω και δεξιά μετατόπιση των ισοσταθμικών ευθειών. Αν, όμως, αντί για τη συνάρτηση $z = 6x_1 + x_2$, έπρεπε να μεγιστοποιηθεί η συνάρτηση $z = x_2$, τότε θα υπήρχε πεπερασμένη μέγιστη τιμή, ίση με $z = 4$, κάθε δε σημείο της ημιευθείας, η οποία με αρχή το σημείο Α διατρέχει το άνω σύνορο του σκιασμένου χωρίου στο Σχήμα 4.2, θα ήταν βέλτιστο. Επίσης, αν απαιτούνταν το μέγιστο της συνάρτησης $z = 6x_1 + x_2$, τότε πάλι θα υπήρχε ένα μοναδικό βέλτιστο σημείο, το $A(5,4)$, με μέγιστο $z^* = -26$.

Αν, τώρα, στους περιορισμούς $x_2 \leq 4$, $2x_1 + x_2 \geq 14$, $x_1 + 3x_2 \geq 12$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, προστεθεί και ο περιορισμός $4x_1 + x_2 \leq 8$, το εφικτό σύνολο είναι κενό, αφού η περιοχή στην οποία ισχύει ο περιορισμός αυτός, δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τη σκιασμένη περιοχή στο Σχήμα 4.2, όπου συναληθεύουν όλοι οι άλλοι περιορισμοί. Ομοίως, αν αντί για την ανίσωση $4x_1 + x_2 \leq 8$ είχε προστεθεί ως περιορισμός η εξίσωση $4x_1 + x_2 = 8$, πάλι το εφικτό σύνολο θα ήταν το κενό, αφού η περιοχή στην οποία αληθεύουν οι άλλοι περιορισμοί δεν έχει κανένα κοινό σημείο με την ευθεία $4x_1 + x_2 = 8$.

4.4 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΙΚΑ

Η δυνατότητα μιας εποπτικής προσέγγισης της θεωρίας πάνω στην οποία στηρίζεται η υπολογιστική μέθοδος simplex παρέχεται από τη γραφική μέθοδο επίλυσης μοντέλων γραμμικού προγραμματισμού με δύο μεταβλητές. Η γεωμετρία των Σχημάτων 4.1 και 4.2 φωτίζουν τα κύρια σημεία της θεωρίας αυτής. Τα σχήματα αυτά αποδεικνύουν ότι ο εφικτός χώρος ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού με δύο μεταβλητές, στην περίπτωση που δεν είναι κενός, φαίνεται ότι είναι ένα κυρτό φραγμένο πολύγωνο ή ένα κυρτό μη φραγμένο πολύπλευρο.

Επίσης, η πρώτη και η τελευταία επαφή των ισοσταθμικών της αντικειμενικής συνάρτησης με τον εφικτό χώρο μπορεί να συμβεί κατά μήκος του συνόρου του ή σε μια κορυφή του αλλά όχι στο εσωτερικό του. Συνεπώς, η αναζήτηση της βέλτιστης λύσης μπορεί να περιορισθεί μεταξύ των κορυφών του εφικτού συνόλου του προβλήματος.

Η μεθοδολογία αυτή, αλλά και η γεωμετρική ερμηνεία, ισχύει σε οποιοδήποτε χώρο οποιασδήποτε διάστασης, απλώς δεν είναι δυνατόν να υπάρχει εποπτική άποψη για διάσταση μεγαλύτερη του 2 (2 μεταβλητές απόφασης) ή το πολύ για τρεις μεταβλητές απόφασης όπου με τη χρήση κατάλληλου λογισμικού μπορούν να χαραχθούν τα περιοριστικά επίπεδα (αντί για περιοριστικές ευθείες) που αντιστοιχούν στους περιορισμούς του προβλήματος.

4.5 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ/ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

4.5.1 Παράδειγμα 1^{o} (εύρεση σχεδίου παραγωγής)

Στο πρώτο παράδειγμα αναζητείται το σωστό σχέδιο παραγωγής το οποίο θα εξασφαλίσει περισσότερα κέρδη σε μία επιχείρηση Αρτοποιίας.

Η επιχείρηση Αρτοποιίας διοχετεύει την τοπική αγορά με δύο είδη κατεψυγμένης σφολιάτας, απλή και γεμιστή. Για κάθε προϊόν το περιθώριο κέρδους ανέρχεται σε 3 και 4,5 χρηματικές μονάδες αντίστοιχα. Για την παραγωγή κάθε προϊόντος χρησιμοποιείται ζύμη κι ένα μείγμα υλικών ως ακολούθως (Ζησιμόπουλος, 2007):

- μια απλή σφολιάτα χρειάζεται 500 γραμμάρια ζύμης και 125 γραμμάρια μείγματος υλικών,
- μια γεμιστή σφολιάτα χρειάζεται 500 γραμμάρια ζύμης και 250 γραμμάρια μείγματος υλικών.

Για μία τυπική ημέρα που είναι η επόμενη περίοδος προγραμματισμού, η επιχείρηση Αρτοποιίας έχει στη διάθεσή της 75 κιλά ζύμης και 25 κιλά μείγματος υλικών. Ο παραγγελίες που έχει εξασφαλίσει η επιχείρηση Αρτοποιίας είναι για τουλάχιστον 50 απλές και τουλάχιστον 25 γεμιστές σφολιάτες. Ωστόσο, δεν υπάρχει περιορισμός ως προς την απορροφητικότητα της αγοράς με αποτέλεσμα να πωληθούν όλα τα τεμάχια που θα παρασκευαστούν. Έτσι, η επιχείρηση αναζητεί ένα σχέδιο παραγωγής που θα τις εξασφαλίσει τα περισσότερα κέρδη.

4.5.1.1 Μεταβλητές και αντικειμενική συνάρτηση

Με x_1συμβολίζεται το πλήθος από απλή σφολιάτα και με x_2 το πλήθος από γεμιστή σφολιάτα που θα παρασκευαστούν ημερησίως από την επιχείρηση Αρτοποιίας. Τα συνολικά κέρδη τα οποία πρέπει να μεγιστοποιηθούν ανέρχονται σε $3x_1 + 4.5\, x_2$ χρηματικές μονάδες που είναι η αντικειμενική συνάρτηση.

4.5.1.2 Περιορισμοί

Σύμφωνα με τα δεδομένα που υπάρχουν, η διαθέσιμη ποσότητα ζύμης ανέρχεται στα 75 κιλά. Συνεπώς, θα πρέπει η συνολική κατανάλωση ζύμης να μην ξεπερνάει την ποσότητα αυτή, άρα: $500x_1 + 500\, x_2 \leq 75000$.

Η διαθέσιμη ποσότητα υλικών ανέρχεται στα 25 κιλά οπότε θα είναι: $125x_1 + 250\, x_2 \leq 25000$.

Ακόμα, θα διατεθούν τουλάχιστον 50 απλές ζύμες που δίνει τη σχέση $x_1 \geq 50$ και τουλάχιστον 25 γεμιστές ζύμες δηλαδή $x_2 \geq 25$.

Προφανώς ισχύουν και οι περιορισμοί της μη αρνητικότητας οι οποίοι πρέπει να αναγράφονται σε κάθε μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού, επομένως $x_1 \geq 0$ και $x_2 \geq 0$, κάτι που στο συγκεκριμένο παράδειγμα, λόγω των δύο προηγούμενων περιορισμών, μοιάζει περιττό αφού οι μεταβλητές είναι κάτω φραγμένες.

Συνεπώς ισχύει το ακόλουθο μοντέλο: $Max\ z = 3x_1 + 4.5x_2$, με περιορισμούς:

1. $500x_1 + 500\, x_2 \leq 75000$
2. $125x_1 + 250\, x_2 \leq 25000.$
3. $x_1 \geq 50$
4. $x_2 \geq 25$

(όπου $x_1, x_2 \geq 0$ όπως είναι προφανές).

4.5.1.3 Επίλυση

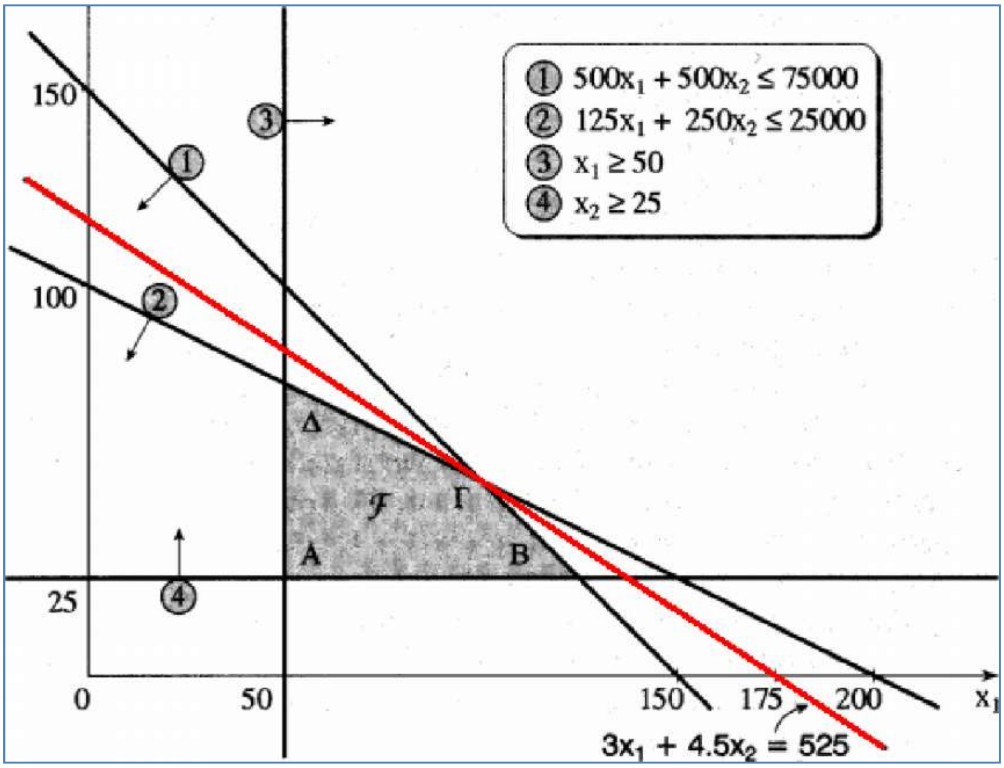
Το ανωτέρω μοντέλο για να λυθεί γραφικά ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφηκε νωρίτερα, χαράσσονται οι περιοριστικές ευθείες που αντιστοιχούν στους τέσσερις περιορισμούς και παρατηρείται ότι η εφικτή περιοχή του προβλήματος ορίζεται από το κυρτό πολύγωνο ΑΒΓΔ, (Σχήμα 4.3, περιοχή F), του οποίου οι κορυφές έχουν συντεταγμένες Α(50, 25), Β(125, 25), Γ(100, 50) και Δ(50, 75) και είναι οι υποψήφιες λύσεις (οι κορυφές της εφικτής περιοχής) για τον εντοπισμό της βέλτιστης λύσης.

Ακολούθως, χαράσσεται η αντικειμενική συνάρτηση για κάποια τυχαία τιμή του z και κατόπιν, μετακινώντας την προς την κατεύθυνση αύξησης της τιμής του z (προς τα πάνω και δεξιά στην προκειμένη περίπτωση) παρατηρείται ότι παίρνει τη μέγιστη τιμή στο σημείο Γ, που είναι η τελευταία κορυφή στην οποία τέμνει (εφάπτεται) την εφικτή περιοχή πριν να αποχωρήσει στην περιοχή των μη εφικτών λύσεων. Για το σημείο Γ, η τιμή z της αντικειμενικής συνάρτησης είναι ίση με 525 χρηματικές μονάδες.

Άρα, η βέλτιστη λύση του προβλήματος είναι η $x_1 = 100$ απλές ζύμες και $x_2 = 50$ γεμιστές ζύμες με το μέγιστο συνολικό κέρδος να ανέρχεται στις 525 χρηματικές μονάδες. Να σημειωθεί ότι αντί της παράλληλης μετακίνησης των καμπυλών (ευθειών) σταθερού κόστους της αντικειμενικής συνάρτησης, θα μπορούσε απλώς να υπολογιστούν για τις συντεταγμένες των τεσσάρων κορυφών, οι αντίστοιχες τιμές του z, και να εντοπιστεί η άριστη κορυφή ως εκείνη που δίνει το ελάχιστο, δηλαδή την κορυφή Γ. Στον ακόλουθο Πίνακα 4.1 έχει γίνει ακριβώς αυτό, επαληθεύοντας το αρχικό συμπέρασμα.

Πίνακας 4.1: Υπολογισμός των συντεταγμένων των τεσσάρων κορυφών του μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού για το 1ο παράδειγμα.

Κορυφή εφικτής περιοχής	Συντεταγμένες	Τιμή του z
Α	(50, 25)	262.5
Β	(125, 25)	487.5
Γ	(100, 50)	525
Δ	(50, 75)	487.5



Σχήμα 4.3: Η εφικτή περιοχή του μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού για το 1ο παράδειγμα.

Πηγή: (Ζησιμόπουλος, 2007).

Παρατηρείται, ότι για την άριστη λύση ($x_1 = 100$ και $x_2 = 50$) οι περιορισμοί του προβλήματος δίνουν:

1ο. $500 \times 100 + 500 \times 50 = 75000$ (≤ 75000)
2ο. $125 \times 100 + 250 \times 50 = 25000$ (≤ 25000)
3ο. $100 = 100$ (≥ 50)
4ο. $50 = 50$ (≥ 25)

Άρα, δεν θα υπάρξουν ανεκμετάλλευτοι πόροι στην επιχείρηση αφού στο άριστο σχέδιο όλη η ζύμη και όλο το μείγμα θα καταναλωθούν πλήρως.

Ενεργοί ή δεσμευτικοί περιορισμοί ονομάζονται εκείνοι οι περιορισμοί, οι οποίοι στην άριστη λύση ισχύουν ως ισότητες. Από την άλλη πλευρά, αδρανείς ή μη δεσμευτικοί περιορισμοί ονομάζονται εκείνοι οι περιορισμοί του οποίους η άριστη λύση δεν τους έχει καταστήσει ισότητες.

Στο παραπάνω παράδειγμα οι περιορισμοί (1) και (2), οι οποίοι στην άριστη λύση ισχύουν ως ισότητες, είναι ενεργοί, ενώ οι περιορισμοί (3), (4) των οποίων στην άριστη λύση το αριστερό μέλος ξεπερνάει το δεξιό μέλος, είναι αδρανείς περιορισμοί και υποδεικνύουν την πλεονάζουσα παραγωγή, που ανέρχεται σε 50 και 25 τεμάχια αντίστοιχα.

Οι ενεργοί περιορισμοί, γενικά, στην άριστη λύση ενός γραμμικού μοντέλου, είναι εκείνοι των οποίων η τομή των αντιστοίχων περιοριστικών ευθειών τους, καθορίζει το σημείο - κορυφή που αποτελεί τη βέλτιστη λύση. Στην περίπτωση που ένας ενεργός περιορισμός είναι της μορφής «≤», εκφράζει συνήθως, στην άριστη πάντα λύση, έναν πόρο που έχει καταναλωθεί πλήρως και γεωμετρικά συμμετέχει (η περιοριστική του ευθεία) στον καθορισμό της κορυφής που αποτελεί τη βέλτιστη αυτή λύση.

Οι περιορισμοί (1) και (2) στο παραπάνω πρόβλημα, είναι αυτής της μορφής, κάτι που μπορεί να επιβεβαιωθεί και από το Σχήμα 4.3. Ένας ενεργός περιορισμός, βέβαια μπορεί να ήταν και της μορφής «≥», εκφράζοντας έτσι μία απαίτηση που έχει στην άριστη λύση, ικανοποιηθεί στο κατώτερο όριό της. Γεωμετρικά ο περιορισμός αυτός θα συμμετέχει στον καθορισμό της κορυφής που αποτελεί την άριστη λύση. Στο παραπάνω πρόβλημα δεν υπάρχουν τέτοιοι περιορισμοί.

Τώρα ένας αδρανής περιορισμός της μορφής «≤», εκφράζει συνήθως έναν πόρο που δεν έχει καταναλωθεί πλήρως, δηλαδή υπάρχει περίσσευμα. Πρόκειται για την περιθώρια τιμή, ή ακόμη τιμή χαλαρής μεταβλητής του περιορισμού ή χαλαρή τιμή. Στον καθορισμό της άριστης κορυφής δεν συμμετέχει η περιοριστική του ευθεία. Στο παράδειγμα αυτό δεν υπάρχουν τέτοιοι περιορισμοί. Αν στην άριστη λύση ένας περιορισμός είναι αδρανής και της μορφής «≥», τότε συνήθως εκφράζει μία απαίτηση της οποίας όχι μόνο έχει ικανοποιηθεί η ελάχιστη απαιτούμενη ποσότητα, αλλά επιπλέον, έχει ξεπεραστεί κατά μία επιπλέον ποσότητα. Η επιπλέον αυτή ποσότητα πέρα από της ελάχιστης απαίτησης, ονομάζεται πάλι περιθώρια τιμή, που στην συγκεκριμένη περίπτωση ονομάζεται τιμή μεταβλητής πλεονασμού. Στον καθορισμό της άριστης κορυφής δεν συμμετέχει η περιοριστική ευθεία ενός τέτοιου περιορισμού. Στο παρόν παράδειγμα οι περιορισμοί (3) και (4) είναι τέτοιοι οι οποίοι έχουν τιμή μεταβλητής πλεονασμού ίση με 50 και 25 αντιστοίχως.

4.5.2 Παράδειγμα 2^{o} (εύρεση σχεδίου οικονομίας καυσίμου)

Ένας φοιτητής κατέχει μια κλασική μοτοσικλέτα κι ένα αυτοκίνητο. Με την μοτοσικλέτα διανύει 45 χιλιόμετρα κατά μέσο όρο χρησιμοποιώντας ένα λίτρο βενζίνης 100 οκτανίων (super αμόλυβδη) που κοστίζει 1.35€ το λίτρο, ενώ με το αυτοκίνητο διανύει 26 χιλιόμετρα με ένα λίτρο βενζίνης 95 οκτανίων (αμόλυβδη) που κοστίζει 1.17€ το λίτρο. Ακόμα, για κάθε 5000 χιλιόμετρα, η μοτοσικλέτα χρειάζεται συντήρηση 15 ωρών, με τον αντίστοιχο χρόνο για το αυτοκίνητο να είναι 10 ώρες. Ο φοιτητής αν και κάνει μόνος του τη συντήρηση, δεν θέλει να αφιερώνει περισσότερες από 100 ώρες το χρόνο για την μοτοσυκλέτα. Επίσης, προβλέπει ότι τον επόμενο χρόνο θα διανύσει τουλάχιστον 45000 χιλιόμετρα, εκ των οποίων τα 5000 τουλάχιστον θα ήθελε να τα διανύσει με την μοτοσικλέτα. Πόσα χιλιόμετρα πρέπει να διανύσει ο φοιτητής με τη μοτοσικλέτα και πόσα με το αυτοκίνητο έτσι ώστε το ετήσιο κόστος σε καύσιμα να είναι το ελάχιστο δυνατόν; (Μπότσαρης, Τσάντας, & Γεωργίου, Σημειώσεις Γραμμικού Προγραμματισμού, 2006).

4.5.2.1 Μεταβλητές και αντικειμενική συνάρτηση

Με x_1συμβολίζεται ο αριθμός των χιλιομέτρων που θα διανύσει ο φοιτητής με την μοτοσυκλέτα και με x_2 ο αριθμός των χιλιομέτρων που θα διανύσει με το αυτοκίνητο.

Αν για τα 45 χιλιόμετρα που διανύονται με τη μοτοσικλέτα απαιτείται ένα λίτρο βενζίνης που κοστίζει 1.35€, τότε για τα x_1 χιλιόμετρα απαιτούνται $\frac{x_1}{45}$ λίτρα βενζίνης αξίας $\frac{x_1}{45}€ \times 1{,}35 = €\ 0{,}003x_1$.

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζεται ότι για τα x_2 χιλιόμετρα που θα διανυθούν με το αυτοκίνητο απαιτούνται $€\ 0{,}045x_2$. Άρα, το συνολικό κόστος σε καύσιμα το οποίο πρέπει να ελαχιστοποιηθεί ανέρχεται σε $€\ 0{,}003x_1 +\ €\ 0{,}045x_2$ (αντικειμενική συνάρτηση).

4.5.2.2 Περιορισμοί

Από τα δεδομένα φαίνεται ότι ο συνολικός χρόνος που προτίθεται να αφιερώσει για συντήρηση ο φοιτητής, ανέρχεται το πολύ στις 100 ώρες. Συνεπώς, ο συνολικός χρόνος συντήρησης των δύο οχημάτων θα πρέπει να μην ξεπερνάει την ποσότητα αυτή. Για κάθε 5000 χιλιόμετρα κίνησης, η μοτοσικλέτα δημιουργεί ανάγκη συντήρησης 15 ωρών και το αυτοκίνητο 10 ωρών. Άρα, τα x_1 χιλιόμετρα κίνησης της μοτοσικλέτας απαιτούν $\frac{15}{5000}x_1 = 0{,}003x_1$ ώρες συντήρησης και τα x_2 χιλιόμετρα κίνησης με το αυτοκίνητο απαιτούν $\frac{10}{5000}x_2 = 0{,}002x_2$ ώρες συντήρησης. Συνεπώς, θα πρέπει: $0{,}003x_1 + 0{,}002x_2 \leq 100$. Η προβλεπόμενη διανυόμενη απόσταση και με τα δύο οχήματα αναμένεται να ξεπεράσει τα 45000 χιλιόμετρα, οπότε θα πρέπει: $x_1 + x_2 \geq 45000$.

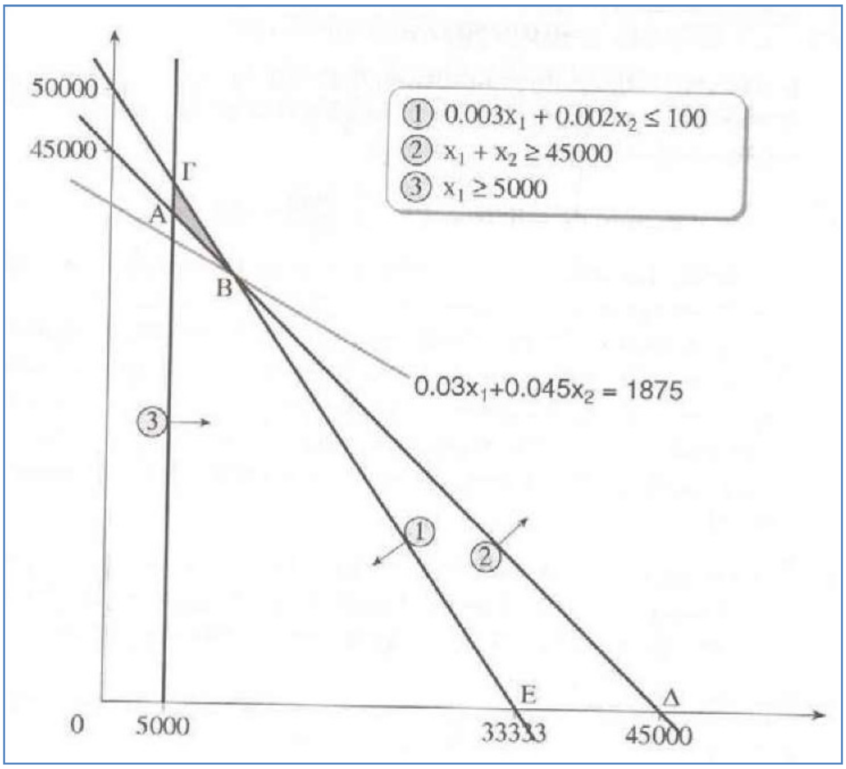
Επιπλέον, ο φοιτητής επιθυμεί να διανύσει τουλάχιστον 5000 χιλιόμετρα με τη μοτοσικλέτα, δηλαδή $x_1 \geq 5000$. Τέλος, υπάρχουν και οι περιορισμοί της μη αρνητικότητας δηλαδή είναι $x_1, x_2 \geq 0$ (που για τη x_1 ήδη καλύπτεται από τον προηγούμενο περιορισμό).

Άρα, ισχύει το ακόλουθο μοντέλο: $Min\ z = 0{,}003x_1 + 0{,}045x_2$ με περιορισμούς:

1) $0{,}003x_1 + 0{,}002x_2 \leq 100$
2) $x_1 + x_2 \geq 45000$
3) $x_1 \geq 5000$

Όπου $x_1, x_2 \geq 0$

Το τρίγωνο ΑΒΓ (Σχήμα 4.4) του οποίου οι κορυφές έχουν συντεταγμένες Α(5000, 40000), Β(10000, 35000) και Γ(5000, 42500) ορίζει την εφικτή περιοχή του παραπάνω προβλήματος. Το σημείο Β είναι η άριστη λύση. Όταν διανύονται 10000 χιλιόμετρα με τη μοτοσικλέτα και 35000 με το αυτοκίνητο, ο φοιτητής έχει το μικρότερο δυνατό ετήσιο κόστος καυσίμων, ύψους 1875€.



Σχήμα 4.4: Η εφικτή περιοχή του μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού για το 2ο παράδειγμα.

Πηγή: (Μπότσαρης, Τσάντας, & Γεωργίου, 2006).

5 ΚΕΦΑΛΑΙΟ: «Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX»

5.1 ΓΕΝΙΚΑ

Μια από τις πλέον διαδεδομένες μεθοδολογίες των υπολογιστικών μαθηματικών αποτελεί η μέθοδος simplex. Επίσης, αποτελεί μία από τις μεγαλύτερες μαθηματικές επινοήσεις του 20^{ου} αιώνα με εκπληκτικά αποτελέσματα στην πράξη.

Η γεωμετρική απεικόνιση του εφικτού συνόλου του προβλήματος είναι αυτό που πραγματικά φωτίζει τη μέθοδο simplex. Σε μια κορυφή του εφικτού του συνόλου φαίνεται να αντιστοιχεί η βέλτιστη λύση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού. Μια αρχική κορυφή απαιτείται για την εκκίνηση της μεθόδου simplex. Από την κορυφή αυτή, κατά μήκος ακμών, οδηγείται κάποιος σε άλλες γειτονικές κορυφές. Κάποιες από αυτές απομακρύνουν από τη βέλτιστη, πλην όμως άγνωστη κορυφή, ενώ κάποιες άλλες βαθμιαία την προσεγγίζουν.

Από κορυφή σε κορυφή πραγματοποιεί άλματα η μέθοδος Simplex. Κατορθώνει να βρει την ακμή σε κάθε νέο άλμα, η οποία μετά βεβαιότητας οδηγεί σε μια νέα κορυφή, όπου η αντικειμενική συνάρτηση έχει βελτιωμένη τιμή, μεγαλύτερη ή μικρότερη ανάλογα με το αν έχει λυθεί το πρόβλημα μεγιστοποίησης ή το πρόβλημα ελαχιστοποίησης. Συνεχίζοντας τη μετακίνηση κατά μήκος των ακμών του εφικτού συνόλου με τον τρόπο αυτό και βελτιώνοντας από κορυφή σε κορυφή την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, φθάνει κανείς τελικά σε μια κορυφή, όπου η αντικειμενική συνάρτηση βελτιστοποιείται. Κάθε άλλη κορυφή δίνει χειρότερη τιμή για την αντικειμενική συνάρτηση. Με τον τρόπο αυτό έχει βρεθεί η βέλτιστη λύση και η διαδικασία τερματίζεται (Δινοπούλου & Χιωτίδης, 2012), (Bronson & Naadimuthu, 2010).

5.2 Η ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΝΟΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Με τη βοήθεια της γραφικής μεθόδου γίνεται η επίλυση ενός προβλήματος με μόνο δύο μεταβλητές, αφού οριστεί η περιοχή των εφικτών λύσεων, εντοπίζεται ποιο από τα ακραία σημεία της περιοχής των εφικτών λύσεων δίνει το μεγαλύτερο κέρδος. Η γραφική προσέγγιση δίνει την ευκαιρία να κατανόησης των βασικών αρχών των προβλημάτων του Γραμμικού Προγραμματισμού. Όμως σε πραγματικές εφαρμογές του Γραμμικού Προγραμματισμού, ο αριθμός των μεταβλητών είναι πολύ μεγαλύτερος από δύο μεταβλητές και συνεπώς η γραφική προσέγγιση επίλυσης δεν είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί.

Ο αριθμός των μεταβλητών και των περιορισμών των προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού σε πραγματικές εφαρμογές ανέρχεται σε δεκάδες, εκατοντάδες και μερικές φορές ακόμα και σε χιλιάδες. Επομένως είναι απαραίτητη μια συστηματική μέθοδος επίλυσης των προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού η οποία να μπορεί να υλοποιηθεί μέσω κατάλληλων προγραμμάτων ηλεκτρονικού υπολογιστή για την επίλυση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού οποιουδήποτε μεγέθους. Η συστηματική αυτή μέθοδος ονομάζεται μέθοδος Simplex.

Ποια προσέγγιση ακολουθεί η μέθοδος Simplex; Γενικά ακολουθεί μια προσέγγιση που είναι ανάλογη με την προσέγγιση που ακολουθείται στη γραφική μέθοδο όπου εκεί εξετάζονται όλα τα ακραία σημεία της περιοχής των εφικτών λύσεων. Μόνο στα ακραία σημεία της περιοχής των εφικτών λύσεων είναι δυνατόν να επιτευχθεί η μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης. Η μέθοδος Simplex με ένα συστηματικό αλγεβρικό τρόπο, εξετάζει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης μόνο στα ακραία σημεία της περιοχής των εφικτών λύσεων.

Με επαναληπτικό τρόπο γίνεται η διαδοχική εξέταση των ακραίων σημείων, δηλαδή, με το να επαναλαμβάνεται το ίδιο σύνολο των διαδικασιών και αλγεβρικών πράξεων σε διαδοχικά βήματα έως ότου εντοπιστεί η βέλτιστη λύση. Στην επιλογή ενός ακραίου σημείου της περιοχής των εφικτών λύσεων αντιστοιχεί κάθε βήμα της μεθόδου Simplex. Το επόμενο ακραίο σημείο της περιοχής των εφικτών λύσεων σε κάθε νέο βήμα επιλέγεται έτσι ώστε η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης να αυξάνεται (ή αντίστοιχα μειώνεται αν η αντικειμενική συνάρτηση αφορά την ελαχιστοποίηση του κόστους) και επομένως σταδιακά να πλησιάζει προς τη βέλτιστη λύση. Η μέθοδος Simplex παρέχει επίσης πλήθος άλλων πληροφοριών οικονομικής φύσης τις οποίες δεν είναι δυνατόν να παραχθούν με άλλο τρόπο, πέρα από τον προσδιορισμό της βέλτιστης λύσης, δηλαδή τις τιμές των μεταβλητών και το αντίστοιχο βέλτιστο κέρδος ή κόστος (Δινοπούλου & Χιωτίδης, 2012), (Bronson & Naadimuthu, 2010).

5.3 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ

Η δυνατότητα πλήρους τυποποίησης της μεθόδου Simplex σε τέτοιο βαθμό, ώστε να καθίσταται εύκολη τόσο η απομνημόνευσή της για την εκτέλεσή της με χαρτί και μολύβι, όσο και η σύνταξη ενός προγράμματος Η/Υ, ο οποίος αποτελεί πλέον το συνηθέστερο μέσο επίλυσης προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού είναι ένα από τα σημαντικά πλεονεκτήματα της μεθόδου Simplex - πέρα από το μικρό αριθμό επαναληπτικών βημάτων που απαιτούνται.

Ωστόσο η διεξαγωγή ορισμένων προκαταρκτικών ενεργειών, οι οποίες ουσιαστικά μετατρέπουν τη γραφική μέθοδο σε μια εύχρηστη καθαρά υπολογιστική διαδικασία είναι απαραίτητη πριν την εκτέλεση αυτής καθαυτής της κυρίως μεθοδολογίας της Simplex. Στα ακόλουθα στάδια μπορεί να συνοψισθεί η προπαρασκευαστική αυτή οργάνωση του μαθηματικού προτύπου του Γραμμικού Προγραμματισμού (Ζησιμόπουλος, 2007):

1ο. Μετατροπή της αντικειμενικής συνάρτησης και των περιορισμών δομής και μη αρνητικότητας στη μορφή που υπαγορεύει το μέλλον του Γραμμικού Προγραμματισμού.
2ο. Αλλαγή της φοράς της ανισότητας όσων περιορισμών δομής απαιτούνται, έτσι ώστε τα δεξιά μέλη όλων των περιορισμών να είναι μη αρνητικοί αριθμοί[20].
3ο. Μετατροπή των περιορισμών δομής που αποτελούν ανισότητες ή ανισοϊσότητες σε ισοδύναμες ισότητες. Αυτό επιτυγχάνεται με την προσθήκη (πρόσθεση αν η φορά της ανισότητας είναι $<$ ή $\leq$ ή αφαίρεση αν η φορά είναι της μορφής $>$ ή $\geq$) νέων μη αρνητικών μεταβλητών, οι οποίες λέγονται ψευδομεταβλητές.

Για παράδειγμα στον περιορισμό δομής $3x_1 - 5x_2 + 2x_3 \leq 13$ χρειάζεται η πρόσθεση της ψευδομεταβλητής x_4, επομένως αυτός θα μετατραπεί στην ισότητα $3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 13$. Με τον ίδιο τρόπο ο περιορισμός $4x_1 + 2x_2 - 7x_3 > 8$ αφαιρώντας τη ψευδομεταβλητή x_5 μετατρέπεται στην ισότητα $4x_1 + x_2 - 7x_3 - x_5 = 8$.

Και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις οι μεταβλητές x_4 και x_5 δεν περιλαμβάνονται στις αρχικές μεταβλητές απόφασης του αντίστοιχου προτύπου.

[20]Επομένως αν το δεξί μέλος ενός περιορισμού είναι αρνητικό χρειάζεται η αλλαγή των πρόσημων και της φοράς της αντίστοιχης ανισότητας (πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της με -1).

4ο. Δημιουργία στο αριστερό τμήμα του πίνακα των περιορισμών δομής ενός μοναδιαίου πίνακα με την πρόσθεση κατάλληλου αριθμού νέων μη αρνητικών μεταβλητών, οι οποίες ονομάζονται τεχνητές μεταβλητές.

Ο τετραγωνικός πίνακας, του οποίου τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου ισούνται με τη μονάδα ενώ όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του ισούνται με μηδέν ονομάζεται μοναδιαίος πίνακας. Η δημιουργία στο αριστερό μέλος του συνόλου των περιορισμών δομής ενός πλήρους μοναδιαίου πίνακα είναι απαραίτητη για την ορθή εφαρμογή της μεθόδου Simplex. Οι στήλες μοναδιαίου πίνακα του επιτρέπουν να είναι διατεταγμένες σε οποιαδήποτε σειρά μεταξύ τους. Φαίνεται λοιπόν ότι υπάρχει πιθανότητα μία ή περισσότερες από τις στήλες του επιθυμητού μοναδιαίου πίνακα να προϋπάρχουν και να προέρχονται είτε από τις αρχικές μεταβλητές απόφασης είτε από τις ψευδομεταβλητές που προστέθηκαν στους περιορισμούς στο προηγούμενο στάδιο της οργάνωσης του μαθηματικού προτύπου. Συνεπώς ο αριθμός των τεχνητών μεταβλητών που πρέπει να προστεθούν ανάλογα με τη φορά και τη φύση των περιορισμών ποικίλλει. Ωστόσο είναι σχεδόν πάντα σημαντικά μικρότερος από το πλήθος των γραμμών του απαιτούμενου μοναδιαίου πίνακα.

Στο ακόλουθο παράδειγμα ο τρόπος δημιουργίας του μοναδιαίου πίνακα γίνεται περισσότερο σαφής και κατανοητός:

$$\max Z = 2\,x_1 - 3x_2$$

με τους περιορισμούς δομής:

1) $7x_1 < 80$
2) $2x_1 - 3x_2 < 20$
3) $6x_1 - 5x_2 = 45$

και τους περιορισμούς μη αρνητικότητας: $x_1, x_2 > 0$.

Στους περιορισμούς (1) και (2) προστίθενται οι ψευδομεταβλητές x_3 και x_4 αντίστοιχα, οπότε το σύστημα των περιορισμών παίρνει τη μορφή:

- $7x_1 + x_3 = 80$
- $2x_1 - 3x_2 + x_4 = 20$
- $6x_1 - 5x_2 = 45$

Η πρόσθεση στον περιορισμό (3) της τεχνητής μεταβλητής x_5 είναι απαραίτητη για τη δημιουργία του απαραίτητου μοναδιαίου πίνακα. Έτσι η τελική μορφή του προτύπου είναι:

$$\max Z = 2\,x_1 - 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5,$$

με τους περιορισμούς δομής:

- $7x_1 + x_3 = 80$
- $2x_1 - 3x_2 + x_4 = 20$
- $6x_1 - 5x_2 + x_5 = 45$

και τους περιορισμούς μη αρνητικότητας $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$, όπου x_1, x_2 οι μεταβλητές απόφασης, x_3, x_4 οι ψευδομεταβλητές, και x_5 η τεχνητή μεταβλητή.

Στις τρεις τελευταίες στήλες του πίνακα των περιορισμών δομής έχει σχηματισθεί ο μοναδιαίος πίνακας.

5.4 ΑΡΧΕΣ ΜΕΘΟΔΟΥ SIMPLEX

Μια κλασική αλγεβρική επαναληπτική διαδικασία είναι η μέθοδος Simplex, η οποία όταν εφαρμόζεται δεν απαιτούνται από το χρήστη ιδιαίτερες θεωρητικές γνώσεις. Ωστόσο είναι απαραίτητη η γνώση των βασικών αρχών από τις οποίες διέπεται, και για την ερμηνεία και κατανόησή της, αλλά και για την κριτική αξιολόγηση των αποτελεσμάτων της, καθώς και για την κατανόηση της έννοιας και της σημασίας της ανάλυσης ευαισθησίας των προβλημάτων του Γραμμικού Προγραμματισμού.

Η μέθοδος Simplex διέπεται από κάποιους σπουδαίους ορισμούς και αρχές, όπως οι ακόλουθοι (Βαρδαλής, 2007):

1. **Επαυξημένη λύση,** πρόκειται για μια λύση του προβλήματος με περιορισμούς στη μορφή των αρχικών ανισοτήτων, με την οποία προσαυξάνονται οι αντίστοιχες τιμές των ψευδομεταβλητών έτσι ώστε οι περιορισμοί να πάρουν τη μορφή εξισώσεων. Η επαυξημένη λύση περιέχει n + m μεταβλητές.
2. **Βασική λύση,** πρόκειται για μια «επαυξημένη» ακραία λύση.
3. **Βασική δυνατή λύση,** πρόκειται για μια επαυξημένη ακραία δυνατή λύση. Κάθε βασική λύση περιέχει συνολικά m + n μεταβλητές. Από αυτές μη βασικές μεταβλητές ονομάζονται οι n μεταβλητές και είναι ίσες με μηδέν. Οι τιμές των βασικών μεταβλητών, δηλαδή των υπολοίπων m μεταβλητών, αποτελούν τη συμβιβαστή λύση του συστήματος των m εξισώσεων του προβλήματος με όλους τους περιορισμούς σε μορφή εξισώσεων, αφού τεθούν οι μη βασικές μεταβλητές ίσες με μηδέν. Πρόκειται για μια επαυξημένη ακραία λύση. Από τις αντίστοιχες μεταβλητές καθορίζονται οι n εξισώσεις που την προσδιορίζουν.
4. **Βασική δυνατή λύση,** πρόκειται για μια βασική λύση, μέσω της οποίας ικανοποιείται το σύστημα των εξισώσεων που σχηματίζουν οι περιορισμοί (όταν αυτοί μετατραπούν σε ισότητες) και ταυτόχρονα είναι μη αρνητικές όλες της οι m βασικές μεταβλητές. Εκφυλισμένη ονομάζεται μια βασική δυνατή λύση, όταν έστω και μια από αυτές τις m μεταβλητές είναι ίση με μηδέν.

5.5 ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ SIMPLEX

5.5.1 Γενικά

Η μέθοδος Simplex είναι μία από τις πλέον επιτυχημένες εφαρμογές της επιχειρησιακής έρευνας, ως τεχνική για τον προσδιορισμό του άριστου συνδυασμού περιορισμένων διαθέσιμων πόρων για την επίτευξη ενός επιθυμητού στόχου.

Με το γραμμικό προγραμματισμό επιδιώκονται άριστες λύσεις σε οικονομικά προβλήματα που μπορούν να έχουν τη μορφή γραμμικών συναρτήσεων και περιορισμών.

Κατά κανόνα η μεγιστοποίηση του κέρδους ή η ελαχιστοποίηση του κόστους είναι η άριστη λύση σε ένα γραμμικό πρόβλημα, με δεδομένο και σταθερό το κόστος ή το κέρδος αντίστοιχα.

Μια βιομηχανική επιχείρηση, η οποία παράγει δύο διαφορετικά προϊόντα με διαφορετικά περιθώρια κέρδους χρησιμοποιείται ως παράδειγμα γραμμικού προβλήματος. Η επιχείρηση με τις δυνατότητες που έχει δεν της επιτρέπεται να χρησιμοποιήσει περισσότερη εργασία ή κεφάλαιο από ένα ορισμένο όριο. Ποιος συνδυασμός ποσοτήτων από το κάθε προϊόν, θα εξασφαλίσει στην επιχείρηση το μέγιστο κέρδος; Αν η επιχείρηση δεν περιόριζε την εργασία και το κεφάλαιο, τα κέρδη της θα ήταν τόσο μεγαλύτερα όσο περισσότερη θα ήταν η παραγόμενη ποσότητα και από τα δύο προϊόντα της.

Επομένως χαρακτηριστικό γνώρισμα του γραμμικού προβλήματος αποτελούν οι περιορισμοί. Ιδιαίτερα χρήσιμη σε περιπτώσεις, όπου τα δεδομένα των εισροών μπορούν να εκφραστούν ποσοτικά και οι αντικειμενικοί σκοποί μπορούν να οριστούν και να μετρηθούν με ακρίβεια είναι η τεχνική του γραμμικού προγραμματισμού (Βαρδαλής, 2007).

5.5.2 Θεωρία των παιγνίων

Η θεωρία των παιγνίων (Game theory) βασίζεται στην προϋπόθεση ότι ένα άτομο και ο αντίπαλός του στην προσπάθειά τους να μεγιστοποιήσουν τα κέρδη και να ελαχιστοποιήσουν τις απώλειες ενεργούν ορθολογικά. Με τη θεωρία των παιγνίων, λοιπόν, μια επιχείρηση προσπαθεί να βρει μια άριστη λύση, με την οποία ένα άτομο μπορεί να αναπτύξει μια στρατηγική σε μια ορισμένη κατάσταση, η οποία, ανεξάρτητα από τις ενέργειες του αντιπάλου, θα μεγιστοποιήσει τα κέρδη ή θα ελαχιστοποιήσει τις απώλειες. Η μαθηματική ανάπτυξη της θεωρίας των παιγνίων δεν έχει προχωρήσει πέρα από το στάδιο των απλούστερων ανταγωνιστικών καταστάσεων, ωστόσο η μελλοντική ανάπτυξή της θα έχει σημαντική επίδραση στην επιστημονική θεώρηση του στρατηγικού σχεδιασμού σε ανταγωνιστικές καταστάσεις (Λαγαρής, Παπαγεωργίου, & Βόγκλης, 2008), (Βαρδαλής, 2007).

5.5.3 Θεωρία της αναμονής

Η Θεωρία της αναμονής (Queuing theory) χρησιμοποιείται επίσης και ο όρος θεωρία της ουράς ή της γραμμής αναμονής. Για να αντισταθμίσει το κόστος της ουράς ανθρώπων που περιμένουν να εξυπηρετηθούν έναντι του κόστους που απαιτείται για την πρόληψη του σχηματισμού ουράς με την αύξηση της εξυπηρέτησης χρησιμοποιεί μαθηματικές τεχνικές. Η βασική της προϋπόθεση είναι ότι αν και οι καθυστερήσεις είναι δαπανηρές, ωστόσο η εξάλειψή τους ίσως να είναι περισσότερο δαπανηρή.

Διάφορα προβλήματα αναμονής, όπως πελατών που αναμένουν εξυπηρέτηση, μηχανών που πρόκειται να επισκευαστούν, εγγράφων που πρόκειται να ταξινομηθούν, υλών που πρόκειται να αποθηκευτούν, κλπ, αντιμετωπίζονται με τη θεωρία αναμονής.

Για να επιλυθούν τέτοια προβλήματα καταρτίζονται μαθηματικά υποδείγματα, με τα οποία προσδιορίζεται ο μέσος χρόνος αναμονής (προσώπων, μηχανών, εγγράφων, υλών κλπ), η πιθανότητα μικρής ή μεγάλης αναμονής, ο μέσος αριθμός ατόμων που βρίσκονται σε αναμονή κλπ.

Συχνά χρησιμοποιείται σαν παράδειγμα μια από τις πιο ενδιαφέρουσες εφαρμογές της, που ήταν η περίπτωση των λιμενικών αρχών της Νέας Υόρκης. Χρησιμοποίησαν τη θεωρία της αναμονής για να λύσουν ένα πρόβλημα που είχε σχέση με τον αριθμό σταθμών διοδίων στις εισόδους γεφυρών και σηράγγων. Οι αρχές διαπίστωσαν ότι με την εφαρμογή αυτής της μεθόδου, μπορούσαν να ελαττώσουν τις ουρές αλλά και τον αριθμό σταθμών διοδίων (Λαγαρής, Παπαγεωργίου, & Βόγκλης, 2008), (Βαρδαλής, 2007).

5.5.4 Θεωρία πιθανοτήτων

Η θεωρία των πιθανοτήτων (Probability theory) βασίζεται πάνω στο συμπέρασμα που εξάγεται από την εμπειρία. Σύμφωνα με αυτό ορισμένα γεγονότα είναι πιθανό να συμβούν σύμφωνα με ένα προβλέψιμο πρότυπο. Για παράδειγμα, αν κάποιος ρίξει ένα νόμισμα κορώνα-γράμματα εκατό φορές, είναι πιθανό, χωρίς να αποδεικνύεται με κανέναν τρόπο, ότι πενήντα φορές θα πέσει γράμματα.

Μέσα σε ένα αρκετά προβλέψιμο περιθώριο βρίσκονται οι παρεκκλίσεις από μια τέτοια πιθανότητα, με συνέπεια η πιθανότητα να γίνεται ένα επεξεργάσιμο υποκατάστατο για δεδομένα που διαφορετικά είναι τελείως άγνωστα. Σε ένα επιχειρησιακό πρόβλημα, εάν τα άγνωστα στοιχεία υποκατασταθούν με πιθανότητες, τότε το περιθώριο λάθους στη λύση του προβλήματος περιορίζεται σε σημαντικό βαθμό χωρίς ωστόσο να εξαλείφεται εντελώς (Λαγαρής, Παπαγεωργίου, & Βόγκλης, 2008), (Βαρδαλής, 2007).

5.5.5 Επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού

Πρόκειται για κλασική μέθοδο επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού. Η βασική της λογική βασίζεται στο ξεκίνημα από μια ακραία δυνατή λύση και στην επαναλαμβανόμενη μετακίνηση προς μια καλύτερη γειτονική ακραία δυνατή λύση, μέχρι να βρεθεί η άριστη λύση (Λαγαρής, Παπαγεωργίου, & Βόγκλης, 2008), (Βαρδαλής, 2007).

Έστω ότι μια βιομηχανία επίπλων κατασκευάζει τραπέζια και καρέκλες. Η κατασκευή και για τα δύο έπιπλα είναι παρόμοια αλλά απαιτούνται διαφορετικές ώρες εργασίας για κάθε προϊόν στα δύο τμήματα της επιχείρησης, το ξυλουργείο και το βαφείο. Για κάθε τραπέζι απαιτούνται 8 ώρες στο ξυλουργείο και 4 ώρες στο βαφείο, ενώ για κάθε καρέκλα απαιτούνται 8 ώρες στο ξυλουργείο και 2 ώρες στο βαφείο. Η βιομηχανία για τον επόμενο μήνα έχει υπολογίσει ότι οι διαθέσιμες ώρες παραγωγής στο ξυλουργείο είναι συνολικά 960, ενώ οι αντίστοιχες ώρες για το βαφείο είναι 400. Για κάθε τραπέζι το μικτό κέρδος της βιομηχανίας είναι 140 € ενώ για κάθε καρέκλα είναι 100 €.

Τι ποσότητες πρέπει να κατασκευάσει η επιχείρηση από τα δύο προϊόντα, ώστε να μεγιστοποιηθεί το κέρδος της; Ας θεωρηθεί ότι δεν υπάρχει τρέχον απόθεμα προϊόντων και ότι η ζήτηση μπορεί να απορροφήσει κάθε ποσότητα που μπορεί να παραχθεί.

Δημιουργούνται οι εξής μεταβλητές:

1. X_1= ποσότητα τραπεζιών.
2. X_2= ποσότητα καρεκλών που πρέπει παραχθεί, για να μεγιστοποιηθεί το κέρδος της επιχείρησης.

Πίνακας 5.1: Πίνακας δεδομένων προβλήματος με την μέθοδο Simplex.

Τμήμα παραγωγής	Απαιτούμενες ώρες για την παραγωγή μίας μονάδας		Διαθέσιμες ώρες το μήνα
	X_1 (τραπέζια)	X_2 (καρέκλες)	
Ξυλουργείο	8 ώρες	8 ώρες	960 ώρες
Βαφείο	4 ώρες	2 ώρες	400 ώρες
Κέρδος ανά μονάδα προϊόντος	140 €	100 €	

Η Αντικειμενική συνάρτηση που προκύπτει είναι η εξής:

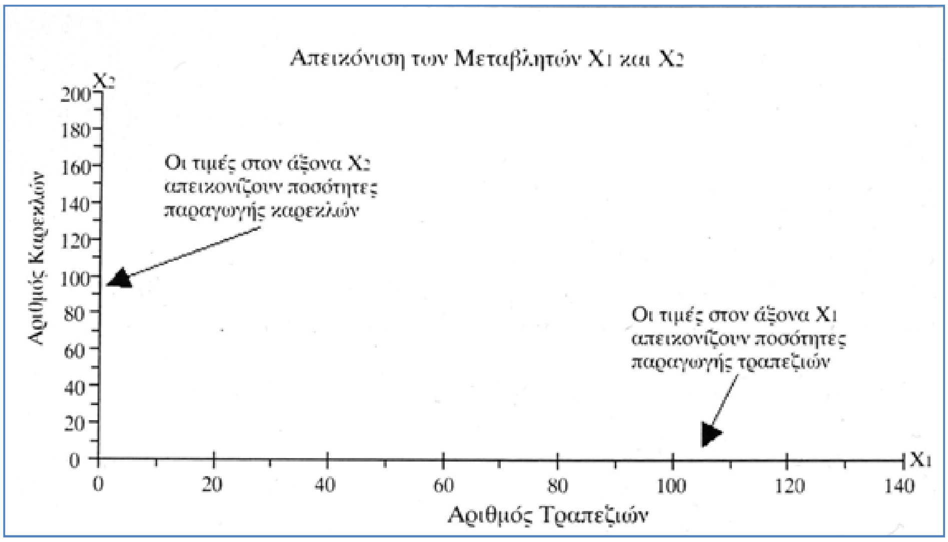
$$Συνολικό\ Κέρδος = 140X_1 + 100X_2$$

Και οι περιορισμοί είναι οι εξής:

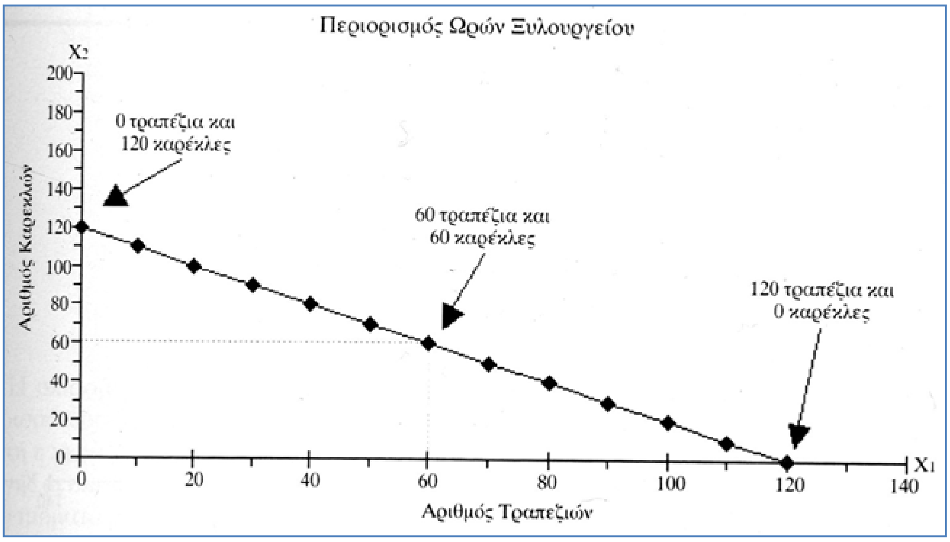
1. $Περιορισμός\ ξυλουργείου$: $8X_1 + 8X_2 \leq 960$ ($απαιτούμενες\ ώρες\ \leq\ διαθέσιμες$)
2. $Περιορισμός\ βαφείου$: $4X_1 + 2X_2 \leq 400$ ($απαιτούμενες\ ώρες\ \leq\ διαθέσιμες$)
3. $X_1 \geq 0\ και\ X_2 \geq 0$

5.5.5.1 Γραφική μέθοδος επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού

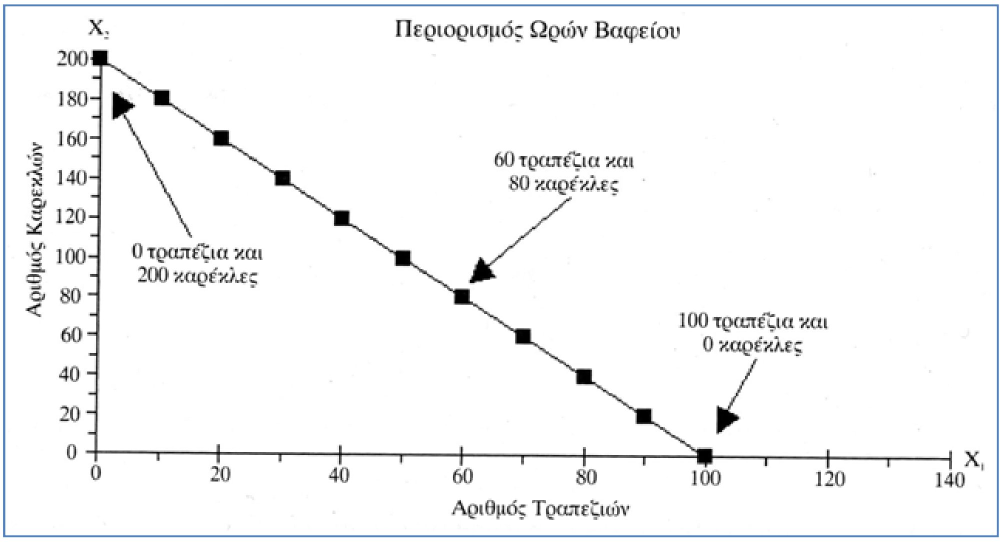
Στα παρακάτω σχήματα φαίνεται η λύση του παραπάνω προβλήματος με γραφική μέθοδο επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού (Βαρδαλής, 2007):



Σχήμα 5.1: Απεικόνιση των μεταβλητών X_1 και X_2 με τη γραφική μέθοδο επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού.

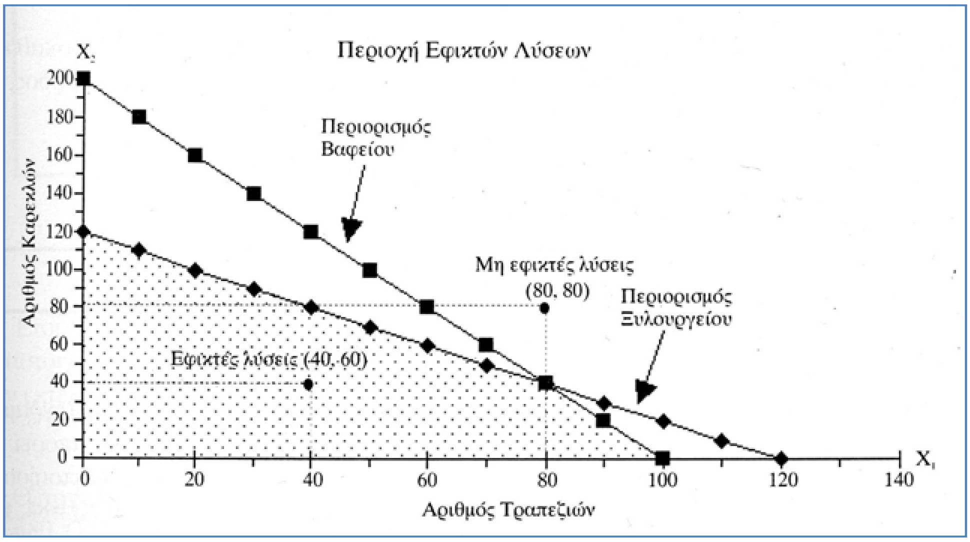


Σχήμα 5.2: Περιορισμός Ωρών Ξυλουργείου με τη γραφική μέθοδο επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού.



Σχήμα 5.3: Περιορισμός Ωρών Βαφείου με τη γραφική μέθοδο επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού.

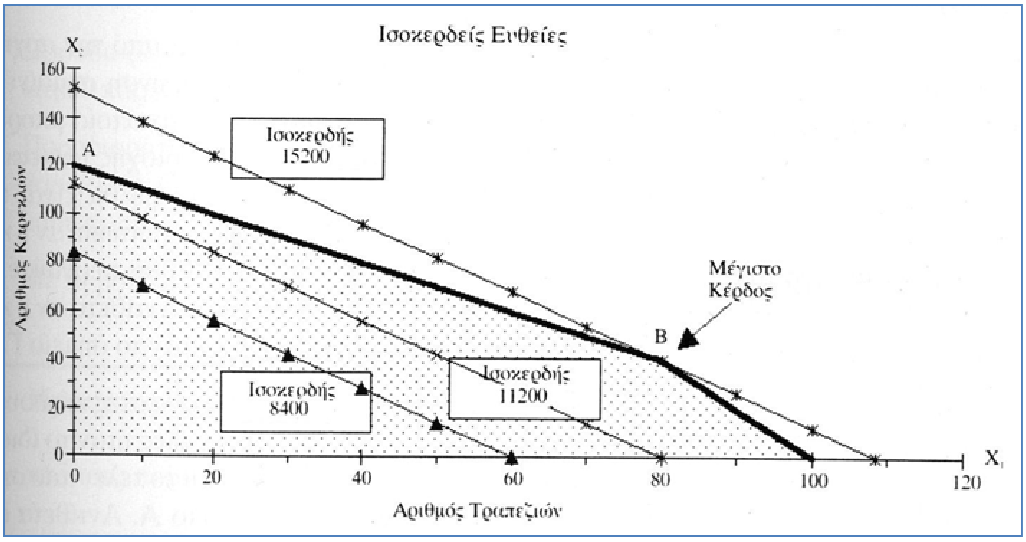
Γραφική απεικόνιση και των δύο περιορισμών:



Σχήμα 5.4: Περιοχή εφικτών λύσεων με τη γραφική μέθοδο επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού.

Καταγράφεται μία τυχαία επιλογή, έστω: 8400. Και διερευνάται ποιες λύσεις δίνουν κέρδος 8400. Η απάντηση είναι όλες οι λύσεις που ικανοποιούν τη συνάρτηση (εξίσωση): $140X_1 + 100X_2 = 8400$.

Θέτοντας $X_1 = 0$ το $X_2 = 84$ και για $X_2 = 0$, τότε $X_1 = 60$.



Σχήμα 5.5: Ισοκερδείς Ευθείες.

Η διαδικασία βελτίωσης λύσης είναι η εξής: μετακίνηση προς τα δεξιά παράλληλα της ισοκερδούς ευθείας, ώστε να εφάπτεται στο ακρότατο B $(X_1 = 80, X_2 = 40)$, εξαντλώντας όλα τα περιθώρια (περιορισμούς) των εφικτών λύσεων.

$$140 * 80 + 100 * 40 = 11200 + 4000 = 15200$$

5.5.5.2 Επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού με Simplex

Αρχικά οι ανισότητες μετατρέπονται σε ισότητες με τη χρήση των μεταβλητών περιθωρίου (slack variables)[21] (Ντόβας, 2016):

- S_1 = ώρες ξυλουργείου (από τις διαθέσιμες) που δεν θα χρησιμοποιηθούν στην παραγωγή καρεκλών και τραπεζιών
- S_2 = ώρες βαφείου (από τις διαθέσιμες) που δεν θα χρησιμοποιηθούν στην παραγωγή καρεκλών και τραπεζιών

Έπειτα γίνεται καταγραφή των περιορισμών και της μεγιστοποίησης:

a) Περιορισμός ξυλουργείου: $8X_1 + 8X_2 + S_1 = 960$
b) Περιορισμός βαφείου: $4X_1 + 2X_2 + S_2 = 400$
c) Περιορισμός ξυλουργείου: $8X_1 + 8X_2 + 1S_1 + 0S_2 = 960$
d) Περιορισμός βαφείου: $4X_1 + 2X_2 + 0S_1 + 1S_2 = 400$
e) Μεγιστοποίηση: $140X_1 + 100X_2 + 0S_1 + 0S_2$ (Αντικειμενική συνάρτηση).

Ο παρακάτω πίνακας συμπληρώνεται από τις εξισώσεις/συναρτήσεις των περιορισμών του ξυλουργείου και του βαφείου.

Βασικές μεταβλητές	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{S_1}$	$\mathbf{S_2}$	$\mathbf{B_i}$
$\mathbf{S_1}$	8	8	1	0	960
$\mathbf{S_2}$	4	2	0	1	400

[21]Μεταβλητές περιθωρίου.

1ο. Αρχικός πίνακας Simplex[22]

Πρώτα φτιάχνουμε πίνακα συσχέτισης των Τμημάτων παραγωγής (Ξυλουργείο, Βαφείο) με τις απαιτούμενες ώρες για την παραγωγή μίας μονάδας αλλά και τις Διαθέσιμες ώρες το μήνα (Ντόβας, 2016).

Τμήμα παραγωγής	Απαιτούμενες ώρες για την παραγωγή μίας μονάδας		Διαθέσιμες ώρες το μήνα
	$\mathbf{X_1}$ (τραπέζια)	$\mathbf{X_2}$ (καρέκλες)	
Ξυλουργείο	8 ώρες	8 ώρες	960 ώρες
Βαφείο	4 ώρες	2 ώρες	400 ώρες
Κέρδος ανά μονάδα προϊόντος	140 €	100 €	

Έπειτα προσθέτουμε στον παραπάνω πίνακα τους Συντελεστές Κέρδους και τις Βασικές και Μη μεταβλητές. Οι μεταβλητές X_1 και X_2 είναι Μη βασικές μεταβλητές, οι μεταβλητές S_1 και S_2 είναι Βασικές μεταβλητές, και τέλος ο αριθμός των βασικών μεταβλητών ισούται με τον αριθμό των περιορισμών του προβλήματος.

Πίνακας 5.2: Αρχικός πίνακας Simplex.

Συντελ. Κέρδους	**Cj →**	**140**	**100**	**0**	**0**	**Ποσότητα**
↓	Βασικές μεταβλητές	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{S_1}$	$\mathbf{S_2}$	$\mathbf{B_i}$
0	$\mathbf{S_1}$	8	8	1	0	960
0	$\mathbf{S_2}$	4	2	0	1	400
	Zj	0	0	0	0	0
	Cj-Zj	140	100	0	0	

Πηγή: (Ντόβας, 2016).

Από τον πίνακα απορρέουν οι παρακάτω συντελεστές:

- Οι συντελεστές των βασικών μεταβλητών στην αντικειμενική συνάρτηση είναι οι Συντελεστές Κέρδους (0,0) (μωβ χρώμα στον πίνακα).
- Οι συντελεστές των μεταβλητών (αγνώστων) στην αντικειμενική συνάρτηση (140, 100, 0, 0) (γκρι χρώμα στον πίνακα) (μία μονάδα $\mathbf{X_1}$ αποφέρει επιπλέον κέρδος 140).
- Οι συντελεστές των μεταβλητών (αγνώστων) στις εξισώσεις των περιορισμών (κυρίως πίνακας) (πράσινο χρώμα στον πίνακα).
- Συντελεστές ανταλλαγής: για να αυξηθεί η τιμή της $\mathbf{X_2}$ κατά μία μονάδα (δηλαδή για να παραχθεί μία καρέκλα)), πρέπει να μειωθούν οι τιμές των $\mathbf{S_1}$ και $\mathbf{S_2}$ κατά 8 και 2 μονάδες αντίστοιχα (δηλαδή να ελαττωθούν οι μη διαθέσιμες ώρες στο ξυλουργείο και στο βαφείο) (8,2) (κόκκινοι αριθμοί στο πράσινο χρώμα στον πίνακα).

[22] Κάθε πίνακας Simplex αντιστοιχεί σε μια εφικτή λύση του προβλήματος.

- Το Zj δείχνει τη μείωση του συνολικού κέρδους λόγω της αύξησης της τιμής της κάθε μεταβλητής κατά μία μονάδα.
- Το Cj-Zj δείχνει τη μείωση του συνολικού κέρδους λόγω της αύξησης της τιμής της κάθε μιας μη βασικής μεταβλητής κατά μία μονάδα. Αν όλες οι τιμές της σειράς είναι αρνητικές ή μηδενικές, τότε η λύση είναι η άριστη. Αν υπάρχουν θετικές τιμές, μπορεί να υπάρξει περαιτέρω βελτίωση του κέρδους (εφόσον αυξηθεί η τιμή της συγκεκριμένης μεταβλητής με θετικό Cj-Zj.
- Το Zj προκύπτει από το άθροισμα των γινομένων των συντελεστών των ΒΜ με τους συντελεστές των αγνώστων στην αντίστοιχη στήλη

Λύση

- **ΒΗΜΑ** 1^{ο}: Επιλέγουμε τη μη βασική μεταβλητή ($\mathbf{X_1}$ ή $\mathbf{X_2}$) που έχει τη μεγαλύτερη θετική τιμή στη σειρά Cj-Zj, δηλαδή την $\mathbf{X_1}$. Η στήλη της $\mathbf{X_1}$ λέγεται οδηγός στήλη.

Συντελ. Κέρδους	**Cj →**	**140**	**100**	**0**	**0**	**Ποσότητα**
↓	Βασικές μεταβλητές	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{S_1}$	$\mathbf{S_2}$	$\mathbf{B_i}$
0	$\mathbf{S_1}$	8	8	1	0	960
0	$\mathbf{S_2}$	4	2	0	1	400
	Zj	0	0	0	0	0
	Cj-Zj	140	100	0	0	

- **ΒΗΜΑ** 2^{ο}: Διαιρούμε τα στοιχεία της στήλης της ποσότητας με τα αντίστοιχα της οδηγού στήλης. Το μικρότερο θετικό κλάσμα είναι η μεταβλητή που θα αντικατασταθεί και η σειρά της είναι η οδηγός σειρά. Η τομή τους είναι το οδηγό στοιχείο.

Συντελ. Κέρδους	**Cj →**	**140**	**100**	**0**	**0**	**Ποσότητα**
↓	Βασικές μεταβλητές	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{S_1}$	$\mathbf{S_2}$	$\mathbf{B_i}$
0	$\mathbf{S_1}$	8	8	1	0	960
0	$\mathbf{S_2}$	4	2	0	1	400
	Zj	0	0	0	0	0
	Cj-Zj	140	100	0	0	

960/8=120, 400/4=100

Έτσι προκύπτει το Οδηγό στοιχείο: 4

- **ΒΗΜΑ** 3^{ο}: Η $\mathbf{X_1}$θα αντικαταστήσει την $\mathbf{S_2}$. Αντικαθιστούμε την οδηγό σειρά, διαιρώντας τα στοιχεία της με το οδηγό στοιχείο (το 4).

Συντελ. Κέρδους	**Cj →**	**140**	**100**	**0**	**0**	**Ποσότητα**
↓	Βασικές μεταβλητές	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{S_1}$	$\mathbf{S_2}$	$\mathbf{B_i}$
0	$\mathbf{S_1}$	8	8	1	0	960
140	$\mathbf{X_1}$	4/4=1	2/4=1/2	0/4=0	1/4	400/4=100

	Zj	0	0	0	0	0
	Cj-Zj	140	100	0	0	

- **ΒΗΜΑ 4^{ο}**: Υπολογίζουμε τις νέες τιμές κάθε σειράς, εκτός της οδηγού σειράς, ως εξής: Νέα σειρά = Προηγούμενη σειρά – Στοιχείο της οδηγού στήλης X Νέα οδηγός σειρά.

Συντελ. Κέρδους	**Cj →**	**140**	**100**	**0**	**0**	**Ποσότητα**
↓	Βασικές μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	B_i
0	S_1	8-8*1=0	8-8*1/2=4	1-8*0=1	0-8*1/4=-2	960-8*100=160
140	X_1	4/4=1	2/4=1/2	0/4=0	1/4	400/4=100
	Zj	0	0	0	0	0
	Cj-Zj	140	100	0	0	

- **ΒΗΜΑ 5^{ο}:** Υπολογίζουμε τις νέες τιμές για τις σειρές Zj και Cj-Zj. Για τη σειρά Zj, σε κάθε στήλη, προσθέτουμε το γινόμενο των συντελεστών των βασικών μεταβλητών επί τα αντίστοιχα στοιχεία της στήλης.

Συντελ. Κέρδους	**Cj →**	**140**	**100**	**0**	**0**	**Ποσότητα**
↓	Βασικές μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	B_i
0	S_1	0	4	1	-2	160
140	X_1	1	1/2	0	1/4	100
	Zj	0*0+140*1 = 140	0*4+140*1/2 = 70	0*1+140*0 = 0	0*(-2) + 140*1/4 =35	0*160+140*100 = 14000
	Cj-Zj	140	100	0	0	

Υπολογίζουμε τις νέες τιμές για τις σειρές Cj και Cj-Zj. Για τη σειρά Cj-Zj, κάνουμε την αφαίρεση ανά στήλη.

Συντελ. Κέρδους	**Cj →**	**140**	**100**	**0**	**0**	**Ποσότητα**
↓	Βασικές μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	B_i
0	S_1	0	4	1	-2	160
140	X_1	1	1/2	0	1/4	100
	Zj	140	70	0	35	14000
	Cj-Zj	140-140=0	100-70=30	0-0=0	0-35=-35	

Ο υπολογισμός του κέρδους που αντιστοιχεί στη λύση του τρέχοντος πίνακα, γίνεται με την άθροιση των γινομένων της τελευταίας στήλης που δίνει τις τιμές των μεταβλητών με τους συντελεστές κέρδους των βασικών μεταβλητών: (Κέρδος=160 x 0 + 100 x 140 = 14000).

2ο. Δεύτερος πίνακας Simplex

Ο δεύτερος πίνακας Simplex προκύπτει μετά την ολοκλήρωση όλων των υπολογισμών (Ντόβας, 2016).

Πίνακας 5.3: Ο δεύτερος πίνακας Simplex.

Συντελ. Κέρδους	**Cj →**	**140**	**100**	**0**	**0**	**Ποσότητα**
↓	Βασικές μεταβλητές	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{S_1}$	$\mathbf{S_2}$	$\mathbf{B_i}$
0	$\mathbf{S_1}$	0	4	1	-2	160
140	$\mathbf{X_1}$	1	1/2	0	1/4	100
	Zj	140	70	0	35	14000
	Cj-Zj	0	30	0	-35	

Πηγή: (Ντόβας, 2016).

3ο. Κατασκευή Τρίτου πίνακα Simplex

Προκειμένου να κατασκευάσουμε τον τρίτο πίνακα Simplex, επαναλαμβάνουμε τα προηγούμενα πέντε βήματα:

a) ΒΗΜΑ 1^{o}: Επιλέγουμε τη μη βασική μεταβλητή ($\mathbf{X_1}$ ή $\mathbf{X_2}$) που έχει τη μεγαλύτερη θετική τιμή στη σειρά Cj-Zj, δηλ την $\mathbf{X_2}$. Η στήλη της $\mathbf{X_2}$ λέγεται οδηγός στήλη.

Συντελ. Κέρδους	**Cj →**	**140**	**100**	**0**	**0**	**Ποσότητα**
↓	Βασικές μεταβλητές	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{S_1}$	$\mathbf{S_2}$	$\mathbf{B_i}$
0	$\mathbf{S_1}$	0	4	1	-2	160
140	$\mathbf{X_1}$	1	1/2	0	1/4	100
	Zj	140	70	0	35	14000
	Cj-Zj	0	30	0	-35	

b) ΒΗΜΑ 2^{o}: Διαιρούμε τα στοιχεία της στήλης της ποσότητας με τα αντίστοιχα της οδηγού στήλης (160/4=40, 100/0,5=200). Το μικρότερο θετικό κλάσμα είναι η μεταβλητή που θα αντικατασταθεί και η σειρά της είναι η οδηγός σειρά. Η τομή τους είναι το οδηγό στοιχείο.

Συντελ. Κέρδους	**Cj →**	**140**	**100**	**0**	**0**	**Ποσότητα**
↓	Βασικές μεταβλητές	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{S_1}$	$\mathbf{S_2}$	$\mathbf{B_i}$

0	**S_1**	0	4	1	-2	160
140	**X_1**	1	1/2	0	1/4	100
	Zj	140	70	0	35	14000
	Cj-Zj	0	30	0	-35	

c) ΒΗΜΑ 3°: Η $\mathbf{X_2}$ θα αντικαταστήσει την $\mathbf{S_1}$. Αντικαθιστούμε την οδηγό σειρά, διαιρώντας τα στοιχεία της με το οδηγό στοιχείο (το 4).

Συντελ. Κέρδους	**Cj →**	**140**	**100**	**0**	**0**	**Ποσότητα**
↓	Βασικές μεταβλητές	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**B_i**
100	**X_2**	0/4=0	4/4=1	1/4	-2/4=-1/2	160/4=40
140	**X_1**	1	1/2	0	1/4	100
	Zj	140	70	0	35	14000
	Cj-Zj	0	30	0	-35	

d) ΒΗΜΑ 4°: Υπολογίζουμε τις νέες τιμές κάθε σειράς, εκτός της οδηγού σειράς, ως εξής: Νέα σειρά = Προηγούμενη σειρά – Στοιχείο της οδηγού στήλης Χ Νέα οδηγός σειρά.

Συντελ. Κέρδους	**Cj →**	**140**	**100**	**0**	**0**	**Ποσότητα**
↓	Βασικές μεταβλητές	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**B_i**
100	**X_2**	0/4=0	4/4=1	1/4	-2/4=-1/2	160/4=40
140	**X_1**	1-(1/2)*0=1	1/2-(1/2)*1=0	0-(1/2)*1/4=1/8	1/4-(1/2)*(-1/2)=1/2	100-(1/2)*40=80
	Zj	140	70	0	35	14000
	Cj-Zj	0	30	0	-35	

Τις νέες τιμές για τις σειρές Cj και Cj-Zj:

Συντελ. Κέρδους	**Cj →**	**140**	**100**	**0**	**0**	**Ποσότητα**
↓	Βασικές μεταβλητές	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**B_i**
100	**X_2**	0	1	1/4	-1/2	40
140	**X_1**	1	0	1/8	1/2	80
	Zj	0*100+140*1=140	1*100+140*0=100	1/4*100+140*(-1/8)=7,5	-1/2*100+140*1/2=20	40*100+140*80=15200
	Cj-Zj	0	30	0	-35	

Συντελ. Κέρδους	Cj →	140	100	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	B_i
100	X_2	0	1	1/4	-1/2	40
140	X_1	1	0	1/8	1/2	80
	Zj	140	100	7,5	20	15200
	Cj-Zj	140-140=0	100-100=0	0-7,5=-7,5	0-20=-20	

4ο. Τελικός πίνακας Simplex

Ο τελικός πίνακας Simplex προκύπτει μετά την ολοκλήρωση όλων των υπολογισμών (Ντόβας, 2016).

Πίνακας 5.4: Τελικός πίνακας Simplex.

Συντελ. Κέρδους	Cj →	140	100	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	B_i
100	X_2	0	1	1/4	-1/2	40
140	X_1	1	0	1/8	1/2	80
	Zj	140	100	7,5	20	15200
	Cj-Zj	0	0	-7,5	-20	

Πηγή: (Ντόβας, 2016).

Και εξάγονται τα εξής συμπεράσματα:

- Η σειρά Cj-Zj δεν περιέχει θετικά στοιχεία, συνεπώς δεν είναι δυνατό να υπάρξει περαιτέρω αύξηση του κέρδους (γραμμοσκιασμένο με πράσινο χρώμα).
- Οι βασικές μεταβλητές είναι οι X_1 και X_2 και οι τιμές τους δίνονται στις αντίστοιχες θέσεις της τελευταίας στήλης (ποσότητα) (γραμμοσκιασμένο με κίτρινο χρώμα).
- Επομένως η άριστη λύση είναι: X_1 = 80 τραπέζια, X_2= 40 καρέκλες, S_1 = 0 διαθέσιμες ώρες στο ξυλουργείο, S_2 = 0 διαθέσιμες ώρες στο βαφείο. Αυτός ο συνδυασμός παραγωγής αποφέρει μέγιστο κέρδος 15200.

5ο. Συγκεντρωτικά αποτελέσματα των τριών διαδοχικών πινάκων Simplex:

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται τα αποτελέσματα των τριών διαδοχικών πινάκων Simplex.

Πίνακας 5.5: Αποτελέσματα των τριών διαδοχικών πινάκων Simplex.

Βασικές μεταβλητές	Αποτελέσματα των τριών διαδοχικών πινάκων Simplex		
	Αρχικός	**Δεύτερος**	**Τελικός**
Τραπέζια: X_1	**0**	**100**	**80**

Καρέκλες: X_2	**0**	**0**	**40**
Διαθέσιμες (μη χρησιμοποιηθείσες) ώρες ξυλουργείου: S_1	**960**	**160**	**0**
Διαθέσιμες (μη χρησιμοποιηθείσες) ώρες βαφείου: S_2	**400**	**0**	**0**
Κέρδος	**0**	**14000**	**15200**

Πηγή: (Ντόβας, 2016).

Παρατηρείται ότι σε κάθε επανάληψη του πίνακα, η λύση είναι καλύτερη από την προηγούμενη ως προς την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

6 ΚΕΦΑΛΑΙΟ: «ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ»

Η ανάπτυξη του γραμμικού προγραμματισμού για πολλούς είναι μια από τις πιο σπουδαίες επιστημονικές ανακαλύψεις στα μέσα του εικοστού αιώνα. Πράγματι από το 1950 η επίδρασή του ήταν πολύ σημαντική. Πλέον είναι ένα πρότυπο εργαλείο, που χρησιμοποιείται στις περισσότερες μεσαίου και μεγάλου μεγέθους εμπορικές και βιομηχανικές επιχειρήσεις των βιομηχανικών χωρών.

Σε άλλους τομείς της κοινωνίας η χρήση του έχει επεκταθεί με ταχύτατο ρυθμό. Συνεπώς, ο γραμμικός προγραμματισμός επιδιώκει την κατανομή των περιορισμένων πόρων μεταξύ ανταγωνιζόμενων δραστηριοτήτων κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο. Αυτό το πρόβλημα προκύπτει όταν κάποιος αναγκάζεται να επιλέξει το επίπεδο ορισμένων δραστηριοτήτων ανταγωνιστικών για περιορισμένους πόρους, που είναι αναγκαίοι για την εκτέλεσή τους.

Σε διάφορες δραστηριότητες οι περιπτώσεις κατανομής πόρων είναι πολλές, όπως π.χ. είναι η κατανομή των μέσων παραγωγής στα προϊόντα, η κατανομή των εθνικών πόρων στις εγχώριες ανάγκες, η επιλογή του χαρτοφυλακίου επενδύσεων, ο προγραμματισμός της γεωργικής παραγωγή μιας χώρας, κ.ά. Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις το κοινό χαρακτηριστικό τους είναι η ανάγκη για την κατανομή των περιορισμένων πόρων στις ανταγωνιζόμενες δραστηριότητες.

Για να περιγραφεί το πρόβλημα που εξετάζεται ο γραμμικός προγραμματισμός χρησιμοποιεί ένα μαθηματικό μοντέλο. Με τον όρο «γραμμικό» εννοείται ότι όλες οι μαθηματικές συναρτήσεις στο μοντέλο πρέπει να είναι γραμμικές. Η λέξη «προγραμματισμός» είναι συνώνυμη της λέξης «σχεδίασης» και δεν αναφέρεται στον προγραμματισμό των ηλεκτρονικών υπολογιστών».

Έτσι ο γραμμικός προγραμματισμός έχει σχέση με τη σχεδίαση των δραστηριοτήτων ώστε να προκύψει το βέλτιστο αποτέλεσμα, δηλαδή εκείνο που μεταξύ όλων των δυνατών εναλλακτικών λύσεων, ικανοποιεί τον προκαθορισμένο σκοπό κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο (Δινοπούλου & Χιωτίδης, 2012), (Ζησιμόπουλος, 2007).

Ακολουθούν παραδείγματα προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού.

6.1 Παράδειγμα 1^{ο}

Ας θεωρηθεί ότι μια ασφαλιστική εταιρεία διαθέτει ένα κεφάλαιο 100000 χρηματικών μονάδων το οποίο μπορεί να επενδύσει με δύο διαφορετικούς τρόπους: την επένδυση τύπου X και την επένδυση τύπου Y. Με την επένδυση τύπου X δίνεται ετήσιο εισόδημα (τόκοι) 10% ενώ με την επένδυση τύπου Y δίνεται ετήσιο εισόδημα 15%. Η εκλογή της εταιρείας περιορίζεται από την κυβέρνηση που επιβάλει να επενδυθεί τουλάχιστον το 25% του κεφαλαίου στην επένδυση τύπου X. Επίσης η πολιτική της εταιρείας είναι ότι η αναλογία του κεφαλαίου που επενδύεται στην επένδυση τύπου Y προς το κεφάλαιο που επενδύεται στην επένδυση τύπου X δεν πρέπει να είναι μεγαλύτερη του 1,5:1. Πώς πρέπει η εταιρεία να επενδύσει το κεφάλαιό της; Να διατυπωθεί το πρόβλημα σαν πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού και να ευρεθεί η λύση με τη χρήση της μεθόδου Simplex (Κολέτσος, Παραδείγματα Μεθόδου Simplex, 2016).

Λύση:

Οι X_1 και X_2 μεταβλητές απόφασης είναι τα κεφάλαια σε χρηματικές μονάδες που θα επενδύσει η εταιρεία στην επένδυση τύπου Χ και στην επένδυση τύπου Υ αντίστοιχα. Η αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος είναι:

$$\max Z = 0{,}1X_1 + 0{,}5X_2$$

Με τους περιορισμούς:

- $X_1 + X_2 \leq 100.000$

- $\frac{X_1}{X_1+X_2} \geq 0{,}25 \Rightarrow X_1 \geq 0{,}25X_1 + 0{,}25X_2 \Rightarrow -0{,}75X_1 + 0{,}25X_2 \leq 0$

$$\text{ή} -\frac{3}{4}X_1 + \frac{1}{4}X_2 \leq 0$$

- $\frac{X_2}{X_1} \leq 1{,}5 \Rightarrow X_2 \leq 1{,}5X_1 \Rightarrow X_2 - 1{,}5X_1 \leq 0$

Το πρόβλημα με την είσοδο των βοηθητικών μεταβλητών S_1, S_2, S_3 σε τυποποιημένη μορφή εκφράζεται ως εξής:

- $X_1 + X_2 + S_1 + 0S_2 + 0S_3 \leq 100.000$

- $-\frac{3}{4}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + 0S_1 + S_2 + 0S_3 \leq 0$

- $X_2 - 1{,}5X_1 + 0S_1 + 0S_2 + S_3 \leq 0$

$$Z = 0{,}1X_1 + 0{,}15X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

1ο. Αρχικός πίνακας Simplex

Πρώτα φτιάχνουμε πίνακα συσχέτισης.

Πίνακας 6.1: Πίνακας συσχέτισης.

Βασικές μεταβλητές	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{S_1}$	$\mathbf{S_2}$	$\mathbf{S_3}$	$\mathbf{B_i}$
$\mathbf{S_1}$	1	1	1	0	0	100.000
$\mathbf{S_2}$	-0,75	0,25	0	1	0	0
$\mathbf{S_3}$	-1,5	1	0	0	1	0

Προσθέτουμε στον παραπάνω πίνακα τους Συντελεστές Κέρδους και τους συντελεστές των Βασικών και Μη μεταβλητών. Οι μεταβλητές X_1 και X_2 είναι Μη βασικές μεταβλητές, οι μεταβλητές S_1, S_2 και S_3 είναι Βασικές μεταβλητές, και τέλος ο αριθμός των βασικών μεταβλητών ισούται με τον αριθμό των περιορισμών του προβλήματος.

Ο πρώτος πίνακας Simplex έχει την παρακάτω μορφή (με κίτρινα γραμμοσκιασμένα είναι η οδηγός γραμμή, η οδηγός στήλη και το σημείο τομής των παραπάνω αποτελεί το οδηγό στοιχείο: 0,25)[23]:

Πίνακας 6.2: Πρώτος πίνακας Simplex.

Συντελ. Κέρδους	**Cj →**	**0,1**	**0,15**	**0**	**0**	**0**	**Ποσότητα**
↓	Βασικές μεταβλητές	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{S_1}$	$\mathbf{S_2}$	$\mathbf{S_3}$	$\mathbf{B_i}$
0	$\mathbf{S_1}$	1	1	1	0	0	100.000
0	$\mathbf{S_2}$	-0,75	**0,25**	0	1	0	0
0	$\mathbf{S_3}$	-1,5	1	0	0	1	0
	Zj	0	0	0	0	0	0
	Cj-Zj	0,1	0,15	0	0	0	

Από τον πίνακα απορρέουν οι παρακάτω συντελεστές:

- Οι συντελεστές των βασικών μεταβλητών στην αντικειμενική συνάρτηση είναι οι Συντελεστές Κέρδους (0,0,0) (μωβ χρώμα στον πίνακα).
- Οι συντελεστές των μεταβλητών (αγνώστων) στην αντικειμενική συνάρτηση (0.1, 0.15, 0, 0,0) (γκρι χρώμα στον πίνακα).
- Οι συντελεστές των μεταβλητών (αγνώστων) στις εξισώσεις των περιορισμών (κυρίως πίνακας) (πράσινο χρώμα στον πίνακα).
- Το Zj δείχνει τη μείωση του συνολικού κέρδους λόγω της αύξησης της τιμής της κάθε μεταβλητής κατά μία μονάδα.
- Το Cj-Zj δείχνει τη μείωση του συνολικού κέρδους λόγω της αύξησης της τιμής της κάθε μιας μη βασικής μεταβλητής κατά μία μονάδα. Αν όλες οι τιμές της σειράς είναι αρνητικές ή μηδενικές, τότε η λύση είναι η άριστη. Αν υπάρχουν θετικές τιμές, μπορεί να υπάρξει περαιτέρω βελτίωση του κέρδους (εφόσον αυξηθεί η τιμή της συγκεκριμένης μεταβλητής με θετικό Cj-Zj.
- Το Zj προκύπτει από το άθροισμα των γινομένων των συντελεστών των ΒΜ με τους συντελεστές των αγνώστων στην αντίστοιχη στήλη

2ο. Δεύτερος πίνακας Simplex

- **ΒΗΜΑ** 1^o: Επιλέγουμε τη μη βασική μεταβλητή ($\mathbf{X_1}$ ή $\mathbf{X_2}$) που έχει τη μεγαλύτερη θετική τιμή στη σειρά Cj-Zj, δηλαδή την $\mathbf{X_2}$. Η στήλη της $\mathbf{X_2}$ λέγεται οδηγός στήλη.
- **ΒΗΜΑ** 2^o: Διαιρούμε τα στοιχεία της στήλης της ποσότητας με τα αντίστοιχα της οδηγού στήλης. Το μικρότερο θετικό κλάσμα είναι η μεταβλητή που θα αντικατασταθεί και η σειρά της είναι η οδηγός σειρά. Η τομή τους είναι το οδηγό στοιχείο. Κάθε στοιχείο της οδηγού γραμμής διαιρείται με το οδηγό στοιχείο.

[23] Cj: Δηλώνει την μικτή αύξηση στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης όταν μία μη βασική μεταβλητή αυξηθεί κατά μία μονάδα.
Zj: Βέλτιστη λύση για κάθε επανάληψη.

Η οδηγός γραμμή γίνεται:

$$\frac{-0{,}75}{0{,}25} \quad \frac{0{,}25}{0{,}25} \quad \frac{0}{0{,}25} \quad \frac{1}{0{,}25} \quad \frac{0}{0{,}25} \quad ή$$

$$\mathbf{-3} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{4} \quad \mathbf{0}$$

Έτσι δημιουργείται ο ενδιάμεσος πίνακας:

Πίνακας 6.3: Ενδιάμεσος πίνακας Simplex.

Συντελ. Κέρδους	**Cj →**	**0,1**	**0,15**	**0**	**0**	**0**	**Ποσότητα**
↓	Βασικές μεταβλητές	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{S_1}$	$\mathbf{S_2}$	$\mathbf{S_3}$	$\mathbf{B_i}$
0	$\mathbf{S_1}$	1	1	1	0	0	100.000
0	$\mathbf{X_2}$	-3	1	0	4	0	0
0	$\mathbf{S_3}$	-1,5	1	0	0	1	0
	Zj	0	0	0	0	0	0
	Cj-Zj	0,1	0,15	0	0	0	

Για τις υπόλοιπες γραμμές (εκτός της οδηγού) εφαρμόζουμε τον παρακάτω κανόνα:

$$Νέο\ στοιχείο\ =\ Προηγούμενο\ στοιχείο - Στοιχείο\ οδηγού\ στήλης \times νέα\ οδηγός\ σειρά$$

Και ο δεύτερος πίνακας Simplex προκύπτει μετά την ολοκλήρωση όλων των υπολογισμών:

Πίνακας 6.4: Δεύτερος πίνακας Simplex.

Συντελ. Κέρδους	**Cj →**	**0,1**	**0,15**	**0**	**0**	**0**	**Ποσότητα**
↓	Βασικές μεταβλητές	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{S_1}$	$\mathbf{S_2}$	$\mathbf{S_3}$	$\mathbf{B_i}$
0	$\mathbf{S_1}$	1-1* (-3)=4	1-1*1=0	1-1*0=1	0-1*4=-4	0	100.000-1*0=100.000
0,15	$\mathbf{X_2}$	-3	1	0	4	0	0
0	$\mathbf{S_3}$	-1,5-1*(-3)=1,5	1-1*1=0	0-1*0=0	0-1*4=-4	1-1*0=1	0
	Zj	-0,45	0,15	0	0,6	0	0
	Cj-Zj	0,55	0	0	-0,6	0	

Τα Zj υπολογίζονται πολλαπλασιάζοντας τα στοιχεία της στήλης Συντελεστή Κέρδους με τα στοιχεία της κάθε στήλης και αθροίζοντας ανά στήλη. Έτσι για την 1η στήλη έχουμε: 0,4+0,15*(-3)+0*1,5=-0,45.

Και η σειρά Cj-Zj προκύπτει από την αντίστοιχη αφαίρεση.

Για να φτιάξουμε τον δεύτερο πίνακα Simplex θα πάρουμε οδηγό στήλη την πρώτη (X_1) -διότι έχει την μεγαλύτερη τιμή Cj-Zj - και οδηγό γραμμή την τρίτη (S_3) –διότι το 0/1,5 είναι ο μικρότερος θετικός λόγος- με οδηγό στοιχείο το 1,5.

Πίνακας 6.5: Οδηγός γραμμή και στήλη του 2ου πίνακα Simplex.

Συντελ. Κέρδους	**Cj →**	**0,1**	**0,15**	**0**	**0**	**0**	**Ποσότητα**
↓	Βασικές μεταβλητές	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{S_1}$	$\mathbf{S_2}$	$\mathbf{S_3}$	$\mathbf{B_i}$
0	$\mathbf{S_1}$	4	0	1	-4	0	100.000
0,15	$\mathbf{X_2}$	-3	1	0	4	0	0
0	$\mathbf{S_3}$	1,5	0	0	-4	1	0
	Zj	-0,45	0,15	0	0,6	0	0
	Cj-Zj	0,55	0	0	-0,6	0	

3ο. Τρίτος πίνακας Simplex

Για τον ενδιάμεσο πίνακα αντικαθιστούμε το S_3 με X_1 και διαιρούμε τα στοιχεία της γραμμής με το 1,5 (οδηγό στοιχείο)

Πίνακας 6.6: Ενδιάμεσος πίνακας Simplex.

Συντελ. Κέρδους	**Cj →**	**0,1**	**0,15**	**0**	**0**	**0**	**Ποσότητα**
↓	Βασικές μεταβλητές	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{S_1}$	$\mathbf{S_2}$	$\mathbf{S_3}$	$\mathbf{B_i}$
0	$\mathbf{S_1}$	4	0	1	-4	0	100.000
0,15	$\mathbf{X_2}$	-3	1	0	4	0	0
0,1	$\mathbf{X_1}$	1	0	0	-8/3	2/3	0
	Zj	-0,45	0,15	0	0,6	0	

Και ο τρίτος πίνακας Simplex προκύπτει μετά την ολοκλήρωση όλων των υπολογισμών:

Πίνακας 6.7: Τρίτος πίνακας Simplex.

Συντελ. Κέρδους	**Cj →**	**0,1**	**0,15**	**0**	**0**	**0**	**Ποσότητα**
↓	Βασικές μεταβλητές	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{S_1}$	$\mathbf{S_2}$	$\mathbf{S_3}$	$\mathbf{B_i}$
0	$\mathbf{S_1}$	4-	0-	1-	-4*0=1-	0-	100.000-

		4*1=0	4*0=0	4*0=1	4*(-2/3)=20/3	4*2/3=-8/3	1*=100.000
0,15	**X_2**	-3-(-3)*1=0	1-(-3)*0=1	0-(-3)*0=0	4-(-3)*(-8/3)=-4	0-(-3)*2/3=0	0-(-3)*0=0
0,1	**X_1**	1	0	0	-8/3	2/3	0
	Zj	0,1	0,15	0	-2,6/3	1,1/3	0
	Cj-Zj	0	0	0	2,6/3	-1,1/3	

Επειδή $Cj - Zj = \frac{2,6}{3} > 0$ για την στήλη S_2 πρέπει να γίνει και τέταρτος πίνακας Simplex. Έχουμε οδηγό στήλη την S_2 και οδηγό γραμμή την S_1, οδηγό στοιχείο είναι 20/3 όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 6.8: Οδηγός γραμμή και στήλη του 3ου πίνακα Simplex.

Συντελ. Κέρδους	Cj →	0,1	0,15	0	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές μεταβλητές	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**S_3**	**B_i**
0	**S_1**	0	0	1	20/3	-8/3	100.000
0,15	**X_2**	0	1	0	-4	0	0
0,1	**X_1**	1	0	0	-8/3	2/3	0
	Zj	0,1	0,15	0	-2,6/3	1,1/3	0
	Cj-Zj	0	0	0	2,6/3	-1,1/3	

4ο. Τέταρτος πίνακας Simplex

Για τον ενδιάμεσο πίνακα αντικαθιστούμε το S_1 με S_2 και διαιρούμε τα στοιχεία της γραμμής με το 20/3 (οδηγό στοιχείο).

Πίνακας 6.9: Ενδιάμεσος πίνακας Simplex.

Συντελ. Κέρδους	Cj →	0,1	0,15	0	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές μεταβλητές	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**S_3**	**B_i**
0	**S_2**	0	0	3/20	1	-2/5	15.000
0,15	**X_2**	0	1	0	-4	2	0
0,1	**X_1**	1	0	0	-8/3	2/3	0

Ο τέταρτος (τελικός) πίνακας Simplex προκύπτει μετά την ολοκλήρωση όλων των υπολογισμών και έχει την παρακάτω μορφή:

Πίνακας 6.10: Τέταρτος πίνακας Simplex.

Συντελ.	Cj →	0,1	0,15	0	0	0	Ποσότητα

Κέρδους							
↓	Βασικές μεταβλητές	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{S_1}$	$\mathbf{S_2}$	$\mathbf{S_3}$	$\mathbf{B_i}$
0	$\mathbf{S_2}$	0	0	3/20	1	-2/5	15.000
0,15	$\mathbf{X_2}$	0-(-4*0)=0	1-(-4)*0=1	0-(-4)*3/20=3/5	-4-(-4)*1=0	2-(-4)*(-2/5)=2/5	0-(-4)*15.000=60.000
0,1	$\mathbf{X_1}$	1-(-8/3)*0=1	0-(-8/3)*0=0	0-(-8/3)*3/20=2,5	-8/3-(-8/3)*1=0	2/3-(-8/3)*(-2/5)=-2/5	0-(-8/3)*15.000=40.000
	Zj	0,1	0,15	1,3/10	0	0,2/10	0,15*60.000+0,1*40.000=13.000
	Cj-Zj	0	0	-1,3/10	0	-0,2/10	

Στην γραμμή Cj-Zj δεν υπάρχει κανένας θετικός αριθμός αρά τελειώσαμε.

Διότι η γραμμή Cj-Zj είναι το καθαρό κέρδος και οι θετικές τιμές δηλώνουν ότι μπορεί να βελτιστοποιηθεί.

Η βέλτιστη εφικτή λύση του προβλήματος είναι:

$X_1 = 40000,\ X_2 = 60000,\ S_1 = 0,\ S_2 = 15000,\ S_3 = 0, Z = 13000$

Άρα, η εταιρεία πρέπει να επενδύσει 40000 χρηματικές μονάδες στην επένδυση τύπου X και 60000 χρηματικές μονάδες στην επένδυση τύπου Y για να πετύχει το μέγιστο ετήσιο εισόδημά της που είναι 13000 χρηματικές μονάδες.

6.2 Παράδειγμα 2^o

Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με τη μέθοδο Simplex: $\max Z = 5X_1 - 4X_2$ (Κολέτσος, Παραδείγματα Μεθόδου Simplex, 2016).

Με τους εξής περιορισμούς:

- $X_1 - X_2 \leq 6$
- $3X_1 - 2X_2 \leq 24$
- $-2X_1 + 3X_2 \leq 9$
- $X_1, X_2\ \geq 0$

<u>Λύση:</u>

Πρώτα μετατρέπεται το πρόβλημα σε τυποποιημένη μορφή εισάγοντας τις βοηθητικές μεταβλητές S_1, S_2, S_3, οπότε γίνεται: $\max Z = 5X_1 - 4X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$.

Με τους εξής περιορισμούς:

- $X_1 - X_2 + S_1 \leq 6$
- $3X_1 - 2X_2 + S_2 \leq 24$
- $-2X_1 + 3X_2 + S_3 \leq 9$
- $X_1, X_2, S_1 + S_2 + S_3 \geq 0$

1ο. Αρχικός πίνακας Simplex

Πρώτα φτιάχνουμε πίνακα συσχέτισης:

Πίνακας 6.11: Πίνακας συσχέτισης.

Βασικές μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
S_1	1	-1	1	0	0	6
S_2	3	-2	0	1	0	24
S_3	-2	3	0	0	1	9

Προσθέτουμε στον παραπάνω πίνακα τους Συντελεστές Κέρδους και τους συντελεστές των Βασικών και Μη μεταβλητών. Οι μεταβλητές X_1 και X_2 είναι Μη βασικές μεταβλητές, οι μεταβλητές S_1, S_2 και S_3 είναι Βασικές μεταβλητές, και τέλος ο αριθμός των βασικών μεταβλητών ισούται με τον αριθμό των περιορισμών του προβλήματος.

Ο πρώτος πίνακας Simplex έχει την παρακάτω μορφή:

Πίνακας 6.12: Πρώτος πίνακας Simplex.

Συντ. κέρδους	$C_j \rightarrow$	**5**	**-4**	**0**	**0**	**0**	**Ποσότητα**
↓	Βασικές μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1	1	-1	1	0	0	6
0	S_2	3	-2	0	1	0	24
0	S_3	-2	3	0	0	1	9
0	Z_j	0	0	0	0	0	0
	C_j-Z_j	5	-4	0	0	0	

2ο. Δεύτερος πίνακας Simplex

- **ΒΗΜΑ** 1^o: Επιλέγουμε τη μη βασική μεταβλητή ($\mathbf{X_1}$ ή $\mathbf{X_2}$) που έχει τη μεγαλύτερη θετική τιμή στη σειρά C_j-Z_j, δηλαδή την $\mathbf{X_1}$. Η στήλη της $\mathbf{X_1}$ λέγεται οδηγός στήλη.
- **ΒΗΜΑ** 2^o: Διαιρούμε τα στοιχεία της στήλης της ποσότητας με τα αντίστοιχα της οδηγού στήλης. Το μικρότερο θετικό κλάσμα είναι η μεταβλητή που θα αντικατασταθεί και η σειρά της είναι η οδηγός σειρά. Η τομή τους είναι το οδηγό στοιχείο.
- **ΒΗΜΑ** 3^o: Η $\mathbf{X_1}$θα αντικαταστήσει την $\mathbf{S_1}$. Αντικαθιστούμε την οδηγό σειρά, διαιρώντας τα στοιχεία της με το οδηγό στοιχείο (το 1).
- **ΒΗΜΑ** $\mathbf{4^o}$: Υπολογίζουμε τις νέες τιμές κάθε σειράς, εκτός της οδηγού σειράς, ως εξής: Νέα σειρά = Προηγούμενη σειρά – Στοιχείο της οδηγού στήλης Χ Νέα οδηγός σειρά.
- **ΒΗΜΑ** $\mathbf{5^o}$**:** Υπολογίζουμε τις νέες τιμές για τις σειρές Z_j και C_j-Z_j.

Ο δεύτερος πίνακας Simplex προκύπτει μετά την ολοκλήρωση όλων των υπολογισμών:

Πίνακας 6.13: Δεύτερος πίνακας Simplex.

Συντ. κέρδους	$C_j \rightarrow$	**5**	**-4**	**0**	**0**	**0**	
↓	**Βασικές μεταβλητές**	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	**Ποσότητα**
5	X_1	1	-1	1	0	0	6
0	S_2	0	1	-3	1	0	6
0	S_3	0	1	2	0	0	21
0	Z_j	5	-5	5	0	0	30
	C_j-Z_j	0	1	-5	0	0	

3ο. Τρίτος πίνακας Simplex

Προκειμένου να κατασκευάσουμε τον τρίτο πίνακα (τελικό) Simplex, επαναλαμβάνουμε τα προηγούμενα πέντε βήματα και έχει την παρακάτω μορφή:

Ο τρίτος πίνακας Simplex έχει την παρακάτω μορφή:

Πίνακας 6.14: Τρίτος πίνακας Simplex.

Συντ. κέρδους	$C_j \rightarrow$	**5**	**-4**	**0**	**0**	**0**	
↓	**Βασικές μεταβλητές**	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	**Ποσότητα**
5	X_1	1	0	-2	1	0	12
-4	X_2	0	1	-3	1	0	6
0	S_3	0	0	5	-1	0	15
0	Z_j	5	-4	2	1	0	36
	C_j-Z_j	0	0	-2	-1	0	

Η βέλτιστη εφικτή λύση του προβλήματος είναι:

$$X_1 = 12, \quad X_2 = 6, \quad S_1 = 0, \quad S_2 = 0, \quad S_3 = 15, \quad Z = 36$$

6.3 Παράδειγμα 3ο

Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με τη μέθοδο Simplex: $\max Z = 48X_1 + 60X_2$ (Κολέτσος, Παραδείγματα Μεθόδου Simplex, 2016).

Με τους εξής περιορισμούς:

- $4X_1 + 3X_2 \leq 120$
- $4X_1 + X_2 \leq 80$
- $2X_1 + 4X_2 \leq 120$

- $X_1, X_2 \geq 0$

Λύση:

Αρχικά μετατρέπεται το πρόβλημα σε τυποποιημένη μορφή εισάγοντας τις βοηθητικές μεταβλητές S_1, S_2, S_3, οπότε γίνεται: $\max Z = 48X_1 + 60X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$.

Με τους εξής περιορισμούς:

- $4X_1 + 3X_2 + S_1 \leq 120$
- $4X_1 + X_2 + S_2 \leq 80$
- $2X_1 + 4X_2 + S_3 \leq 120$
- $X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$

1ο. Αρχικός πίνακας Simplex

Πρώτα φτιάχνουμε πίνακα συσχέτισης.

Πίνακας 6.15: Πίνακας συσχέτισης.

Βασικές μεταβλητές	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{S_1}$	$\mathbf{S_2}$	$\mathbf{S_3}$	$\mathbf{B_i}$
$\mathbf{S_1}$	1	-1	1	0	0	6
$\mathbf{S_2}$	3	-2	0	1	0	24
$\mathbf{S_3}$	-2	3	0	0	1	9

Ο πρώτος πίνακας Simplex έχει την παρακάτω μορφή:

Πίνακας 6.16: Πρώτος πίνακας Simplex.

Συντ. κέρδους	$C_j \rightarrow$	**48**	**60**	**0**	**0**	**0**	
↓	**Βασικές μεταβλητές**	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{S_1}$	$\mathbf{S_2}$	$\mathbf{S_3}$	**Ποσότητα**
0	$\mathbf{S_1}$	4	3	1	0	0	120
0	$\mathbf{S_2}$	4	1	0	1	0	80
0	$\mathbf{S_3}$	2	4	0	0	1	120
0	Z_j	0	0	0	0	0	0
	C_j-Z_j	48	60	0	0	0	

2ο. Δεύτερος πίνακας Simplex

- **ΒΗΜΑ** 1^{ο}: Επιλέγουμε τη μη βασική μεταβλητή ($\mathbf{X_1}$ ή $\mathbf{X_2}$) που έχει τη μεγαλύτερη θετική τιμή στη σειρά C_j-Z_j, δηλαδή την $\mathbf{X_2}$. Η στήλη της $\mathbf{X_2}$ λέγεται οδηγός στήλη.
- **ΒΗΜΑ** 2^{ο}: Διαιρούμε τα στοιχεία της στήλης της ποσότητας με τα αντίστοιχα της οδηγού στήλης. Το μικρότερο θετικό κλάσμα είναι η μεταβλητή που θα αντικατασταθεί και η σειρά της είναι η οδηγός σειρά. Η τομή τους είναι το οδηγό στοιχείο.
- **ΒΗΜΑ** 3^{ο}: Η $\mathbf{X_2}$θα αντικαταστήσει την $\mathbf{S_3}$. Αντικαθιστούμε την οδηγό σειρά, διαιρώντας τα στοιχεία της με το οδηγό στοιχείο (το 4).

- **ΒΗΜΑ 4ο**: Υπολογίζουμε τις νέες τιμές κάθε σειράς, εκτός της οδηγού σειράς, ως εξής: Νέα σειρά = Προηγούμενη σειρά – Στοιχείο της οδηγού στήλης Χ Νέα οδηγός σειρά.
- **ΒΗΜΑ 5ο:** Υπολογίζουμε τις νέες τιμές για τις σειρές Z_j και C_j-Z_j.

Ο δεύτερος πίνακας Simplex προκύπτει μετά την ολοκλήρωση όλων των υπολογισμών:

Πίνακας 6.17: Δεύτερος πίνακας Simplex.

Συντ. κέρδους	$C_j \rightarrow$	**48**	**60**	**0**	**0**	**0**	
↓	**Βασικές μεταβλητές**	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	**Ποσότ ητα**
0	S_1	5/2	0	1	0	-3/4	30
0	S_2	7/2	0	0	1	-1/4	50
0	X_2	1/2	1	0	0	1/4	30
0	Z_j	30	0	0	0	15	1800
	C_j-Z_j	18	0	0	0	-15	

3ο. Τρίτος πίνακας Simplex

Ο τρίτος πίνακας Simplex (τελικός) έχει την παρακάτω μορφή:

Πίνακας 6.18: Τρίτος πίνακας Simplex.

Συντ. κέρδους	$C_j \rightarrow$	**48**	**60**	**0**	**0**	**0**	
↓	**Βασικές μεταβλητές**	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	**Ποσότητα**
0	X_1	1	0	2/5	0	-3/10	12
0	S_2	0	0	-7/5	1	8/10	8
0	X_2	0	1	-1/5	0	4/10	24
0	Z_j	48	60	36/5	0	48/5	2016
	C_j-Z_j	0	0	-36/5	0	-48/5	

Η βέλτιστη εφικτή λύση του προβλήματος είναι:

$X_1 = 12, \quad X_2 = 24, \quad S_1 = 0, \quad S_2 = 8, \quad S_3 =, \quad Z = 2016$

6.4 Παράδειγμα 4ο

Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού με τη μέθοδο Simplex (Κολέτσος, Παραδείγματα Μεθόδου Simplex, 2016):

Με περιορισμούς:

- $4X_1 + X_2 \leq 28$
- $2X_1 + 3X_2 \leq 24$

- $X_1, X_2 \geq 0$

Αντικειμενική Συνάρτηση: Να μεγιστοποιηθεί το: $P = 10X_1 + 5X_2$

Λύση:

Διαπιστώνεται ότι το μοντέλο είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης σε τυποποιημένη μορφή (όλοι οι περιορισμοί είναι $\leq$ θετικών αριθμών και τα X_i θετικά), οπότε μπορεί να ακολουθηθεί η διαδικασία που περιγράφηκε νωρίτερα.

Δημιουργείται το Αρχικό Σύστημα Simplex (οι περιορισμοί συμπληρώνονται με μεταβλητές περιθωρίου S_i, και η Αντικειμενική Συνάρτηση γράφεται = 0):

- $4X_1 + X_2 + S_1 = 28$
- $2X_1 + 3X_2 + S_2 = 24$
- $maxP = 10X_1 + 5X_2 + 0S_1 + 0S_2$

1ο. Αρχικός πίνακας Simplex

Πρώτα φτιάχνουμε πίνακα συσχέτισης:

Πίνακας 6.19: Πίνακας συσχέτισης.

Βασικές μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	B_i
S_1	4	1	1	0	28
S_2	2	3	0	1	24

Προσθέτουμε στον παραπάνω πίνακα τους Συντελεστές Κέρδους και τους συντελεστές των Βασικών και Μη μεταβλητών. Οι μεταβλητές X_1 και X_2 είναι Μη βασικές μεταβλητές, οι μεταβλητές S_1 και S_2 είναι Βασικές μεταβλητές, και τέλος ο αριθμός των βασικών μεταβλητών ισούται με τον αριθμό των περιορισμών του προβλήματος.

Ο πρώτος πίνακας Simplex έχει την παρακάτω μορφή:

Πίνακας 6.20: Πρώτος πίνακας Simplex.

Συντ. κέρδους	$C_j \rightarrow$	**10**	**5**	**0**	**0**	
↓	**Βασικές μεταβλητές**	X_1	X_2	S_1	S_2	**Ποσότητα**
0	S_1	4	1	1	0	28
0	S_2	2	3	0	1	24
0	Z_j	0	0	0	0	0
	C_j-Z_j	10	5		0	

2ο. Δεύτερος πίνακας Simplex

- **ΒΗΜΑ** 1^{ο}: Επιλέγουμε τη μη βασική μεταβλητή ($\mathbf{X_1}$ ή $\mathbf{X_2}$) που έχει τη μεγαλύτερη θετική τιμή στη σειρά C_j-Z_j, δηλαδή την $\mathbf{X_1}$. Η στήλη της $\mathbf{X_1}$ λέγεται οδηγός στήλη.

- **ΒΗΜΑ** 2°: Διαιρούμε τα στοιχεία της στήλης της ποσότητας με τα αντίστοιχα της οδηγού στήλης. Το μικρότερο θετικό κλάσμα είναι η μεταβλητή που θα αντικατασταθεί και η σειρά της είναι η οδηγός σειρά. Η τομή τους είναι το οδηγό στοιχείο.
- **ΒΗΜΑ** 3°: Η $\mathbf{X_1}$ θα αντικαταστήσει την $\mathbf{S_1}$. Αντικαθιστούμε την οδηγό σειρά, διαιρώντας τα στοιχεία της με το οδηγό στοιχείο (το 4).
- **ΒΗΜΑ 4°**: Υπολογίζουμε τις νέες τιμές κάθε σειράς, εκτός της οδηγού σειράς, ως εξής: Νέα σειρά = Προηγούμενη σειρά – Στοιχείο της οδηγού στήλης Χ Νέα οδηγός σειρά.
- **ΒΗΜΑ 5°:** Υπολογίζουμε τις νέες τιμές για τις σειρές Z_j και C_j-Z_j.

Ο δεύτερος πίνακας Simplex προκύπτει μετά την ολοκλήρωση όλων των υπολογισμών:

Πίνακας 6.21: Δεύτερος πίνακας Simplex.

Συντ. κέρδους	**C_j**	**10**	**5**	**0**	**0**	
	Βασικές μεταβλητές	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**Ποσότητα**
10	**X_1**	1	1/4	1/4	0	7
0	**S_2**	0	5/2	-1/2	1	10
0	Z_j	10	5/2	5/2	0	70
	C_j-Z_j	0	5/2	-5/2	0	

3ο. Τρίτος πίνακας Simplex

Προκειμένου να κατασκευάσουμε τον τρίτο πίνακα (τελικό) Simplex, επαναλαμβάνουμε τα προηγούμενα πέντε βήματα και έχει την παρακάτω μορφή:

Ο τρίτος πίνακας Simplex έχει την παρακάτω μορφή:

Πίνακας 6.22: Τρίτος πίνακας Simplex.

Συντ. κέρδους	**C_j**	**10**	**5**	**0**	**0**	
	Βασικές μεταβλητές	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**Ποσότητα**
10	**X_1**	1	0	6/20	-2/20	6
5	**X_2**	0	1	-1/5	2/5	4
0	Z_j	10	5	2	1	80
	C_j-Z_j	0	0	-2	-1	

Ελέγχεται αν η λύση, $X_1 = 6$, $X_2 = 4$, και $P = 80$, είναι η βέλτιστη (δηλαδή, αν στη γραμμή του C_j-Z_j υπάρχουν αρνητικές ποσότητες). Εφόσον δεν υπάρχουν θετικοί αριθμοί στο C_j-Z_j, η διαδικασία της Simplex έχει τελειώσει και η λύση είναι η βέλτιστη.

6.5 Παράδειγμα 5ο

Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού με τη μέθοδο Simplex (Κολέτσος, Παραδείγματα Μεθόδου Simplex, 2016):

Με περιορισμούς:

- $3X_1 + 4X_2 + X_3 \leq 2$
- $X_1 + 3X_2 + 2X_3 \leq 1$
- $X_1, X_2, X_3 \geq 0$

Αντικειμενική Συνάρτηση: Να μεγιστοποιηθεί το: $P = 3X_1 + 6X_2 + 2X_3$

Λύση:

Διαπιστώνεται ότι το μοντέλο είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης σε τυποποιημένη μορφή (όλοι οι περιορισμοί είναι ≤ θετικών αριθμών και τα X_i θετικά), οπότε ακολουθείται η διαδικασία που περιγράφηκε νωρίτερα.

Δημιουργείται το Αρχικό Σύστημα Simplex (οι περιορισμοί συμπληρώνονται με μεταβλητές περιθωρίου S_i, και η Αντικειμενική Συνάρτηση γράφεται = 0):

- $3X_1 + 4X_2 + X_3 + S_1 = 2$
- $X_1 + 3X_2 + 2X_3 + S_2 = 1$
- $-3X_1 - 6X_2 - 2X_3 + P = 0$

1ο. Αρχικός πίνακας Simplex

Πρώτα φτιάχνουμε πίνακα συσχέτισης:

Πίνακας 6.23: Πίνακας συσχέτισης.

Βασικές μεταβλητές	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	B_i
S_1	3	4	1	1	0	2
S_2	1	3	2	0	1	1

Προσθέτουμε στον παραπάνω πίνακα τους Συντελεστές Κέρδους και τους συντελεστές των Βασικών και Μη μεταβλητών. Οι μεταβλητές X_1,X_2 και $\mathbf{X_3}$ είναι Μη βασικές μεταβλητές, οι μεταβλητές S_1και S_2 είναι Βασικές μεταβλητές, και τέλος ο αριθμός των βασικών μεταβλητών ισούται με τον αριθμό των περιορισμών του προβλήματος.

Ο πρώτος πίνακας Simplex έχει την παρακάτω μορφή:

Πίνακας 6.24: Πρώτος πίνακας Simplex.

Συντ. κέρδους	C_j	3	6	2	0	0	
	Βασικές μεταβλητές	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	Ποσότητα
0	S_1	3	4	1	1	0	2
0	S_2	1	3	2	0	1	1

0	Z_j	0	0	0	0	0	0
	C_j-Z_j	3	6	2	0	0	

2ο. Δεύτερος πίνακας Simplex

- **ΒΗΜΑ** 1^{ο}: Επιλέγουμε τη μη βασική μεταβλητή ($\mathbf{X_1}$ ή $\mathbf{X_2}$) που έχει τη μεγαλύτερη θετική τιμή στη σειρά C_j-Z_j, δηλαδή την $\mathbf{X_2}$. Η στήλη της $\mathbf{X_2}$ λέγεται οδηγός στήλη.
- **ΒΗΜΑ** 2^{ο}: Διαιρούμε τα στοιχεία της στήλης της ποσότητας με τα αντίστοιχα της οδηγού στήλης. Το μικρότερο θετικό κλάσμα είναι η μεταβλητή που θα αντικατασταθεί και η σειρά της είναι η οδηγός σειρά. Η τομή τους είναι το οδηγό στοιχείο.
- **ΒΗΜΑ** 3^{ο}: Η $\mathbf{X_2}$θα αντικαταστήσει την $\mathbf{S_2}$. Αντικαθιστούμε την οδηγό σειρά, διαιρώντας τα στοιχεία της με το οδηγό στοιχείο (το 3).
- **ΒΗΜΑ 4^{ο}**: Υπολογίζουμε τις νέες τιμές κάθε σειράς, εκτός της οδηγού σειράς, ως εξής: Νέα σειρά = Προηγούμενη σειρά – Στοιχείο της οδηγού στήλης Χ Νέα οδηγός σειρά.
- **ΒΗΜΑ 5^{ο}:** Υπολογίζουμε τις νέες τιμές για τις σειρές Z_j και C_j-Z_j.

Ο δεύτερος πίνακας Simplex προκύπτει μετά την ολοκλήρωση όλων των υπολογισμών:

Πίνακας 6.25: Δεύτερος πίνακας Simplex.

Συντ. κέρδους	**C_j**	**3**	**6**	**2**	**0**	**0**	
	Βασικές μεταβλητές	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**S_1**	**S_2**	**Ποσότητα**
0	**S_1**	5/3	0	-5/3	1	-4/3	2/3
6	**X_2**	1/3	1	2/3	0	1/3	1/3
0	Z_j	2	6	4	0	2	2
	C_j-Z_j	1	0	-2	0	-2	

3ο. Τρίτος πίνακας Simplex

Προκειμένου να κατασκευάσουμε τον τρίτο πίνακα (τελικό) Simplex, επαναλαμβάνουμε τα προηγούμενα πέντε βήματα και έχει την παρακάτω μορφή:

Ο τρίτος πίνακας Simplex έχει την παρακάτω μορφή:

Πίνακας 6.26: Τρίτος πίνακας Simplex.

Συντ. κέρδους	**C_j**	**3**	**6**	**2**	**0**	**0**	
	Βασικές μεταβλητές	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**S_1**	**S_2**	**Ποσότητα**
3	**X_1**	1	0	-1	3/5	-4/5	2/5
6	**X_2**	0	1	1	-1/5	3/5	1/5
0	Z_j	3	6	3	3/5	6/5	12/5
	C_j-Z_j	0	0	-1	-3/5	-6/5	

Ελέγχεται αν η λύση, $X_1 = \frac{2}{5}, X_2 = \frac{1}{5}, X_3 = 0$ και $P = \frac{12}{5}$, είναι η βέλτιστη (δηλαδή, αν στη γραμμή του C_j-Z_j υπάρχουν αρνητικές ποσότητες). Εφόσον δεν υπάρχουν θετικοί αριθμοί στο C_j-Z_j, η διαδικασία της Simplex έχει τελειώσει και η λύση είναι η βέλτιστη.

6.6 Παράδειγμα 6ο

Ένας καλλιεργητής διαθέτει 3200 € και 160 μέρες για να σπείρει τα 100 στρέμματα του χωραφιού του. Στην αγορά υπάρχουν τρία είδη σπόρων Α, Β, και Γ με τιμές 40, 20 και 30 €/στρέμμα αντίστοιχα, και τα οποία απαιτούν 1, 2, και 1, αντίστοιχα, μέρες σποράς ανά είδος σπόρου. Αν από το κάθε είδος κερδίζει 100, 300, και 200 €/στρέμμα αντίστοιχα, πόσα στρέμματα πρέπει να σπείρει για κάθε είδος σπόρου, ώστε να μεγιστοποιήσει το κέρδος του; (Κολέτσος, Παραδείγματα Μεθόδου Simplex, 2016).

<u>Λύση:</u>

Γράφεται το παραπάνω πρόβλημα μεγιστοποίησης σε τυποποιημένη μορφή:

Με περιορισμούς:

- $X_1 + X_2 + X_3 \leq 100$
- $40X_1 + 20X_2 + 30X_3 \leq 3200$
- $X_1 + 2X_2 + X_3 + S_3 \leq 160$
- $X_1, X_2, X_3 \geq 0$

Αντικειμενική Συνάρτηση: Να μεγιστοποιηθεί το: $P = 100X_1 + 300X_2 + 200X_3$.

a) Δημιουργείται το Αρχικό Σύστημα Simplex (οι περιορισμοί συμπληρώνονται με μεταβλητές περιθωρίου S_i, και η Αντικειμενική Συνάρτηση γράφεται = 0):
   - $X_1 + X_2 + X_3 + S_1 \leq 100$
   - $40X_1 + 20X_2 + 30X_3 + S_2 \leq 3200$
   - $X_1 + 2X_2 + X_3 + S_3 \leq 160$
   - $maxP = 100X_1 + 300X_2 + 200X_3$

1ο. Αρχικός πίνακας Simplex

Πρώτα φτιάχνουμε πίνακα συσχέτισης:

Πίνακας 6.27: Πίνακας συσχέτισης.

Βασικές μεταβλητές	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Ποσότητα
S_1	1	1	1	1	0	0	100
S_2	40	20	30	0	1	0	3200
S_3	1	2	1	0	0	1	160

Προσθέτουμε στον παραπάνω πίνακα τους Συντελεστές Κέρδους και τους συντελεστές των Βασικών και Μη μεταβλητών. Οι μεταβλητές X_1 X_2 και **X3** είναι Μη βασικές μεταβλητές, οι μεταβλητές S_1, S_2 και S_3 είναι Βασικές μεταβλητές, και τέλος ο αριθμός των βασικών μεταβλητών ισούται με τον αριθμό των περιορισμών του προβλήματος.

Ο πρώτος πίνακας Simplex έχει την παρακάτω μορφή:

Πίνακας 6.28: Πρώτος πίνακας Simplex.

Συντ. κέρδους	**C_j**	**100**	**300**	**200**	**0**	**0**	**0**	
	Βασικές μεταβλητές	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**S_1**	**S_2**	S_3	**Ποσότητα**
0	**S_1**	1	1	1	1	0	0	100
0	**S_2**	40	20	30	0	1	0	3200
0	**S_3**	1	2	1	0	0	1	160
0	**$Z_ι$**	0	0	0	0	0	0	0
	$C_j - Z_i$	100	300	200	0	0	0	

2ο. Δεύτερος πίνακας Simplex

- **ΒΗΜΑ** 1^{ο}: Επιλέγουμε τη μη βασική μεταβλητή (**X_1** ή **X_2** ή **X_3**) που έχει τη μεγαλύτερη θετική τιμή στη σειρά C_j-Z_j, δηλαδή την **X_2** . Η στήλη της **X_2** λέγεται οδηγός στήλη.
- **ΒΗΜΑ** 2^{ο}: Διαιρούμε τα στοιχεία της στήλης της ποσότητας με τα αντίστοιχα της οδηγού στήλης. Το μικρότερο θετικό κλάσμα είναι η μεταβλητή που θα αντικατασταθεί και η σειρά της είναι η οδηγός σειρά. Η τομή τους είναι το οδηγό στοιχείο.
- **ΒΗΜΑ** 3^{ο}: Η **X_2** θα αντικαταστήσει την **S_3**. Αντικαθιστούμε την οδηγό σειρά, διαιρώντας τα στοιχεία της με το οδηγό στοιχείο (το 2).
- **ΒΗΜΑ 4^{ο}**: Υπολογίζουμε τις νέες τιμές κάθε σειράς, εκτός της οδηγού σειράς, ως εξής: Νέα σειρά = Προηγούμενη σειρά – Στοιχείο της οδηγού στήλης Χ Νέα οδηγός σειρά.
- **ΒΗΜΑ 5^{ο}:** Υπολογίζουμε τις νέες τιμές για τις σειρές Z_j και C_j-Z_j.

Ο δεύτερος πίνακας Simplex προκύπτει μετά την ολοκλήρωση όλων των υπολογισμών:

Πίνακας 6.29: Δεύτερος πίνακας Simplex.

Συντ. κέρδους	**C_j**	**100**	**300**	**200**	**0**	**0**	**0**	
	Βασικές μεταβλητές	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**S_1**	**S_2**	S_3	**Ποσότητα**
0	**S_1**	½	0	½	1	0	-½	20
0	**S_2**	30	0	20	0	1	-10	1600
300	**X_2**	½	1	½	0	0	½	80
0	**$Z_ι$**	150	300	150	0	0	150	24000
	$C_j - Z_i$	-50	0	50	0	0	-150	

3ο. Τρίτος πίνακας Simplex

Προκειμένου να κατασκευάσουμε τον τρίτο πίνακα Simplex, επαναλαμβάνουμε τα προηγούμενα πέντε βήματα και έχει την παρακάτω μορφή:

Ο τρίτος πίνακας Simplex έχει την παρακάτω μορφή:

Πίνακας 6.30: Τρίτος πίνακας Simplex.

Συντ. κέρδους	**C_j**	**100**	**300**	**200**	**0**	**0**	**0**	
	Βασικές μεταβλητές	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**S_1**	**S_2**	**S_3**	**Ποσότητα**
200	**X_3**	1	0	1	2	0	-½	**40**
0	**S_2**	10	0	0	-40	1	-10	800
300	**X_2**	0	1	0	-1	0	½	**60**
0	Z_j	200	300	200	100	0	50	26000
	C_j-Z_j	-100	0	0	-100	0	-50	

Εφόσον δεν υπάρχουν θετικοί αριθμοί στο C_j-Z_j, η διαδικασία της Simplex έχει τελειώσει και η λύση είναι η βέλτιστη. Επομένως, ο καλλιεργητής θα πρέπει να σπείρει 60 στρέμματα με σπόρο τύπου Β και 40 στρέμματα με σπόρο τύπου Γ για να έχει το μέγιστο κέρδος που είναι 26000 €.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Αυτό που προκύπτει ως συμπέρασμα από τα παραπάνω είναι ότι ο Γραμμικός Προγραμματισμός είναι μία μαθηματική μέθοδος που χρησιμοποιείται από τις επιχειρήσεις για τη λύση προβλημάτων στα οποία επιδιώκεται η άριστη χρήση των περιορισμένων πόρων μίας επιχείρησης με στόχο την μεγιστοποίηση του κέρδους ή την ελαχιστοποίηση του κόστους μέσα στα όρια ορισμένων περιορισμών και δυνατοτήτων της επιχείρησης. Είναι πολύ σημαντική η χρήση του από μια επιχείρηση διότι δίνει τη δυνατότητα στην επιχείρηση να λάβει αποφάσεις πολύ σημαντικές για την σωστή λειτουργία και διαχείριση της επιχείρησης και την επίτευξη των στόχων της με γνώμονα το κέρδος.

Για το λόγο αυτό η μελέτη και η εφαρμογή του Γραμμικού Προγραμματισμού γνώρισε εκρηκτική ανάπτυξη ώστε να θεωρείται σήμερα από πολλούς ειδικούς ένα από τα πιο σημαντικά επιτεύγματα που σημειώθηκαν στα μέσα του εικοστού αιώνα. Μέχρι σήμερα αποτελεί το δημοφιλέστερο εργαλείο της Επιχειρησιακής Έρευνας και της Διοικητικής Επιστήμης. Εκτιμάται ότι πλέον το 50% των εφαρμογών των παραπάνω επιστημών σε πραγματικά προβλήματα διοίκησης σχετίζονται άμεσα ή έμμεσα με τον Γραμμικό Προγραμματισμό. Αυτό οφείλεται στη μεγάλη επιτυχία των εφαρμογών του σε προβλήματα λήψης αποφάσεων, που είναι η πιο σημαντική λειτουργία της διοίκησης των επιχειρήσεων.

Έτσι ορίζεται η Επιχειρησιακή Έρευνα που είναι η ποσοτική ανάλυση για τη λήψη διοικητικών αποφάσεων-επιχειρηματικών και επιχειρησιακών αποφάσεων. Αποτελείται από το σύνολο των τεχνικοοικονομικών μεθόδων λήψης αποφάσεων που βασίζονται στην επιστημονική προσέγγιση για την επίλυση διοικητικών προβλημάτων. Σε αυτές τις μεθόδους χρησιμοποιούνται μαθηματικά μοντέλα προκειμένου να περιγράψουν τη λειτουργία ενός συστήματος και τα οποία μπορούν να συνδράμουν στη βελτίωση της λειτουργίας του συστήματος.

Οι παράμετροι του προβλήματος διαχωρίζονται σε δυο κατηγορίες. Στην πρώτη περιλαμβάνονται εκείνοι οι παράγοντες που μπορούν να αλλάξουν (ελεγχόμενες μεταβλητές) από εκείνους που έχουν την ευθύνη της λήψης αποφάσεων ώστε να προκύψει μια λύση του προβλήματος. Στη δεύτερη κατηγορία περιλαμβάνονται οι παράγοντες εκείνοι που αν και επηρεάζουν τη λύση του προβλήματος, καθορίζονται από τρίτους ή από το γενικότερο επιχειρησιακό και οικονομικό περιβάλλον (μη ελεγχόμενες μεταβλητές-παράμετροι).

Η Σκιαγράφηση λύσεων - Αναζήτηση και ανάλυση εναλλακτικών λύσεων πραγματοποιείται ως εξής:

a) Για τον ορισμό ενός επιχειρησιακού προβλήματος απαραίτητη συνθήκη είναι να γνωρίζει ο λήπτης αποφάσεων πότε το πρόβλημα θα έχει επιλυθεί. Δηλαδή να μπορεί να προσδιορίσει τι αναμένει ως λύση του προβλήματος και με ποιο τρόπο αυτή μπορεί να επιτευχθεί. Για να γίνει αυτό πρέπει να διαμορφώσει μια πρώτη εικόνα για το ποιοι είναι οι παράγοντες που καθορίζουν το πρόβλημα, τι μπορεί να αλλάξει και με ποιο τρόπο αυτό επηρεάζει το αποτέλεσμα που επιθυμεί να επιτύχει.
b) Η σύγκριση των εφικτών εναλλακτικών λύσεων προσδιορίζει την άριστη ή βέλτιστη λύση, όπως αποκαλείται στην ορολογία της επιχειρησιακής έρευνας η επιλογή που δίνει το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα. Συνεπώς, ο προσδιορισμός της βέλτιστης λύσης καθορίζεται από ένα συγκεκριμένο στόχο. Με τον τρόπο αυτό οι διάφορες εναλλακτικές λύσεις μπορούν να συγκριθούν μεταξύ τους. Η ανάπτυξη συγκεκριμένων μεθόδων ανάλογα με τη φύση του προβλήματος για το προσδιορισμό της βέλτιστης λύσης είναι το αντικείμενο της επιχειρησιακής έρευνας.

Το πιο δύσκολο τις περισσότερες φορές είναι το στάδιο της λύσης που έχει υλοποιηθεί και επιλεγεί. Η όλη προσπάθεια μπορεί να αποτύχει, ακόμα και στην περίπτωση που η προτεινόμενη λύση είναι η καλύτερη δυνατή, αλλά οι υπεύθυνοι για την υλοποίηση της δεν έχουν πεισθεί για την αποτελεσματικότητα της. Από την εμπειρία έχει φανεί ότι στη φάση της υλοποίησης σωστών προτάσεων και επιλογών, οι λάθος χειρισμοί μπορούν να οδηγήσουν την όλη προσπάθεια σε αποτυχία. Ακόμα και στην περίπτωση που με την υλοποίηση της προτεινόμενης λύσης απαιτείται η παρακολούθηση και ο έλεγχος ώστε να εντοπιστούν τυχόν αλλαγές και βελτιώσεις που μπορούν να γίνουν ή όχι ορατές.

Μια από τις πλέον διαδεδομένες μεθοδολογίες των υπολογιστικών μαθηματικών αποτελεί η μέθοδος simplex. Επίσης, αποτελεί μία από τις μεγαλύτερες μαθηματικές επινοήσεις του 20^{ου} αιώνα με εκπληκτικά αποτελέσματα στην πράξη.

Η γεωμετρική απεικόνιση του εφικτού συνόλου του προβλήματος είναι αυτό που πραγματικά φωτίζει τη μέθοδο simplex. Με τη βοήθεια της γραφικής μεθόδου γίνεται η επίλυση ενός προβλήματος με μόνο δύο μεταβλητές, αφού οριστεί η περιοχή των εφικτών λύσεων, εντοπίζεται ποιο από τα ακραία σημεία της περιοχής των εφικτών λύσεων δίνει το μεγαλύτερο κέρδος. Η γραφική προσέγγιση δίνει την ευκαιρία να κατανόησης των βασικών αρχών των προβλημάτων του Γραμμικού Προγραμματισμού. Όμως σε πραγματικές εφαρμογές του Γραμμικού Προγραμματισμού, ο αριθμός των μεταβλητών είναι πολύ μεγαλύτερος από δύο μεταβλητές και συνεπώς η γραφική προσέγγιση επίλυσης δεν είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί.

Ο αριθμός των μεταβλητών και των περιορισμών των προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού σε πραγματικές εφαρμογές ανέρχεται σε δεκάδες, εκατοντάδες και μερικές φορές ακόμα και σε χιλιάδες. Επομένως είναι απαραίτητη μια συστηματική μέθοδος επίλυσης των προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού η οποία να μπορεί να υλοποιηθεί μέσω κατάλληλων προγραμμάτων ηλεκτρονικού υπολογιστή για την επίλυση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού οποιουδήποτε μεγέθους. Η συστηματική αυτή μέθοδος είναι η μέθοδος Simplex. Δηλαδή μια κλασική αλγεβρική επαναληπτική διαδικασία, η οποία όταν εφαρμόζεται δεν απαιτούνται από το χρήστη ιδιαίτερες θεωρητικές γνώσεις. Ωστόσο είναι απαραίτητη η γνώση των βασικών αρχών από τις οποίες διέπεται, και για την ερμηνεία και κατανόησή της, αλλά και για την κριτική αξιολόγηση των αποτελεσμάτων της, καθώς και για την κατανόηση της έννοιας και της σημασίας της ανάλυσης ευαισθησίας των προβλημάτων του Γραμμικού Προγραμματισμού.

Η μέθοδος Simplex διέπεται από κάποιους σπουδαίους ορισμούς και αρχές, όπως οι ακόλουθοι:

1. Επαυξημένη λύση, πρόκειται για μια λύση του προβλήματος με περιορισμούς στη μορφή των αρχικών ανισοτήτων, με την οποία προσαυξάνονται οι αντίστοιχες τιμές των ψευδομεταβλητών έτσι ώστε οι περιορισμοί να πάρουν τη μορφή εξισώσεων. Η επαυξημένη λύση περιέχει n + m μεταβλητές.
2. Βασική λύση, πρόκειται για μια «επαυξημένη» ακραία λύση.
3. Βασική δυνατή λύση, πρόκειται για μια επαυξημένη ακραία δυνατή λύση. Κάθε βασική λύση περιέχει συνολικά m + n μεταβλητές. Από αυτές μη βασικές μεταβλητές ονομάζονται οι n μεταβλητές και είναι ίσες με μηδέν. Οι τιμές των βασικών μεταβλητών, δηλαδή των υπολοίπων m μεταβλητών, αποτελούν τη συμβιβαστή λύση του συστήματος των m εξισώσεων του προβλήματος με όλους τους περιορισμούς σε μορφή εξισώσεων, αφού τεθούν οι μη βασικές μεταβλητές ίσες με μηδέν. Πρόκειται για μια επαυξημένη ακραία λύση. Από τις αντίστοιχες μεταβλητές καθορίζονται οι n εξισώσεις που την προσδιορίζουν.

4. Βασική δυνατή λύση, πρόκειται για μια βασική λύση, μέσω της οποίας ικανοποιείται το σύστημα των εξισώσεων που σχηματίζουν οι περιορισμοί (όταν αυτοί μετατραπούν σε ισότητες) και ταυτόχρονα είναι μη αρνητικές όλες της οι m βασικές μεταβλητές. Εκφυλισμένη ονομάζεται μια βασική δυνατή λύση, όταν έστω και μια από αυτές τις m μεταβλητές είναι ίση με μηδέν.

Η μέθοδος Simplex είναι μία από τις πλέον επιτυχημένες εφαρμογές της επιχειρησιακής έρευνας, ως τεχνική για τον προσδιορισμό του άριστου συνδυασμού περιορισμένων διαθέσιμων πόρων για την επίτευξη ενός επιθυμητού στόχου.

Με το γραμμικό προγραμματισμό επιδιώκονται άριστες λύσεις σε οικονομικά προβλήματα που μπορούν να έχουν τη μορφή γραμμικών συναρτήσεων και περιορισμών.

Κατά κανόνα η μεγιστοποίηση του κέρδους ή η ελαχιστοποίηση του κόστους είναι η άριστη λύση σε ένα γραμμικό πρόβλημα, με δεδομένο και σταθερό το κόστος ή το κέρδος αντίστοιχα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bronson, R., & Naadimuthu, G. (2010). *ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ.* (Π. Αρκουδέας, Επιμ., & Γ. Σαρατσιώτη, Μεταφρ.) Αθήνα: ΚΛΕΙΔΑΡΙΘΜΟΣ.

Αμπατζόγλου, Α. (2005). *Υλοποίηση αναθεωρημένου αλγορίθμου simplex: για το γενικό γραμμικό πρόβλημα.* Θεσσαλονίκη: Πανεπιστήμιο Μακεδονίας.

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Μέτης, Σ., Μπρουχούτας, Κ., Παπασταυρίδης, Σ., & Πολύζος, Γ. (2000). *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.* Αθήνα: Οργανισμό Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Μέτης, Σ., Μπρουχούτας, Κ., Παπασταυρίδης, Σ., & Πολύζος, Γ. (2000). *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.* Αθήνα: Οργανισμό Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.

Βαρδαλής, Ν. (2007). *Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX ΚΑΙ Ο ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΣΤΟΧΩΝ.* ΚΑΒΑΛΑ: ΤΜΗΜΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΩΝ, ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ, Τ.Ε.Ι. ΚΑΒΑΛΑΣ.

Δινοπούλου, Β., & Χιωτίδης, Γ. (2012). *Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα.* Αθήνα: ΕΚΔΟΣΕΙΣ Α. ΤΖΙΟΛΑ & ΥΙΟΙ Α.Ε.

Ζησιμόπουλος, Β. (2007). *Συνδυαστική Βελτιστοποίηση.* Ανάκτηση από Εθνικο και Καποδιστριακό Πανεπιστημίο Αθηνών: http://cgi.di.uoa.gr/~vassilis/co/comb-opt.pdf (τελευταία πρόσβαση στις 20/05/2017).

Καραογλάνογλου, Σ. (2013). *Υλοποίηση και υπολογιστική μελέτη μεθόδων αντιστροφής πινάκων του αναθεωρημένου πρωτεύοντος αλγόριθμου Simplex σε openCL.* Θεσσαλονίκη: Πανεπιστήμιο Μακεδονίας.

Κολέτσος, Ι. (2016). *Παραδείγματα Μεθόδου Simplex.* Ανάκτηση από Πανεπιστημίου Αιγαίου-Τμήμα Μαθηματικών:

http://www.math.aegean.gr/eedip/ctsag/homepage/Operational%20Research/NOTES32.pdf

(τελευταία πρόσβαση στις 20/05/2017).

Κολέτσος, Ι. (2017). *Γραμμικός Προγραμματισμός.* Ανάκτηση από Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο – Τομέας Μαθηματικών:

http://www.math.ntua.gr/~coletsos/Documents/paradeigmata.pdf (τελευταία πρόσβαση στις 20/05/2017).

Κολέτσος, Ι., & Στογιάννης, Δ. (2015). *Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα.* Αθήνα: Συμεών.

Λαγαρής, Η., Παπαγεωργίου, Δ., & Βόγκλης, Κ. (2008). *Βελτιστοποίηση*. Ιωάννινα: Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

Μπότσαρης, Χ. (2011). *Επιχειρησιακή έρευνα.* Αθήνα: ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΠΑΖΗΣΗ ΑΕΒΕ.

Μπότσαρης, Χ., Τσάντας, Ν., & Γεωργίου, Α. (2006). *Σημειώσεις Γραμμικού Προγραμματισμού.* Πάτρα: ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ.

Νικολαΐδης, Χ. (2003). *Σημειώσεις Γραμμικής Άλγεβρας.* Βόλος: ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ-ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ.

Ντόβας, Δ. (2016). Επιχειρησιακή Έρευνα. *Σημειώσεις στο μάθημα: Επιχειρησιακή Έρευνα*. Μεσολόγγι.

Παλαιολόγου, Π. (2016, 11). *ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ*. Ανάκτηση από pitetragono: http://www.pitetragono.gr/%CE%A3%CE%B7%CE%BC%CE%B5%CE%B9%CF%8E%CF%83%CE%B5%CE%B9%CF%82/%CE%92%20%CE%9B%CF%85%CE%BA%CE%B5%CE%AF%CE%BF%CF%85/%CE%86%CE%BB%CE%B3%CE%B5%CE%B2%CF%81%CE%B1/%CE%9A%CE%B5%CF%86%CE%AC%CE%BB%CE%B1%CE%B9%CE%BF%201%20%CE%A3%CF%85%CF%83 (τελευταία πρόσβαση στις 20/05/2017).

Παπαδημητράκης, Μ. (2015). *Απειροστικός Λογισμός-Πραγματικές Συναρτήσεις μιας Μεταβλητής*. Ηράκλειο: Τμήμα Μαθηματικών-Πανεπιστήμιο Κρήτης.

Τσάντας, Ν. (2007). *ΕΙΣΑΓΩΓΗ στην ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ*. Πάτρα: Ιδιωτική.

Φράγκος, Χ. (2007). *Οικονομικά μαθηματικά.* Αθήνα: Σταμούλη Α.Ε.

Χατζηνικολάου, Μ. (2003). *Εισαγωγικές Έννοιες Μαθηματικών* (Τόμ. Α'). (Γ. Δασιές, & Σ. Τζαμαριας, Επιμ.) Πάτρα: Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο-Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας.

Wikipedia-Real analysis. (2017). *Real analysis*. Ανάκτηση από Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Real_analysis (τελευταία πρόσβαση στις 20/05/2017).

Πίνακας (Matrix)-Wikipedia. (2017). *Πίνακας (Matrix)*. Ανάκτηση από Wikipedia: https://el.wikipedia.org/w/index.php?title=%CE%A0%CE%AF%CE%BD%CE%B1%CE%BA%CE%B1%CF%82+%28%CE%BC%CE%B1%CE%B8%CE%B7%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AC%29&oldid=6216108 (τελευταία πρόσβαση στις 20/05/2017).

Πνευματικά δικαιώματα

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν. 1599/1988 και τα άρθρα 2,4,6 παρ. 3 του Ν. 1256/1982, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής εργασίας και δεν προσβάλλει κάθε μορφής πνευματικά δικαιώματα τρίτων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον.

Μηλιώνης Ευάγγελος, Παπαγεωργόπουλος Ιωάννης, 2017