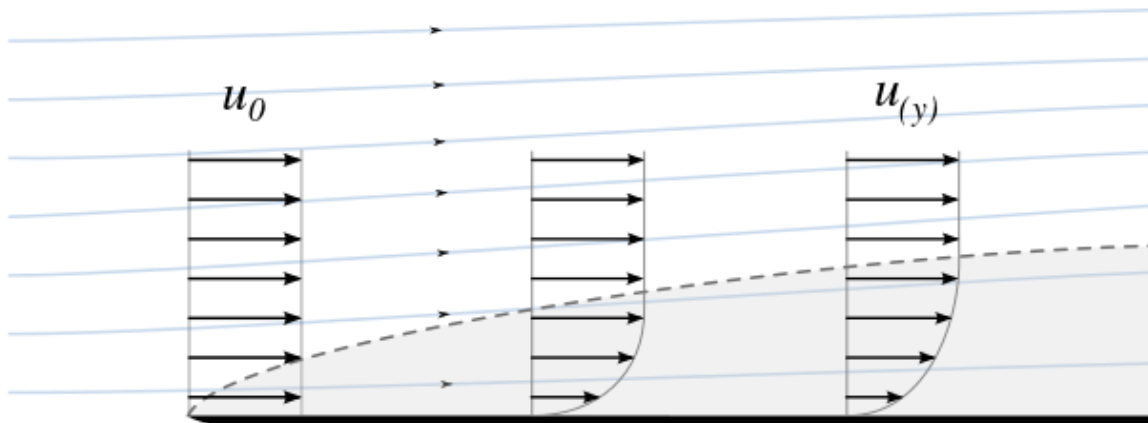


ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ  
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

# ΜΕΛΕΤΗ ΟΡΙΑΚΟΥ ΣΤΡΩΜΑΤΟΣ ΠΑΝΩ ΑΠΟ ΠΛΑΚΑ



ΣΠΟΥΔΑΣΤΗΣ: ΚΟΚΚΑΛΗΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ (Α.Μ. 6837)

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΤΖΙΡΤΖΙΛΑΚΗΣ ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ

ΠΑΤΡΑ 2021

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το παρόν τεύχος αποτελεί την πτυχιακή εργασία που εκπονήθηκε στο Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Τ.Ε. της Σχολής Τεχνολογικών Εφαρμογών του Τεχνολογικού Εκπαιδευτικού Ιδρύματος Δυτικής Ελλάδας και έχει ως θέμα την μελέτη του οριακού στρώματος πάνω από πλάκα.

Στα πλαίσια της εργασίας αυτής πραγματοποιήθηκαν μετρήσεις της ταχύτητας ενός ρεύματος νερού πάνω από πλάκα σε διαφορετικές αποστάσεις από το σημείο προσβολής και για διαφορετικές τιμές της παροχής. Τα πειραματικά αποτελέσματα παρουσιάζονται και σχολιάζονται σύμφωνα με την θεωρία του οριακού στρώματος.

Θέλω να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Τζιρτζιλάκη καθώς και τον κ. Καλογήρου για το ενδιαφέρον που έδειξαν και την ιδιαίτερα σημαντική βοήθεια που μου προσέφεραν κατά την εκπόνηση της παρούσας πτυχιακής εργασίας.

Κόκκαλης Βασίλειος  
Ιανουάριος 2021

**Υπεύθυνη Δήλωση Σπουδαστή:** Ο κάτωθι υπογεγραμμένος σπουδαστής έχω επίγνωση των συνεπειών του Νόμου περί λογοκλοπής και δηλώνω υπεύθυνα ότι είμαι συγγραφέας αυτής της Πτυχιακής Εργασίας, έχω δε αναφέρει στην Βιβλιογραφία μου όλες τις πηγές τις οποίες χρησιμοποίησα και έλαβα ιδέες ή δεδομένα. Δηλώνω επίσης ότι, οποιοδήποτε στοιχείο ή κείμενο το οποίο έχω ενσωματώσει στην εργασία μου προερχόμενο από Βιβλία ή άλλες εργασίες ή το διαδίκτυο, γραμμένο ακριβώς ή παραφρασμένο, το έχω πλήρως αναγνωρίσει ως πνευματικό έργο άλλου συγγραφέα και έχω αναφέρει ανελλιπώς το όνομά του και την πηγή προέλευσης.

Ο σπουδαστής  
Κόκκαλης Βασίλειος

.....

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία έχει σαν θέμα το οριακό στρώμα πάνω από επίπεδη πλάκα. Περιλαμβάνει θεωρητικό και πειραματικό μέρος.

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια εισαγωγή στη έννοια και τη θεωρία του οριακού στρώματος.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι εξισώσεις που περιγράφουν το οριακό στρώμα σε επίπεδη ροή.

Το τρίτο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στις ολοκληρωτικές εξισώσεις του οριακού στρώματος.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα βασικά χαρακτηριστικά της τυρβώδους ροής.

Στο πέμπτο κεφάλαιο περιγράφεται αναλυτικά η πειραματική διάταξη που χρησιμοποιήθηκε και ο τρόπος λήψης των μετρήσεων.

Στο έκτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των μετρήσεων.

Στο έβδομο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα.

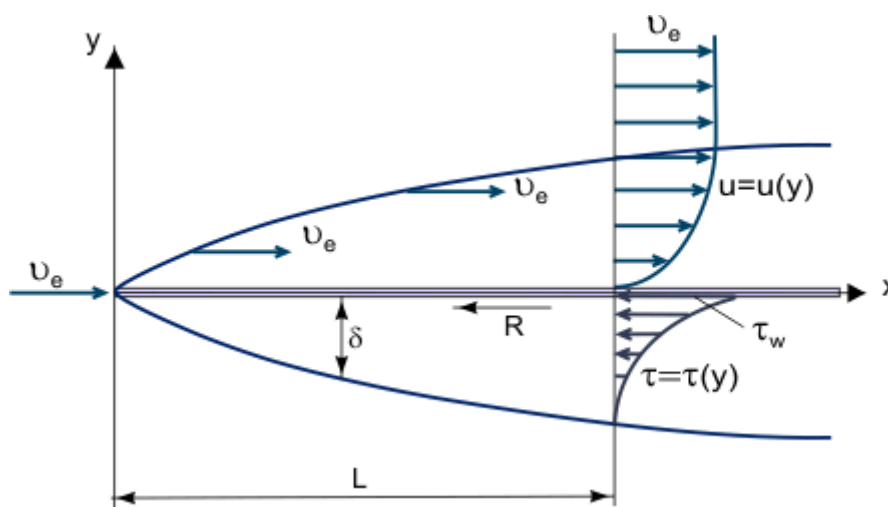
# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>ΠΡΟΛΟΓΟΣ</b>	
<b>ΠΕΡΙΛΗΨΗ</b>	
<b>ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ</b>	
<b>ΕΙΣΑΓΩΓΗ</b>	1
<b>1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΑΚΟΥ ΣΤΡΩΜΑΤΟΣ</b>	
1.1 Η έννοια του οριακού στρώματος.....	3
1.2 Στρωτό οριακό στρώμα σε επίπεδη πλάκα σε μηδενική πρόσπτωση.....	4
1.3 Τυρβώδες οριακό στρώμα σε επίπεδη πλάκα σε μηδενική πρόσπτωση.....	10
<b>2. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΟΡΙΑΚΟΥ ΣΤΡΩΜΑΤΟΣ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΗ ΡΟΗ, ΟΡΙΑΚΟ ΣΤΡΩΜΑ ΠΛΑΚΑΣ</b>	
2.1 Κατασκευάζοντας τις εξισώσεις του οριακού στρώματος.....	15
2.2 Τριβή τοιχώματος, διαχωρισμός και μετατόπιση.....	22
2.3 Διαστατική αναπαράσταση των εξισώσεων του οριακού Στρώματος.....	26
2.4 Οπισθέλκουσα.....	29
2.5 Οριακό στρώμα πλάκας.....	31
<b>3. ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΟΡΙΑΚΟΥ ΣΤΡΩΜΑΤΟΣ</b>	
3.1 Γενικά.....	42

3.2 Ολοκληρωτική εξίσωση ορμής.....	42
3.3 Ολοκληρωτική εξίσωση ενέργειας.....	44
3.4 Ροπή της ολοκληρωτικής εξίσωσης ορμής.....	46
<b>4. ΕΝΑΡΞΗ ΤΗΣ ΤΥΡΒΗΣ (ΘΕΩΡΙΑ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ)</b>	
4.1 Πειραματικά αποτελέσματα για τη μετάβαση από την στρωτή στην τυρβώδη ροή.....	47
4.1.1 Μετάβαση στη ροή σε σωλήνα.....	47
4.4.2 Μετάβαση στο οριακό στρώμα.....	52
<b>5. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ</b>	
5.1 Περιγραφή.....	60
5.2 Εκτέλεση πειράματος.....	65
<b>6. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ</b>	
6.1 Ιδιότητες του αέρα και υπολογισμοί.....	68
6.2 Πίνακες.....	69
6.3 Διαγράμματα.....	104
<b>7. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ</b>	107
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</b>	108

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ένα οριακό στρώμα είναι ένα λεπτό στρώμα ιξώδους ρευστού κοντά στη στερεά επιφάνεια ενός τοιχώματος σε επαφή με ένα κινούμενο ρεύμα στο οποίο (εντός του πάχους του  $\delta$ ) η ταχύτητα ροής κυμαίνεται από μηδέν στον τοίχο (όπου η ροή "κολλά" στο τοίχωμα λόγω του ιξώδους του ρευστού) έως την τιμή  $U_e$  στο όριο, η οποία περίπου (εντός σφάλματος 1%) αντιστοιχεί στην ταχύτητα ελεύθερης ροής (σχήμα 1). Αυστηρά, η τιμή του  $\delta$  είναι μία αυθαίρετη τιμή επειδή η δύναμη τριβής, ανάλογα με τη μοριακή αλληλεπίδραση μεταξύ υγρού και στερεού σώματος, μειώνεται με την απόσταση από το τοίχωμα και γίνεται ίση με το μηδέν στο άπειρο.



Σχήμα 1 Οριακό στρώμα σε επίπεδη επιφάνεια [3].

Η θεμελιώδης έννοια του οριακού στρώματος προτάθηκε από τον L. Prandtl (1904), ο οποίος ορίζει το οριακό στρώμα ως ένα στρώμα ρευστού που αναπτύσσεται σε ροές με πολύ υψηλό αριθμό Reynolds,  $Re$ , δηλαδή με σχετικά χαμηλό ιξώδες σε σύγκριση με τις δυνάμεις αδράνειας. Αυτό παρατηρείται όταν τα σώματα εκτίθενται σε ροή αέρα υψηλής ταχύτητας ή όταν τα σώματα είναι πολύ μεγάλα και η ταχύτητα ροής αέρα είναι μέτρια. Σε αυτήν την περίπτωση, σε ένα σχετικά λεπτό

οριακό στρώμα, η διατμητική τάση μπορεί να είναι πολύ μεγάλη, ειδικά στον τοίχο όπου η ταχύτητα είναι μηδέν.

Παρά το γεγονός ότι είναι αρκετά λεπτό, το οριακό στρώμα είναι πολύ σημαντικό για τις διαδικασίες δυναμικής αλληλεπίδρασης μεταξύ της ροής και του σώματος. Το οριακό στρώμα καθορίζει την αεροδυναμική οπισθέλκουσα και την άντωση του ιπτάμενου οχήματος, ή την απώλεια ενέργειας για ροή ρευστού σε κάποιο κανάλι. Επίσης, εκτός του υδροδυναμικού οριακού στρώματος υπάρχει και ένα θερμικό οριακό στρώμα που καθορίζει τη θερμοδυναμική αλληλεπίδραση της μεταφοράς θερμότητας.

Ο υπολογισμός των παραμέτρων του οριακού στρώματος βασίζεται στη λύση εξισώσεων που λαμβάνονται από τις εξισώσεις Navier-Stokes για ιξώδη ροή ρευστού, οι οποίες μπορούν να απλοποιηθούν σημαντικά αν λάβουμε υπόψη το γεγονός ότι το πάχος του οριακού στρώματος είναι πολύ μικρό.

# 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΑΚΟΥ ΣΤΡΩΜΑΤΟΣ

## 1.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΑΚΟΥ ΣΤΡΩΜΑΤΟΣ

Η ροή των ρευστών με χαμηλό ιξώδες και συνεπώς με πολύ υψηλές τιμές αριθμού Reynolds παρουσιάζονται σε πολλές τεχνικές εφαρμογές. Στις περισσότερες περιπτώσεις η οριακή λύση  $Re = \infty$  είναι μια καλή προσέγγιση. Ένα πρόβλημα αυτής της οριακής λύσης που αξίζει να σημειωθεί είναι ότι δεν ικανοποιείται η συνθήκη μη-ολίσθησης, δηλαδή οι ταχύτητες στο τοίχωμα δεν είναι μηδέν αλλά έχουν πεπερασμένες τιμές. Για να ικανοποιηθεί η συνθήκη μη-ολίσθησης πρέπει να ληφθεί υπόψη το ιξώδες. Αυτό έχει να κάνει τη μετάβαση της ταχύτητας από την πεπερασμένη τιμή της οριακής λύσης κοντά στο τοίχωμα στη μηδενική τιμή ακριβώς πάνω στο τοίχωμα. Σε μεγάλες τιμές του αριθμού Reynolds αυτή η μετάβαση λαμβάνει χώρα σε ένα λεπτό στρώμα κοντά στο τοίχωμα, το οποίο ονομάστηκε από τον I. Prandtl (1904), οριακό στρώμα ή στρώμα τριβής. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, το οριακό στρώμα είναι λεπτότερο για μεγάλους αριθμούς Reynolds, δηλαδή για μικρό ιξώδες.

Η έννοια του οριακού στρώματος συνεπάγεται ότι η ροή σε υψηλούς αριθμούς Reynolds μπορεί να χωριστεί σε δύο άνισες περιοχές. Στο κύριο μέρος της ροής, το ιξώδες μπορεί να αγνοηθεί και η ροή αντιστοιχεί στην ανιζώδη οριακή λύση. Αυτή η περιοχή ονομάζεται ανιζώδης εξωτερική ροή. Η δεύτερη περιοχή είναι το πολύ λεπτό οριακό στρώμα κοντά στο τοίχωμα όπου το ιξώδες πρέπει να ληφθεί υπόψη.

Μέσα στο οριακό στρώμα η ροή μπορεί να είναι στρωτή ή τυρβώδης. Έτσι έχουμε το στρωτό και το τυρβώδες οριακό στρώμα.



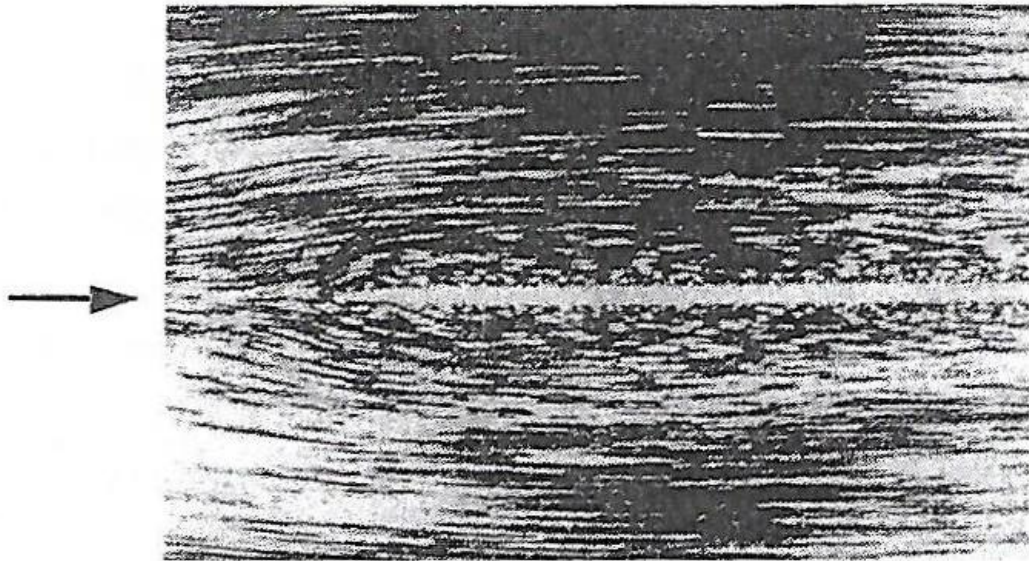
Στη συνέχεια θα δειχθεί ότι ο χωρισμός της ροής στην ανιζώδη εξωτερική ροή και στο οριακό στρώμα οδηγεί σε σημαντικές απλοποιήσεις στη θεωρητική μελέτη των ροών με υψηλούς αριθμούς Reynolds. Στην πραγματικότητα, σε αυτήν την ιδέα του Prandtl στηρίζεται οποιαδήποτε θεωρητική πρόοδος έχει γίνει σε αυτές τις ροές.

Αρχικά θα παρουσιάσουμε τις βασικές έννοιες του οριακού στρώματος καθαρά από πλευράς Φυσικής και στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε και τη μαθηματική θεωρία.

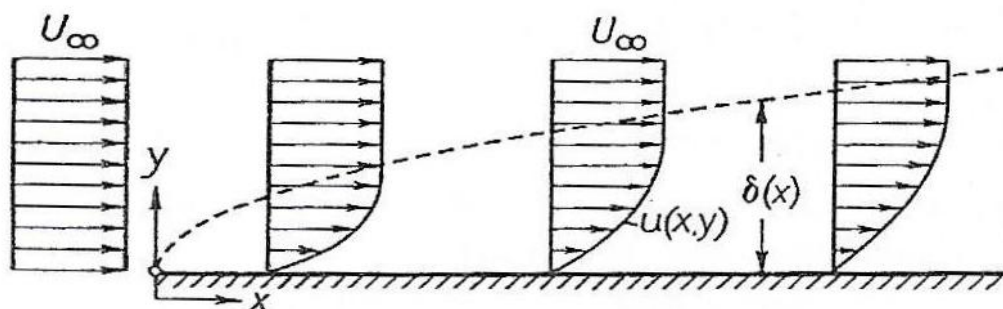
## **1.2 ΣΤΡΩΤΟ ΟΡΙΑΚΟ ΣΤΡΩΜΑ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΗ ΠΛΑΚΑ ΣΕ ΜΗΔΕΝΙΚΗ ΠΡΟΣΠΤΩΣΗ**

Στο σχήμα 1.1 φαίνεται η ροή κατά μήκος μιας λεπτής επίπεδης πλάκας η οποία σύρεται μέσα στο νερό. Σωματίδια αλουμινίου έχουν ψεκαστεί στην επιφάνεια του νερού για να γίνουν ορατές οι γραμμές ροής. Το μήκος του ίχνους που αφήνει κάθε σωματίδιο είναι ανάλογο της ταχύτητας ροής. Είναι φανερό ότι ακριβώς πάνω στο τοίχωμα υπάρχει ένα λεπτό στρώμα στο οποίο η ταχύτητα είναι σημαντικά μικρότερη από ότι σε κάποια απόσταση από το τοίχωμα. Το πάχος του τοιχώματος αυτού αυξάνεται κατά μήκος του τοιχώματος από μπροστά προς τα πίσω. Στο σχήμα 1.2 φαίνεται σχηματικά η κατανομή της ταχύτητας στο οριακό στρώμα πάνω στην πλάκα. Στο σχήμα 1.2 η κάθετη διάσταση έχει μεγεθυνθεί. Στο μπροστινό άκρο υπάρχει μία σταθερή κατανομή ταχύτητας κάθετα στην πλάκα. Καθώς η απόσταση από το μπροστινό άκρο αυξάνεται, το στρώμα των σωματιδίων που επιβραδύνονται από την τριβή γίνεται μεγαλύτερο, αφού όλο και περισσότερα σωματίδια του ρευστού καθυστερούνται. Το πάχος του οριακού στρώματος  $\delta(x)$  είναι επομένως μία αύξουσα συνάρτηση του  $x$ . Ωστόσο, πρέπει να ξεκαθαρίσουμε ότι η έννοια του πάχους του οριακού στρώματος έχει εισαχθεί κάπως τεχνητά. Η μετάβαση από τη ροή στο οριακό στρώμα, στην εξωτερική ροή, τουλάχιστον στην περίπτωση της στρωτής ροής, συμβαίνει με συνεχή τρόπο και συνεπώς δεν είναι δυνατόν να καθορισθεί ένα αυστηρό σύνορο. Αφού η έννοια του πάχους

του οριακού στρώματος είναι τόσο ζωντανή, χρησιμοποιείται πολύ στην πράξη. Πολύ συχνά το σύνορο ορίζεται αυθαίρετα στο σημείο όπου η ταχύτητα είναι ίση με κάποιο ορισμένο ποσοστό της εξωτερικής ταχύτητας, π.χ. 99%. Για λόγους σαφήνειας συχνά χρησιμοποιείται ένας δείκτης, π.χ.  $\delta_{99}$ .



Σχήμα 1.1 Ροή κατά μήκος μιας λεπτής επίπεδης πλάκας (O. Tietjens 19310 [2]).



Σχήμα 1.2 Οριακό στρώμα πάνω από επίπεδη πλάκα με μηδενική γωνία πρόσπτωσης [2].

### Εκτίμηση του πάχους του οριακού στρώματος

Για την περίπτωση στρωτού οριακού στρώματος κοντά σε πλάκα μπορεί εύκολα να εκτιμηθεί με τον εξής τρόπο:

Στο οριακό στρώμα οι δυνάμεις αδράνειας και οι δυνάμεις τριβής είναι σε ισορροπία. Η αδρανειακή δύναμη ανά μονάδα όγκου είναι ίση με

$\rho u \frac{\partial u}{\partial x}$ . Για μία πλάκα μήκους  $x$ , η ποσότητα  $\frac{\partial u}{\partial x}$  είναι ανάλογη του

$\frac{U_\infty}{x}$ , όπου  $U_\infty$  είναι η ταχύτητα της εξωτερικής ροής. Έτσι, η

αδρανειακή δύναμη είναι της τάξης μεγέθους του  $\rho \frac{U_\infty^2}{x}$ . Από την άλλη

μεριά η δύναμη τριβής ανά μονάδα όγκου είναι ίση με  $\frac{\partial \tau}{\partial y}$  και στη

στρωτή ροή, η ποσότητα αυτή είναι κατά συνθήκη ίση με  $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ . Η

κλίση της ταχύτητας κάθετα στο τοίχωμα  $\frac{\partial u}{\partial y}$  είναι της τάξης του  $\frac{U_\infty}{\delta}$ .

Συνεπώς για την δύναμη τριβής ανά μονάδα όγκου παίρνουμε:

$\frac{\partial \tau}{\partial y} \sim \mu \frac{U_\infty}{\delta^2}$ . Αν εξισώσουμε την αδρανειακή και τη δύναμη τριβής παίρνουμε:

$$\mu \frac{U_\infty}{\delta^2} \sim \rho \frac{U_\infty^2}{x}$$

Επιλύοντας ως προς το πάχος του οριακού στρώματος,  $\delta$ , παίρνουμε:

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\mu x}{\rho U_\infty}} = \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \quad (1.1)$$

Ο άγνωστος αριθμητικός παράγοντας σε αυτήν την εξίσωση μπορεί να υπολογισθεί από την ακριβή επίλυση του H. Blasius (1908). Για στρωτή οριακό στρώμα σε πλάκα και μηδενική γωνία πρόσπτωσης έχουμε:

$$\delta_{99}(x) = 5 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \quad (1.2)$$

Το αδιάστατο πάχος του οριακού στρώματος σε σχέση με το μήκος της πλάκας δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{\delta_{99}(x)}{l} = \frac{5}{\sqrt{\text{Re}}} \sqrt{\frac{x}{l}} \quad (1.3)$$

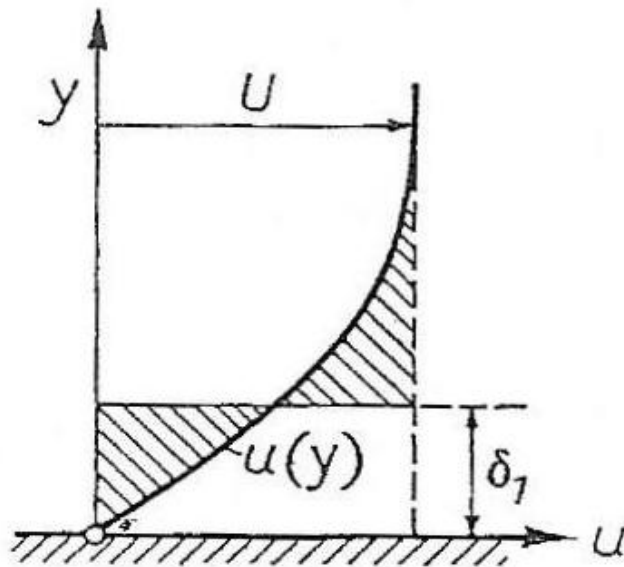
όπου  $\text{Re} = \frac{U_{\infty} l}{\nu}$  είναι ο αριθμός Reynolds που σχηματίζεται από το μήκος  $l$  της πλάκας. Από την εξίσωση (1.3) βλέπουμε ότι το πάχος του οριακού στρώματος μειώνεται καθώς αυξάνεται ο αριθμός Reynolds και στην οριακή περίπτωση  $\text{Re} = \infty$  το οριακό στρώμα μηδενίζεται. Επιπλέον, από την εξίσωση (1.3) βλέπουμε ότι το πάχος του οριακού στρώματος είναι ανάλογο του  $\sqrt{x}$ .

### Πάχος μετατόπισης

Έχει ήδη αναφερθεί ότι το πάχος του οριακού στρώματος έχει εισαχθεί αυθαίρετα. Ένα σωστό και ρευστομηχανικά ερμηνεύσιμο μέτρο του πάχους του οριακού στρώματος είναι το πάχος μετατόπισης  $\delta_1$ , το οποίο ορίζεται από τη σχέση:

$$U\delta_1(x) = \int_{y=0}^{\infty} (U - u) dy \quad (1.4)$$

$U$  είναι η ταχύτητα στην εξωτερική πλευρά του οριακού στρώματος στη θέση  $x$ . Από τον ορισμό, τα δύο σκιασμένα εμβαδά του σχήματος 1.3 πρέπει να είναι ίσα. Το μήκος μετατόπισης εκφράζει το πόσο μακριά από το οριακό στρώμα πρέπει να μετατοπιστούν οι ροϊκές γραμμές της εξωτερικής ροής.



Σχήμα 1.3 Πάχος μετατόπισης  $\delta_1$  του οριακού στρώματος [2].

Στην περίπτωση πλάκας σε μηδενική γωνία πρόσπτωσης έχουμε:

$$\frac{\delta_1(x)}{l} = \frac{1.721}{\sqrt{\text{Re}}} \sqrt{\frac{x}{l}} \quad (1.5)$$

Δηλαδή το πάχος μετατόπισης  $\delta_1$  είναι περίπου το 1/3 του πάχους του οριακού στρώματος.

### Εκτίμηση των δυνάμεων τριβής

Όπως και με το πάχος του οριακού στρώματος, η διατμητική τάση του τοιχώματος  $\tau_w$  και συνεπώς και η συνολική οπισθέλκουσα τριβή της πλάκας μπορούν να εκτιμηθούν. Σύμφωνα με το νόμο του Νεύτωνα για την τριβή (εξίσωση 1.2) έχουμε:

$$\tau_w(x) = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_w \quad (1.6)$$

όπου ο δείκτης  $w$  δηλώνει την τιμή στο τοίχωμα. Χρησιμοποιώντας τη σχέση  $\frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{U_\infty}{\delta}$  βρίσκουμε ότι  $\tau_w \sim \mu \frac{U_\infty}{\delta}$  και εισάγοντας την τιμή του  $\delta$  από την εξίσωση (1.1) παίρνουμε:

$$\tau_w(x) \sim \mu U_\infty \sqrt{\frac{\rho U_\infty}{\mu x}} = \sqrt{\frac{\mu \rho U_\infty^3}{x}} \quad (1.7)$$

Επομένως, η διατμητική τάση του τοιχώματος είναι ανάλογη του  $U_\infty^{3/2}$ , και επίσης αξίζει να τονιστεί ότι είναι ανάλογη του  $\frac{1}{\sqrt{x}}$ . Η διατμητική τάση του τοιχώματος μιας επίπεδης πλάκας δεν είναι επομένως σταθερά, αλλά μια φθίνουσα συνάρτηση του  $x$ . Οι διατμητικές τάσεις είναι μεγάλες κοντά στο μπροστινό άκρο της πλάκας. Χρησιμοποιώντας τη σχέση  $\tau_w \sim \mu \frac{U_\infty}{\delta}$  συμπεραίνουμε ότι η διατμητική τάση του τοιχώματος είναι αντιστρόφως ανάλογη του πάχους του οριακού στρώματος, δηλαδή όσο λεπτότερο είναι το οριακό στρώμα τόσο μεγαλύτερη είναι η διατμητική τάση. Η σταθερά αναλογίας στην εξίσωση (1.7) μπορεί επίσης να υπολογιστεί από την ακριβή επίλυση. Τελικά, ο συντελεστής επιδερμικής τριβής είναι:

$$c_f = \frac{\tau_w(x)}{\frac{\rho}{2} U_\infty^2} = \frac{0.664}{\sqrt{\text{Re}}} \sqrt{\frac{x}{l}} \quad (1.8)$$

Με γνωστή τη σχέση μεταξύ της διατμητικής τάσης του τοιχώματος και της θέσης  $\tau_w(x)$ , μπορούμε με ολοκλήρωση να υπολογίσουμε τη συνολική οπισθέλκουσα τριβή. Μία πλάκα που βρέχεται από τη μία πλευρά με πλάτος  $b$  και μήκος  $l$  έχει οπισθέλκουσα τριβή:

$$D = b \int_0^l \tau_w(x) dx \quad (1.9)$$

Με την εξίσωση (1.8) ο συντελεστής οπισθέλκουσας συσχετίζεται με τη επιφάνεια που βρέχεται  $S = b \cdot l$  και έχουμε:

$$c_D = \frac{D}{\frac{\rho}{2} U_\infty^2 \cdot b \cdot l} = \frac{1.328}{\sqrt{\text{Re}}} \quad (1.10)$$

Ο νόμος αυτός της οπισθέλκουσας απεικονίζεται στο σχήμα 1.3. Ο ασυμπτωτικός χαρακτήρας αυτού του νόμου μπορεί να φανεί, και για αριθμούς Reynolds  $\text{Re} > 10^4$  οι μετρήσεις είναι πολύ κοντά στη θεωρία.

### 1.3 ΤΥΡΒΩΔΕΣ ΟΡΙΑΚΟ ΣΤΡΩΜΑ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΗ ΠΛΑΚΑ ΣΕ ΜΗΔΕΝΙΚΗ ΠΡΟΣΠΤΩΣΗ

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, στην πραγματικότητα το οριακό στρώμα πάνω από πλάκα δεν παραμένει πάντα στρωτό. Μετά από μία ορισμένη απόσταση  $x=x_{crit}$  (από το μπροστινό άκρο της πλάκας), το οριακό στρώμα γίνεται τυρβώδες. Ο κρίσιμος αριθμός Reynolds που σχηματίζεται από την απόσταση στο σημείο μετάβασης είναι:

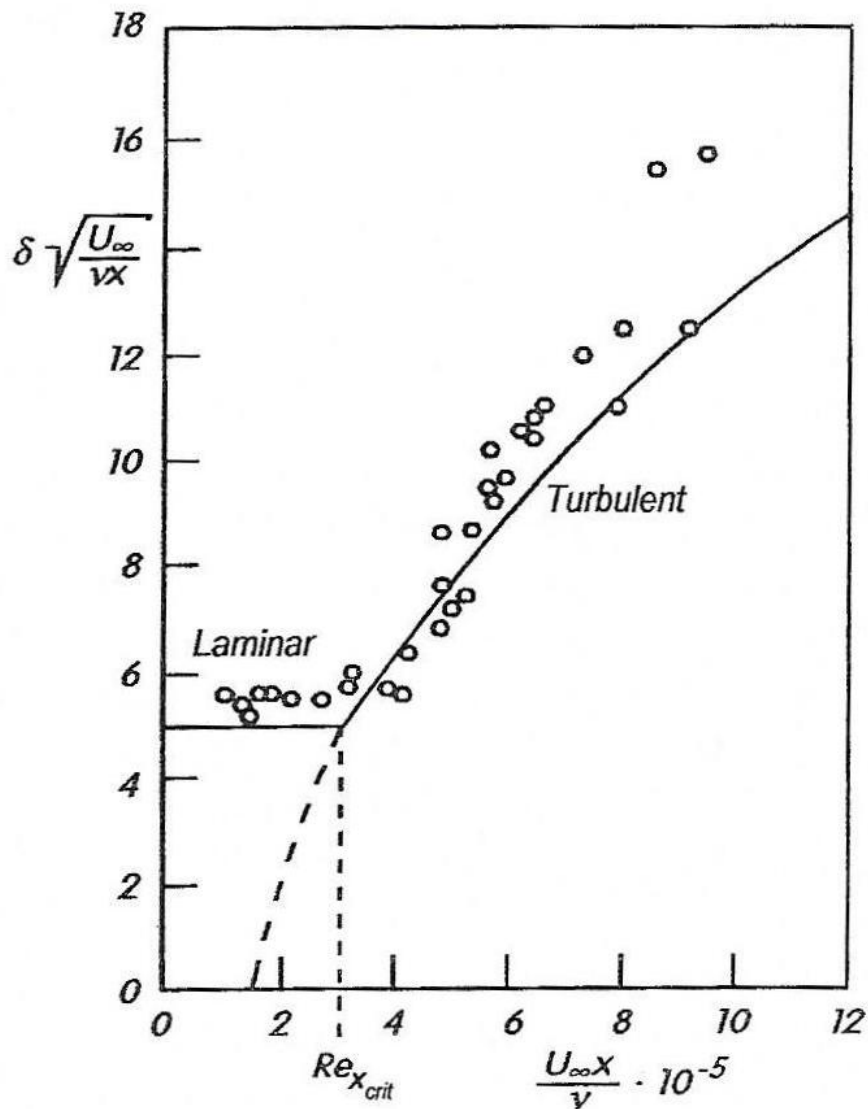
$$Re_{x,crit} = \left( \frac{Ux}{\nu} \right)_{crit} = 5 \cdot 10^5 \text{ (πλάκα)} \quad (1.11)$$

Το οριακό στρώμα πάνω από πλάκα είναι στρωτό κοντά στο μπροστινό άκρο και γίνεται τυρβώδες μακρύτερα κατά την κατεύθυνση της ροής, ενώ η θέση του σημείου μετάβασης  $x_{crit}$  μπορεί να υπολογισθεί από τον κρίσιμο αριθμό Reynolds  $Re_{x,crit}$ . Αν και η μετάβαση από το στρωτό στο τυρβώδες οριακό στρώμα συμβαίνει σε μία περιοχή πεπερασμένου μήκους, χρησιμοποιείται για απλότητα ένα σημείο μετάβασης και συνήθως γίνεται η υπόθεση ότι η μετάβαση είναι απότομη. Η αριθμητική τιμή του  $Re_{crit}$  εξαρτάται ισχυρά από το κατά πόσον η εξωτερική ροή είναι διαταραγμένη. Σε ισχυρά διαταραγμένη ροή μία τυπική τιμή είναι  $Re_{crit}=3 \cdot 10^5$  ενώ για λεία ροή οι τιμές προσεγγίζουν την τιμή  $Re_{crit}=3 \cdot 10^6$ .

Οι πρώτες μελέτες πάνω στην μετάβαση από το στρωτό στο τυρβώδες οριακό στρώμα πραγματοποιήθηκαν από τους B. G. Van der Hegge Zijnen (1924), J. M. Burgers (1924) και M. Hansen (1928). Η μετάβαση από τη στρωτή στην τυρβώδη ροή χαρακτηρίζεται από μία σημαντική αύξηση στο πάχος του οριακού στρώματος και στην διατμητική τάση του τοιχώματος. Το σχήμα 1.4 δείχνει την αδιάστατη ποσότητα  $\frac{\delta_{99}}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}}$  συναρτήσει της αδιάστατης απόστασης  $Re_x = \frac{U_\infty x}{\nu}$

σύμφωνα με τις μετρήσεις του M. Hansen (1928). Από την εξίσωση (1.2), στα στρωτά οριακά στρώματα αυτή η ποσότητα έχει προσεγγιστικά τη σταθερή τιμή 5. Για  $Re_x = Re_{x,crit}=3 \cdot 10^5$ , οι μετρήσεις δείχνουν μία ισχυρή απότομη αύξηση. Μπορεί να αποδειχθεί ότι το πάχος του τυρβώδους οριακού στρώματος σε πλάκα είναι:

$$\frac{\delta U_\infty}{\nu} = 0.14 \frac{Re_x}{\ln Re_x} G(\ln Re_x) \quad (1.12)$$



Σχήμα 1.4 Εξάρτηση του πάχους του οριακού στρώματος από την απόσταση κατά μήκος της πλάκας σε μηδενική γωνία πρόσπτωσης (M. Hansen 1928) [2].

Η συνάρτηση  $G(\ln Re_x)$  εξαρτάται ελαφρά από το  $\ln Re_x$ . Παίρνει την οριακή τιμή 1 για  $\ln Re_x \rightarrow \infty$ . Στην περιοχή  $10^5 < Re_x < 10^6$ ,  $G \approx 1.5$ . Η εξάρτηση από το  $\ln Re_x$  η οποία εμφανίζεται στην εξίσωση (1.12) είναι τυπική για τυρβώδη οριακά στρώματα, και έχει να κάνει με έναν ασυμπτωτικό τύπο για μεγάλους αριθμούς Reynolds. Σύμφωνα με αυτόν



τον τύπο, το πάχος του οριακού στρώματος αυξάνεται σαν  $\delta \sim x/\ln x$  για μεγάλα  $x$ . Σε ένα δεδομένο  $x$ , το πάχος του οριακού στρώματος μειώνεται καθώς αυξάνεται ο αριθμός Reynolds, αλλά πολύ αργά με  $\delta/x \sim 1/\ln Re$ . Η ποσότητα που αντιστοιχεί στην (1.120 φαίνεται στο σχήμα 1.4 και δείχνει καλή συμφωνία με τις μετρήσεις του M. Hansen. Αφού η (1.12) ισχύει για την περίπτωση όπου ένα τυρβώδες οριακό στρώμα είναι ήδη παρόν στο μπροστινό άκρο της πλάκας, μία ιδεατή αρχή του οριακού στρώματος υποτίθεται στο  $Re_x = 1.5 \cdot 10^5$  στο σχεδιασμό της καμπύλης (1.12). Αυτό σημαίνει ότι ακριβώς στο σημείο μετάβασης  $Re_x = 3 \cdot 10^5$ , η τιμή της ποσότητας είναι προσεγγιστικά 5.0, και επομένως μία συνεχής μετάβαση από το στρωτό στο τυρβώδες οριακό στρώμα ακολουθεί. Τα πάχη των οριακών στρωμάτων για τυπικές περιπτώσεις για ροή νερού και αέρα έχουν υπολογισθεί από την εξίσωση (1.12) και περιλαμβάνονται στον πίνακα 1.1.

### Δυνάμεις Τριβής

Ο τύπος για τον συντελεστή επιδερμικής τριβής για το τυρβώδες οριακό στρώμα ανάλογα με τον τύπο (1.8) είναι:

$$c_f = 2 \left[ \frac{\kappa}{\ln Re_x} G(\ln Re_x) \right]^2 \quad (1.13)$$

όπου  $G(\ln Re_x)$  είναι ξανά η συνάρτηση που αναφέρθηκε στην εξίσωση (1.12). Η ποσότητα  $\kappa = 0.41$  ονομάζεται σταθερά Karman και έχει θεμελιώδη σημασία για τα τυρβώδη οριακά στρώματα. Είναι μία παγκόσμια σταθερά. Από την εξίσωση (1.13), ο συντελεστής επιδερμικής τριβής για τυρβώδη οριακά στρώματα πάνω από πλάκα μειώνεται καθώς αυξάνεται ο αριθμός Reynolds, αλλά αυτό γίνεται εξαιρετικά αργά, πιο αργά από οποιαδήποτε μικρή αρνητική δύναμη του αριθμού Reynolds. Υποθέτοντας τυρβώδες οριακό στρώμα από το μπροστινό άκρο της πλάκας και μετά, η ολοκλήρωση του συντελεστή επιδερμικής τριβής σε όλο το μήκος της πλάκας, 1, δίνει το συντελεστή οπισθέλκουσας για μία πλάκα που βρέχεται από τη μία πλευρά.

$$c_D = 2 \left[ \frac{\kappa}{\ln Re} G(\ln Re) \right]^2 \quad (1.14)$$

όπου ο αριθμός Reynolds,  $Re$  σχηματίζεται τώρα από το μήκος  $l$  της πλάκας. Ο συντελεστής οπισθέλκουσας μειώνεται επίσης εξαιρετικά αργά καθώς αυξάνεται ο αριθμός Reynolds. Πρέπει να σημειωθεί ότι οι συναρτήσεις  $G$  στις εξισώσεις (1.130 και (1.14) είναι διαφορετικές.

## Ιξώδες Υπόστρωμα

Τα τυρβώδη οριακά στρώματα έχουν την εξής ιδιορρυθμία. Στα στρωτά οριακά στρώματα, το οριακό στρώμα είναι η περιοχή του πεδίου ροής που επηρεάζεται από το ιξώδες. Αυτό δεν συμβαίνει στα τυρβώδη οριακά στρώματα. Το ολικό πεδίο ροής ώρα χωρίζεται στην εξωτερική ροή που δεν παρουσιάζει τύρβη και την τυρβώδη ροή που χαρακτηρίζεται από κίνηση με τυχαίες διακυμάνσεις, μέσα στο οριακό στρώμα. Επειδή φαινομενικές δυνάμεις τριβής ενεργούν μέσα στο τυρβώδες οριακό στρώμα, το τυρβώδες οριακό στρώμα ονομάζεται και στρώμα τριβής. Μέσα στο τυρβώδες στρώμα τριβής, η επίδραση του ιξώδους περιορίζεται σε ένα στρώμα πολύ κοντά στο τοίχωμα το οποίο είναι πιο λεπτό από το οριακό στρώμα. Αυτό ονομάζεται ιξώδες υπόστρωμα ή ιξώδες στρώμα τοιχώματος. Επομένως, το τυρβώδες οριακό στρώμα έχει μία διστρωματική δομή. Το μεγαλύτερο μέρος είναι ένα στρώμα τριβής μόνο εξαιτίας της φαινομενικής τριβής που οφείλεται στην τυρβώδη κίνηση με διακυμάνσεις και δεν επηρεάζεται από το ιξώδες. Στο πολύ λεπτό ιξώδες υπόστρωμα οι επιδράσεις του ιξώδους οφείλονται σε πραγματικές δυνάμεις τριβής.

Αν και η μετάβαση από το ένα στρώμα στο άλλο είναι συνεχής, στην πράξη χρησιμοποιείται η έννοια του πάχους του ιξώδους υποστρώματος  $\delta_v$ , για το οποίο ισχύει η σχέση:

$$\frac{\delta_v}{x} = \frac{50}{Re_x \sqrt{\frac{c_f}{2}}} \quad (1.15)$$

όπου ο συντελεστής επιδερμικής τριβής  $c_f$  δίνεται από την (1.13). Από αυτήν  $\delta_v \sim \ln x$  αυξάνεται πολύ αργά με την απόσταση από το μπροστινό άκρο. Επίσης μειώνεται με την αύξηση του αριθμού Reynolds σε μία συγκεκριμένη θέση  $x$  σαν  $\delta_v \sim \ln Re_x / Re_x$ .

Πίνακας 1.1 Πάχος οριακού στρώματος  $\delta$  και πάχος ιξώδους υποστρώματος  $\delta_v$  στο τέλος επίπεδης πλάκας σε μηδενική γωνία πρόσπτωσης σε τυρβώδη ροή σύμφωνα με τις εξισώσεις (1.12) και (1.15).  $k$ : μήκος πλάκας,  $U_\infty$ : ταχύτητα ελευθέρου ρεύματος,  $\nu$ : κινηματικό ιξώδες [2]

	$\frac{U_\infty}{\text{m/s}}$	$\frac{l}{\text{m}}$	$Re = \frac{U_\infty l}{\nu}$	$\frac{\delta}{\text{mm}}$	$\frac{\delta_v}{\text{mm}}$
air $\nu = 15 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$	50	1	$3.3 \cdot 10^6$	8	0.4
	100	1	$6.6 \cdot 10^6$	8	0.2
	100	5	$3.3 \cdot 10^7$	36	0.2
	200	10	$1.3 \cdot 10^8$	69	0.1
water $\nu = 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$	1	2	$2 \cdot 10^6$	17	1
	2	5	$1 \cdot 10^7$	39	0.6
	5	50	$2.5 \cdot 10^8$	321	0.4
	10	200	$2 \cdot 10^9$	1122	0.1

Ο λόγος του πάχους του υποστρώματος  $\delta_v$  προς το ολικό πάχος  $\delta$  υπολογίζεται από τις εξισώσεις (1.12) και (1.15).

$$\frac{\delta_v}{\delta} = 680 \frac{\ln^2 Re_x}{Re_x} \quad (1.16)$$

Καθώς ο  $Re_x$  αυξάνεται, το τμήμα του ολικού στρώματος τριβής που αποτελεί το ιξώδες υπόστρωμα γίνεται όλο και μικρότερο. Αριθμητικά παραδείγματα του απόλυτου πάχους του υποστρώματος δίνονται στον πίνακα 1.1.

## **2. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΟΡΙΑΚΟΥ ΣΤΡΩΜΑΤΟΣ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΗ ΡΟΗ, ΟΡΙΑΚΟ ΣΤΡΩΜΑ ΠΛΑΚΑΣ**

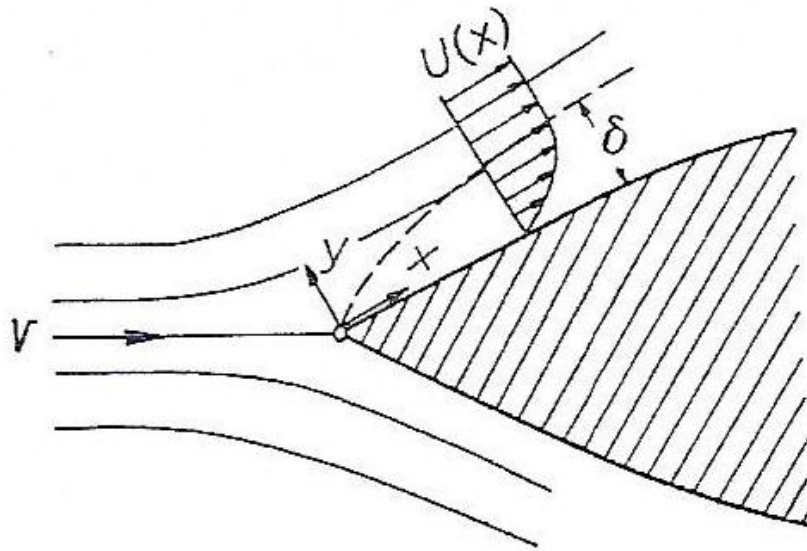
### **2.1 ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΖΟΝΤΑΣ ΤΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΟΡΙΑΚΟΥ ΣΤΡΩΜΑΤΟΣ**

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε ροές με πολύ χαμηλό ιξώδες ή πολύ υψηλούς αριθμούς Reynolds. Πολύ σημαντική ήταν η συνεισφορά του L. Prandtl (1904) στη μελέτη της κίνησης των ρευστών. Ο Prandtl έδειξε τον τρόπο με τον οποίο το ιξώδες επιδρά στις ροές με υψηλούς αριθμούς Reynolds και πως οι διαφορικές εξισώσεις Navier-Stokes μπορούν να απλοποιηθούν και να δώσουν προσεγγιστικές λύσεις για αυτήν την οριακή περίπτωση. Στη συνέχεια θα δούμε τις απλοποιήσεις των εξισώσεων Navier-Stokes στην περίπτωση πολύ χαμηλών δυνάμεων τριβής κυρίως από την πλευρά της φυσικής ερμηνείας.

Για απλότητα θα θεωρήσουμε την επίπεδη ροή ενός ρευστού με πολύ χαμηλό ιξώδες πέρα από ένα λεπτό κυλινδρικό σώμα (σχήμα 2.1).

Οι ταχύτητες είναι της τάξης μεγέθους της ταχύτητας του ελευθέρου ρεύματος  $V$  εκτός από πολύ κοντά στην επιφάνεια του σώματος. Και η εικόνα των ροϊκών γραμμών και η κατανομή της ταχύτητας είναι σχεδόν ταυτόσημες με την περίπτωση της ανιξώδους ροής (αστρόβιλη ροή). Περισσότερο ακριβείς μελέτες ωστόσο έχουν δείξει ότι το ρευστό πάνω στην επιφάνεια δεν είναι ακίνητο κατά μήκος του τοιχώματος, όπως στην περίπτωση της αστρόβιλης ροής, αλλά προσκολλάται σε αυτό. Υπάρχει μία μετάβαση από τη μηδενική ταχύτητα πάνω στο τοίχωμα στη μέγιστη ταχύτητα σε κάποια απόσταση από το τοίχωμα. Αυτή η μετάβαση λαμβάνει χώρα σε ένα πολύ λεπτό στρώμα που ονομάζεται οριακό στρώμα ή στρώμα τριβής. Πρέπει να ξεχωρίσουμε αυτές τις δύο περιοχές, μεταξύ των οποίων δεν υπάρχει διακριτό όριο.

1. Ένα πολύ λεπτό στρώμα δίπλα στο σώμα όπου η κλίση της ταχύτητας κάθετα στο τοίχωμα  $\frac{\partial u}{\partial y}$  είναι πολύ μεγάλη (οριακό στρώμα). Ένα πολύ χαμηλό ιξώδες  $\mu$  μπορεί να παίξει ένα σημαντικό ρόλο εδώ αφού η ιξώδης διατμητική τάση  $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$  μπορεί να πάρει σημαντικές τιμές.
2. Η υπόλοιπη περιοχή έξω από αυτό το στρώμα. Εδώ δεν υπάρχουν μεγάλες κλίσεις ταχύτητας, έτσι η δράση του ιξώδους είναι ασήμαντη. Σε αυτήν την περιοχή η ροή είναι άτριβη και αστρόβιλη.



Σχήμα 2.1 Ροή στο οριακό στρώμα κατά μήκος του τοιχώματος [2].

Μπορούμε να πούμε ότι το οριακό στρώμα είναι λεπτότερο όσο μικρότερο είναι το ιξώδες, ή πιο γενικά, όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός Reynolds. Έχει δεχθεί ότι για κάποιες ακριβείς λύσεις των εξισώσεων Navier-Stokes το πάχος του οριακού στρώματος είναι ανάλογο της τετραγωνικής ρίζας του κινηματικού ιξώδους:

$$\delta \sim \sqrt{\nu}$$

Στις απλοποιήσεις των εξισώσεων Navier-Stokes παρακάτω, θα γίνει η υπόθεση ότι το πάχος του οριακού στρώματος είναι πολύ μικρό συγκρινόμενο με την ακόμη μη-καθορισμένη γραμμική διάσταση του σώματος  $l$ :

$$\delta \ll l$$

Έτσι οι λύσεις των εξισώσεων του οριακού στρώματος έχουν έναν ασυμπτωτικό χαρακτήρα για υψηλούς αριθμούς Reynolds.

Αν χρησιμοποιήσουμε την ταχύτητα του ελευθέρου ρεύματος  $V$  και μία χαρακτηριστική διάσταση του σώματος  $l$  ως τιμές αναφοράς, η σχέση  $\delta \sim \sqrt{\nu}$  οδηγεί στη διαστατικά σωστή αναπαράσταση:

$$\frac{\delta}{l} \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \quad \text{με} \quad \text{Re} = \frac{Vl}{\nu}$$

Δηλαδή, το πάχος του οριακού στρώματος τείνει στο μηδέν καθώς αυξάνεται ο αριθμός Reynolds.

Θέλουμε να δούμε πως απλοποιούνται οι εξισώσεις Navier-Stokes αν καθορισθούν μόνο οι ασυμπτωτικές λύσεις για υψηλούς αριθμούς Reynolds. Αντί να λύσουμε πρώτα τις εξισώσεις Navier-Stokes και στη συνέχεια να καθορίσουμε την ασυμπτωτική λύση για  $\text{Re} \rightarrow \infty$ , η ασυμπτωτική λύση θα διαπιστωθεί άμεσα από τις αντίστοιχα απλοποιημένες διαφορικές εξισώσεις. Ας θεωρήσουμε πρώτα το διδιάστατο πρόβλημα του σχήματος 2.1 υποθέτοντας ότι το τοίχωμα είναι επίπεδο. Έστω ότι ο άξονας  $x$  είναι κατά μήκος του τοιχώματος και ο άξονας  $y$  είναι κάθετος σε αυτό. Θέλουμε να γράψουμε την εξίσωση συνέχειας και τις εξισώσεις Navier-Stokes σε αδιάστατη μορφή. Όλα τα μήκη θα κανονικοποιηθούν με το χαρακτηριστικό μήκος  $l$  και όλες οι ταχύτητες με την ταχύτητα του ελευθέρου ρεύματος  $V$ . Η πίεση γίνεται αδιάστατη με την ποσότητα  $\rho V^2$  και ο χρόνος με την ποσότητα  $l/V$ . Επιπλέον, ο αριθμός Reynolds, για τον οποίο έχει υποτεθεί ότι έχει πολύ μεγάλη τιμή, είναι:

$$\text{Re} = \frac{\rho V l}{\mu} = \frac{V l}{\nu} \quad (2.2)$$

Έτσι, οι εξισώσεις σε αδιάστατη μορφή είναι:

Εξίσωση ορμής στη διεύθυνση x:

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (2.3)$$

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad \delta^* \quad 1/\delta^* \quad \delta^{*2} \quad 1 \quad 1/\delta^{*2}$$

Εξίσωση ορμής στη διεύθυνση y:

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (2.4)$$

$$\delta^* \quad 1 \quad \delta^* \quad \delta^* \quad 1 \quad \delta^{*2} \quad \delta^* \quad 1/\delta^*$$

Εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (2.5)$$

$$1 \quad 1$$

Αν πάρουμε το όριο  $\text{Re} \rightarrow \infty$  στις (2.3) και (2.4), αυτές οι εξισώσεις ανάγονται σε εκείνες για την ανιζώδη ροή και στην περίπτωση ενός ομοιόμορφου ελεύθερου ρεύματος περιγράφουν μια αστρόβιλη ροή. Αυτές θα μπορούσαν να είναι οι ασυμπτωτικές λύσεις όπου δεν υπάρχει η συνθήκη μη-ολίσθησης, η οποία εκτός από κάποιες ειδικές περιπτώσεις, δεν ικανοποιείται από αστρόβιλες ροές.

Οι επιθυμητές ασυμπτωτικές λύσεις οι οποίες θα ικανοποιούν και την συνθήκη μη-ολίσθησης θα διαφέρουν επομένως από τις λύσεις αστρόβιλης ροής πάνω και κοντά στο τοίχωμα. Επομένως πρέπει να ισχύουν διαφορετικές εξισώσεις από εκείνες για την ανιζώδη ροή στο οριακό στρώμα κοντά στο τοίχωμα. Αφού οι δυνάμεις τριβής παίζουν σημαντικό ρόλο σε αυτό το στρώμα, οι όροι τριβής στις εξισώσεις που περιγράφουν τη ροή δεν πρέπει να αγνοηθούν όλοι. Η απλοποίηση των εξισώσεων Navier-Stokes πρέπει να πραγματοποιηθεί με βάση αυτήν την ιδέα. Καταρχήν πρέπει να εκτιμηθεί η τάξη μεγέθους κάθε όρου σε αυτές τις εξισώσεις. Το μήκος  $x^*$  και η ταχύτητα  $u^*$  έχουν τάξη μεγέθους  $O(1)$ . Ωστόσο το μήκος  $y^*$  έχει την τάξη μεγέθους του πάχους του οριακού στρώματος  $O(\delta^*)$ . Αφού για  $\text{Re} \rightarrow \infty$ , δηλαδή  $\delta^* \rightarrow 0$  (εξίσωση 2.1), η εξίσωση συνέχειας δεν θα γίνει εκφυλισμένη, συνεπάγεται ότι  $v^* = O(\delta^*)$ .

Οι τάξεις μεγέθους των διαφόρων όρων των εξισώσεων (2.3) έως (2.5) έχουν γραφτεί κάτω από κάθε εξίσωση. Θα υποθέσουμε ότι οι τοπικές επιταχύνσεις (π.χ.  $\frac{\partial u^*}{\partial t^*}$ ) είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με τις συνεκτικές επιταχύνσεις (π.χ.  $u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*}$ ). Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχουν απότομες επιταχύνσεις, όπως θα μπορούσε να συμβεί στην περίπτωση π.χ. ισχυρών κυμάτων πίεσης. Με σκοπό τουλάχιστον ένας όρος τριβής να παραμένει στην εξίσωση ορμής στη  $x$  διεύθυνση, ο παράγοντας  $1/Re$  πρέπει να είναι της τάξης μεγέθους  $O(\delta^{*2})$ . Αυτό είναι το γνωστό από αλλού αποτέλεσμα  $\delta^* \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}$ .

Αφού η τεταγμένη  $y^*=O(\delta^*)$  παίρνει πολύ μικρές τιμές στο οριακό στρώμα για  $\delta^* \rightarrow 0$ , δεν είναι κατάλληλη για την περιγραφή της ροής στο οριακό στρώμα. Επομένως η συντεταγμένη  $y^*=O(\delta^*)$  και η αντίστοιχη συνιστώσα της ταχύτητας  $v^*=O(\delta^*)$  μετασχηματίζονται με χρήση του μετασχηματισμού οριακού στρώματος ως εξής:

$$\bar{y} = y^* \sqrt{Re} \sim \frac{y^*}{\delta^*}, \quad \bar{v} = v^* \sqrt{Re} \quad (2.6)$$

Οι νέες μεταβλητές  $\bar{y}$  και  $\bar{v}$  είναι, όπως οι  $x^*$  και  $u^*$ , της τάξης μεγέθους  $O(1)$ . Αν εισάγουμε τις μεταβλητές  $\bar{y}$  και  $\bar{v}$  στις εξισώσεις (2.3) έως (2.5) και πάρουμε το όριο  $Re \rightarrow \infty$ , παίρνουμε τις εξισώσεις οριακού στρώματος Prandtl:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \bar{v} \frac{\partial u^*}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \bar{y}^2} \quad (2.8)$$

$$0 = -\frac{\partial p^*}{\partial \bar{y}} \quad (2.9)$$

Από την (2.6), οι ποσότητες  $y^*$  και  $v^*$  έχουν εκταθεί κατά μία δύναμη του αριθμού Reynolds. Ο εκθέτης  $1/2$ , δηλαδή η τετραγωνική ρίζα του



αριθμού Reynolds, έχει επιλεγεί έτσι ώστε σχηματίζοντας το όριο αφήνει τουλάχιστον έναν όρο τριβής  $\frac{\partial^2 u^*}{\partial \bar{y}^2}$ .

Οι απλοποιήσεις στις εξισώσεις που σχηματίστηκαν αφού πήραμε το όριο είναι σημαντικές σε σύγκριση με τις εξισώσεις Navier-Stokes. Η δραστηκή μείωση όρων στην εξίσωση ορμής στη διεύθυνση  $y$  (εξίσωση 2.9) συνεπάγεται ότι η πίεση είναι ανεξάρτητη του  $\bar{y}$  και άρα είναι σταθερή κατά μήκος της διατομής στο οριακό στρώμα. Επομένως μπορεί να βρεθεί από την πίεση στο άκρο του οριακού στρώματος που υπολογίζεται από την ανιζώδη ροή. Είναι σαν η πίεση να ασκείται πάνω στο οριακό στρώμα από την εξωτερική ροή. Η πίεση μπορεί να θεωρηθεί σαν μια γνωστή συνάρτηση στο οριακό στρώμα που εξαρτάται μόνο από τη συντεταγμένη μήκους  $x^*$  και το χρόνο  $t^*$ . Ο αριθμός των αγνώστων έχει μειωθεί κατά ένα. Αντί για τις τρεις συναρτήσεις  $u^*$ ,  $v^*$ ,  $p^*$  τώρα μόνο οι συναρτήσεις  $u^*$ ,  $\bar{v}$  πρέπει να υπολογισθούν. Στο εξωτερικό άκρο της ροής του οριακού στρώματος, η διαμήκης ταχύτητα  $u^*$  περνάει στην ταχύτητα της εξωτερικής ροής  $U^*(x^*, t^*)$ . Αφού οι κλίσεις ταχυτήτων  $\frac{\partial u^*}{\partial \bar{y}}$  και  $\frac{\partial^2 u^*}{\partial \bar{y}^2}$  μηδενίζονται εκεί.

Η (2.8) ανάγεται στην:

$$\frac{\partial U^*}{\partial t^*} + U^* \frac{\partial U^*}{\partial x^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} \quad (2.10)$$

Αν τη χρησιμοποιήσουμε για να εξαφανίσουμε την κλίση της πίεσης στη (2.8), τότε η (2.9) δεν χρειάζεται πια. Εξάγουμε δύο εξισώσεις για τις δύο επιθυμητές συναρτήσεις  $u^*(x^*, \bar{y}, t^*)$  και  $\bar{v}(x^*, \bar{y}, t^*)$  στο οριακό στρώμα:

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \bar{v} \frac{\partial u^*}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial U^*}{\partial t^*} + U^* \frac{\partial U^*}{\partial x^*} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \bar{y}^2} \quad (2.11)$$

και

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (2.12)$$

Με τις συνοριακές συνθήκες:

$$\bar{y} = 0: \quad u^* = 0, \quad \bar{v} = 0$$

$$\bar{y} \rightarrow \infty: \quad u^* = U^*(x^*, t^*) \quad (2.13)$$

Ο σκοπός της θεωρίας του οριακού στρώματος (για επίπεδες ασυμπίεστες ροές) είναι η επίλυση του συστήματος (2.11) έως (2.13) για μία δεδομένη κατανομή ταχυτήτων εξωτερικής ροής  $U^*(x^*, t^*)$ .

Για ροή μόνιμης κατάστασης το σύστημα γίνεται:

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \bar{v} \frac{\partial u^*}{\partial \bar{y}} = -\frac{dp^*}{dx^*} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \bar{y}^2} \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (2.15)$$

$$\bar{y} = 0: \quad u^* = 0, \quad \bar{v} = 0$$

$$\bar{y} \rightarrow \infty: \quad u^* = U^*(x^*) \quad (2.16)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση  $\frac{dp^*}{dx^*} = -U^* \frac{dU^*}{dx^*}$ , η κλίση της πίεσης μπορεί ξανά να εξαλειφθεί.

Εκτός από τη μείωση του αριθμού των εξισώσεων, υπάρχει μία ακόμη απλοποίηση στην εξίσωση ορμής στη διαμήκη διεύθυνση. Ένας όρος που υπάρχει στην (2.3) δεν υπάρχει στη (2.14). Οι μαθηματικές συνέπειες αυτού είναι εκτεταμένες. Ενώ το σύστημα των εξισώσεων (2.3) έως (2.5) είναι ελλειπτικό, το σύστημα των (2.14) έως (2.16) είναι παραβολικό. Αυτό έχει την ελκυστική ιδιότητα ότι οι επιδράσεις της συνάρτησης  $U^*(x^*)$  στις συναρτήσεις-λύσεις  $u^*(x^*, \bar{y})$ ,  $\bar{v}(x^*, \bar{y})$  μπορούν να είναι μόνο κατάντη. Επομένως όταν δύο συναρτήσεις  $U^*(x^*)$  είναι ίδιες έως ένα σημείο  $x_0^*$  και διαφέρουν μόνο για  $x^* > x_0^*$ , τότε οι λύσεις τους είναι επίσης ταυτόσημες για  $x^* \leq x_0^*$ .

Η αριθμητική επίλυση του συστήματος (2.14) έως (2.16) εξαιτίας του παραβολικού τύπου μπορεί να πραγματοποιηθεί χρησιμοποιώντας μία διαδικασία πορείας (marching procedure).

Είναι φανερό από την παραγωγή των εξισώσεων Prandtl για το οριακό στρώμα ότι και οι εξισώσεις και οι λύσεις τους είναι ανεξάρτητες του αριθμού Reynolds. Μόνο όταν ο μετασχηματισμός οριακού

στρώματος στην (2.6) αντιστρέφεται, τότε η εξάρτηση των ταχυτήτων  $u^* = f_1(x^*, y^* \sqrt{\text{Re}})$ ,  $v^* \sqrt{\text{Re}} = f_2(x^*, y^* \sqrt{\text{Re}})$  από τον αριθμό Reynolds εμφανίζεται. Μόνο ένας υπολογισμός, έγκυρος για όλους τους υψηλούς αριθμούς Reynolds, χρειάζεται να εκτελεστεί.

## 2.2 ΤΡΙΒΗ ΤΟΙΧΩΜΑΤΟΣ, ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ

Η επίλυση των εξισώσεων οριακού στρώματος συχνά χρησιμοποιείται για τον καθορισμό των τεχνικά σημαντικών ποσοτήτων: διατμητική τάση τοιχώματος και πάχος μετατόπισης. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τις δύο αυτές ποσότητες.

### Συντελεστής επιδερμικής τριβής

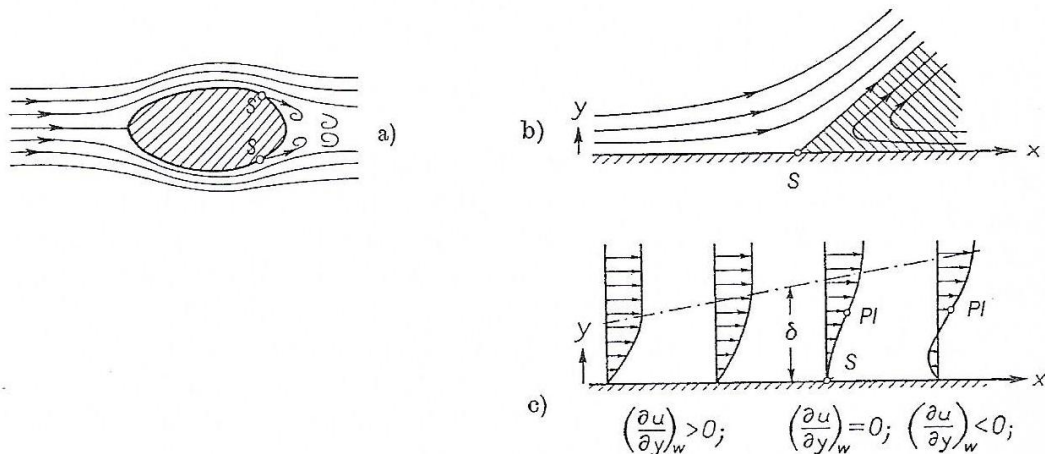
Για την αδιάστατη διατμητική τάση τοιχώματος εισάγουμε τον συντελεστή επιδερμικής τριβής.

$$c_f(x^*) = \frac{\tau_w(x^*)}{\frac{\rho}{2} V^2} \quad (2.17)$$

Από τις λύσεις του οριακού στρώματος γίνεται:

$$c_f(x^*) = \frac{2\mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_w}{\rho V^2} = \frac{2}{\sqrt{\text{Re}}} \left( \frac{\partial u^*}{\partial \bar{y}} \right)_w \quad (2.18)$$

Επομένως ο συντελεστής επιδερμικής τριβής καθορίζεται από την κλίση της ταχύτητας στο τοίχωμα ( $\bar{y} = 0$ ). Ο συντελεστής επιδερμικής τριβής για όλα τα στρωτά οριακά στρώματα τείνει στο μηδέν σαν  $\frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}$  καθώς ο αριθμός Reynolds αυξάνεται. Μία εξαίρεση είναι το wall jet.



Σχήμα 2.2 Διαχωρισμός του οριακού στρώματος [2].

- (a) Ροή πέρα από ένα σώμα με διαχωρισμό (S=σημείο διαχωρισμού)
- (b) Ροϊκές γραμμές κοντά στο σημείο διαχωρισμού
- (c) Κατανομές ταχυτήτων κοντά στο σημείο διαχωρισμού (PI=σημείο κλίσης)

### Σημείο διαχωρισμού

Μία περίπτωση ειδικής σημασίας είναι όταν ο συντελεστής επιδερμικής τριβής προσεγγίζει την τιμή μηδέν. Το σημείο στο οποίο η διατμητική τάση του τοιχώματος μηδενίζεται ονομάζεται σημείο διαχωρισμού. Θα δειχθεί ότι ο διαχωρισμός συμβαίνει στην περιοχή όπου η πίεση αυξάνεται (δυσμενής κλίση πίεσης). Ενώ μια αύξηση πίεσης αντιστοιχεί σε πτώση της κινητικής ενέργειας στην εξωτερική ροή, μέσα στο οριακό στρώμα το ρευστό που επιβραδύνεται από την τριβή, εξαιτίας της χαμηλωμένης κινητικής του ενέργειας δεν μπορεί να κινηθεί πολύ μέσα στην περιοχή υψηλής πίεσης. Επομένως, αποκλίνει από την περιοχή υψηλής πίεσης διαχωριζόμενο από το σώμα και περνάει κατευθείαν στην κύρια ροή (σχήμα 2.2). Αυτό οδηγεί σε μία περίπτωση όπου το ρευστό κοντά στο τοίχωμα, το οποίο ακολουθεί την κλίση πίεσης, ρέει στην αντίθετη κατεύθυνση στην εξωτερική ροή. Το σημείο διαχωρισμού ορίζεται ως το σύνορο μεταξύ των δύο κατευθύνσεων ροής στο στρώμα κοντά στο τοίχωμα, δηλαδή:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = 0 \quad (\text{σημείο διαχωρισμού}) \quad (2.19)$$

Από την παραγωγή των εξισώσεων του οριακού στρώματος συνεπάγεται ότι η θέση του σημείου διαχωρισμού είναι ανεξάρτητη του αριθμού Reynolds.

### Μετατόπιση

Αν θεωρήσουμε τις συνοριακές συνθήκες στην (2.13) και στην (2.16) βλέπουμε ότι στην εξωτερική ακμή του οριακού στρώματος, η συνιστώσα της ταχύτητας  $u^*$  περνάει στην τιμή της εξωτερικής ροής  $U^*$ . Ωστόσο δεν υπάρχει αντίστοιχη συνθήκη για τη συνιστώσα  $v^*$ . Στην πραγματικότητα η συνιστώσα  $v^*$  δεν μετατρέπεται στην αντίστοιχη συνιστώσα  $V^*$  της εξωτερικής ροής και παραμένει μία πεπερασμένη διαφορά μεταξύ των δύο ποσοτήτων. Θα υπολογίσουμε αυτή τη διαφορά. Οι συνιστώσες της ταχύτητας στην εξωτερική ροή, που σε αδιάστατη μορφή δηλώνονται ως  $U^*(x^*, y^*)$  και  $V^*(x^*, y^*)$ , ικανοποιούν την εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\partial U^*}{\partial x^*} + \frac{\partial V^*}{\partial y^*} = 0 \quad (2.20)$$

Το ανάπτυγμα Taylor των συνιστωσών της ταχύτητας  $U^*(x^*, y^*)$  για μικρές αδιάστατες αποστάσεις από το τοίχωμα  $y^*$  είναι:

$$U^*(x^*, y^*) = U^*(x^*, 0) + \left( \frac{\partial U^*}{\partial y^*} \right)_w y^* + \left( \frac{\partial^2 U^*}{\partial y^{*2}} \right)_w \frac{y^{*2}}{2} + \dots \quad (2.21)$$

Αν το πεδίο ταχυτήτων της εξωτερικής ροής υπόκειται επίσης στον μετασχηματισμό του οριακού στρώματος στην (2.6):

$$\bar{y} = y^* \sqrt{\text{Re}}, \quad \bar{V} = V^* \sqrt{\text{Re}} \quad (2.22)$$

Συνεπάγεται ότι:

$$\frac{\partial U^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (2.23)$$

$$U^*(x^*, \bar{y}) = U^*(x^*, 0) + \left( \frac{\partial U^*}{\partial y^*} \right)_w \frac{\bar{y}}{\sqrt{\text{Re}}} + O\left( \frac{1}{\text{Re}} \right) \quad (2.24)$$

Αφαιρώντας τις δύο εξισώσεις συνέχειας (2.15) και (2.23) παίρνουμε:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial U^*}{\partial x^*} - \frac{\partial u^*}{\partial x^*}$$

και ολοκληρώνοντας σε όλο το πάχος του οριακού στρώματος (και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις  $\bar{v}(x^*, 0) = \bar{V}(x^*, 0) = 0$ ):

$$\lim_{\bar{y} \rightarrow \infty} (\bar{v} - \bar{V}) = \frac{d}{dx^*} \int_0^{\infty} [V^*(x^*, 0) - u^*(x^*, \bar{y})] d\bar{y} \quad (2.25)$$

Στη σχέση αυτή έχει γίνει εναλλαγή της ολοκλήρωσης και της παραγωγίσης στο δεξιό μέλος και, επειδή  $Re \rightarrow \infty$ , χρησιμοποιήθηκε η (2.24) για να αντικατασταθεί το  $U^*(x^*, \bar{y})$  με  $U^*(x^*, 0)$ . Η εξίσωση (2.24) προσφέρει επίσης τη δικαιολόγηση για τις συναρτήσεις  $U^*(x^*, 0, t^*)$  και  $U^*(x^*, 0)$  στις συνοριακές συνθήκες (2.13) και (2.15) αντίστοιχα. Το οριακό στρώμα είναι τόσο λεπτό ώστε σε ασυμπτωτική προσέγγιση η  $U^*(x^*, t^*)$  δεν αλλάζει. Αυτό είναι μερικώς σωστό σε επίπεδα τοιχώματα όπου, αφού η ροή είναι αστρόβιλη  $\frac{\partial V^*}{\partial x^*} = \frac{\partial U^*}{\partial y^*} = 0$  και η ποσότητα

$$\left( \frac{\partial U^*}{\partial y^*} \right)_w \text{ μηδενίζεται.}$$

Αφού το ολοκλήρωμα στην (2.25) είναι θετικό και αυξάνεται με το  $x^*$ , στην ακμή του οριακού στρώματος έχουμε  $\bar{v} > \bar{V}$ . Η διαφορά ονομάζεται ταχύτητα μετατόπισης. Το οριακό στρώμα προκαλεί μια μετατόπιση στην εξωτερική ροή, αλλά στην περίπτωση των μεγάλων αριθμών Reynolds, αυτή είναι πολύ μικρή και μπορεί να αγνοηθεί στο πλαίσιο της θεωρίας οριακού στρώματος του Prandtl. Η λύση για το οριακό στρώμα μπορεί να βελτιωθεί με μία θεωρία οριακού στρώματος υψηλότερης τάξης, όπου η εξωτερική ροή τροποποιείται σαν αποτέλεσμα της ταχύτητας μετατόπισης.

Όπως και με την μετατόπιση, υπάρχει επίσης ένα δεύτερο φαινόμενο δευτέρας τάξεως που ονομάζεται καμπυλότητα τοιχώματος. Η καμπυλότητα τοιχώματος δεν έχει επίδραση στις εξισώσεις οριακού στρώματος του Prandtl όσο η ακτίνα καμπυλότητας είναι της τάξης μεγέθους του μήκους αναφοράς  $l$ , και συνεπώς πολύ μεγαλύτερη από το «πάχος του οριακού στρώματος»  $\delta$ . Επομένως, ροές οι οποίες έχουν

συγκριτικά αιχμηρές γωνίες εξαιρούνται. Αφού η καμπυλότητα τοιχώματος δεν έχει επίδραση, το σύστημα συντεταγμένων  $x^*, \bar{y}$  μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι ένα «καμπυλωμένο» Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων όπου ο άξονας  $x^*$  ακολουθεί το περίγραμμα του τοιχώματος και η  $\bar{y}$  διεύθυνση είναι κάθετη στην τοπική  $x^*$  διεύθυνση. Επομένως η γεωμετρία του υπό μελέτη σώματος δεν εισέρχεται στον υπολογισμό του οριακού στρώματος και οι επιδράσεις της γεωμετρίας φαίνονται μόνο μέσω της κατανομής ταχύτητας  $U^*(x^*, t^*)$  ή  $U^*(x^*)$  στο τοίχωμα ( $\bar{y} = 0$ ).

### 2.3 ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΟΥ ΟΡΙΑΚΟΥ ΣΤΡΩΜΑΤΟΣ

Αν και η αδιάστατη αναπαράσταση είναι αναγκαία για μία μαθηματικά σωστή παραγωγή των εξισώσεων του οριακού στρώματος θα ανακαλέσουμε τον μετασχηματισμό του οριακού στρώματος και θα χρησιμοποιήσουμε ξανά τη διαστατική αναπαράσταση των εξισώσεων του οριακού στρώματος. Αυτό με την πρώτη ματιά δεν φαίνεται ιδιαίτερα λογικό. Η δικαιολογία μας είναι ότι στη συνέχεια θα μελετήσουμε οριακά στρώματα που αρχικά είναι στρωτά και στη συνέχεια γίνονται τυρβώδη. Αφού ο μετασχηματισμός του οριακού στρώματος δεν λαμβάνει υπόψη τυρβώδη οριακά στρώματα, η διαστατική αναπαράσταση φαίνεται πιο κατάλληλη για την περίπτωση που έχουμε και τις δύο μορφές ροής στο οριακό στρώμα.

Από τις (2.11) και (2.12) βρίσκουμε ότι οι εξισώσεις του οριακού στρώματος σε διαστατική μορφή είναι:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.27)$$

με τις συνοριακές συνθήκες:

$$y=0: \quad u=0, v=0 \quad (2.28)$$

$$y \rightarrow \infty: \quad u=U(x,t)$$

Στην εξωτερική ροή έχουμε:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.29)$$

Για μόνιμες ροές το σύστημα αυτό των εξισώσεων απλοποιείται στο:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.31)$$

με συνοριακές συνθήκες:

$$y=0: \quad u=0, v=0 \quad (2.32)$$

$$y \rightarrow \infty: \quad u=U(x)$$

και για την εξωτερική ροή τη σχέση:

$$U \frac{dU}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \quad (2.33)$$

Αν και το κινηματικό ιξώδες εμφανίζεται ρητά στο σύστημα των εξισώσεων σε αυτήν την αναπαράσταση πρέπει πάντα να τονίζεται ότι, εξαιτίας του μετασχηματισμού του οριακού στρώματος, το  $\nu$  δεν είναι μια πραγματική παράμετρος της λύσης του οριακού στρώματος.

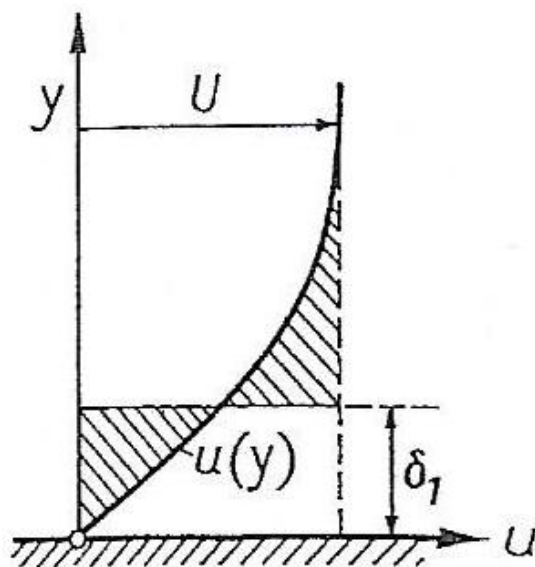
Μία επιπλέον απώλεια κομψότητας στη διαστατική αναπαράσταση είναι ο τρόπος που δηλώνεται η εξωτερική ακμή του οριακού στρώματος. Ενώ δηλώνοντας  $\bar{y} = \frac{y}{l} \sqrt{\text{Re}} \rightarrow \infty$  κάνει καλή αίσθηση, αφού για σταθερό  $Y$ , το  $\bar{y}$  τείνει στο άπειρο για  $\text{Re} \rightarrow \infty$ , αυτό δεν συμβαίνει πλέον για το  $y$ . Στην πραγματικότητα το  $y$  είναι μια πολύ μικρή ποσότητα στην άκρη του συνόρου. Παρά το γεγονός αυτό θα χρησιμοποιούμε  $y \rightarrow \infty$  εδώ, αφού δεν προκύπτει πρόβλημα υπό τον όρο ότι έχουμε υπόψη την σημασία αυτής της αναπαράστασης (ότι το  $y$  είναι αρκετά μεγάλο ώστε να καλύπτει την περιοχή του οριακού στρώματος).



## Διατμητική Τάση Τοιχώματος

Η διατμητική τάση του τοιχώματος μπορεί να υπολογιστεί από τη συνάρτηση-λύση  $u(x,y)$  με παραγωγή ως εξής:

$$\tau_w(x) = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_w \quad (2.34)$$



Σχήμα 2.3 Το πάχος μετατόπισης  $\delta_1$  του οριακού στρώματος [2].

## Πάχος Μετατόπισης

Σε διαστατική μορφή η (2.25) γίνεται:

$$\lim_{\bar{y} \rightarrow \infty} (v - V) = \frac{d(U\delta_1)}{dx} \quad (2.35)$$

όπου το μήκος

$$\delta_1 = \int_0^{\infty} \left[ 1 - \frac{u(x,y)}{U(x,y)} \right] dy \quad (2.36)$$

Ονομάζεται μήκος μετατόπισης αφού από τη (2.35) φαίνεται ότι είναι ένα μέτρο της δράσης μετατόπισης. Στο σχήμα 2.3, το  $\delta_1$  δείχνεται γεωμετρικά. Αφού από τη (2.36) και οι δύο σκιασμένες περιοχές πρέπει να έχουν το ίδιο εμβαδόν, η ογκομετρική ροή στο οριακό στρώμα που

δίνεται από την κατανομή  $u(x,y)$  είναι ταυτόσημη με την ογκομετρική ροή όπου η εξωτερική ροή με ταχύτητα  $U(x)$  απομακρύνεται από το τοίχωμα κατά το μήκος μετατόπισης  $\delta_1$ .

### Ροϊκή Συνάρτηση

Με την εισαγωγή της ροϊκής συνάρτησης  $\psi$ , το σύστημα των δύο εξισώσεων (2.26) και (2.27) για τις δύο συναρτήσεις  $u$  και  $v$  μπορεί να αναχθεί σε μία εξίσωση για μία συνάρτηση  $\psi$ . Αυτή η συνάρτηση ορίζεται ως εξής:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.37)$$

Ικανοποιεί την εξίσωση συνέχειας (2.27) και η (2.26) γίνεται:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (2.38)$$

Αυτή είναι μια διαφορική εξίσωση τρίτης τάξεως. Οι συνοριακές συνθήκες γίνονται:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_w = 0, \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_w = 0, \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_\infty = U$$

Αν συγκρίνουμε την (2.38) με την εξίσωση για την ροϊκή συνάρτηση η οποία προκύπτει από τις πλήρεις εξισώσεις Navier-Stokes, βλέπουμε ότι η προσέγγιση της θεωρίας του οριακού στρώματος έχει μειώσει την τάξη της διαφορικής εξίσωσης από τέσσερα σε τρία. Τώρα μπορούμε να καταλάβουμε γιατί μπορούν να δοθούν μόνο τρεις συνοριακές συνθήκες, δηλαδή γιατί δεν υπάρχει συνοριακή συνθήκη για το  $v$  στο εξωτερικό άκρο του οριακού στρώματος.

## 2.4 ΟΠΙΣΘΕΛΚΟΥΣΑ

Από την κατανομή της διατμητικής τάσης του τοιχώματος  $\tau_w(x)$  στην (2.34), η οπισθέλκουσα μπορεί εύκολα να υπολογισθεί με ολοκλήρωση της  $\tau_w(x)$  πάνω στην επιφάνεια του σώματος. Αν  $b$  είναι το πλάτος του

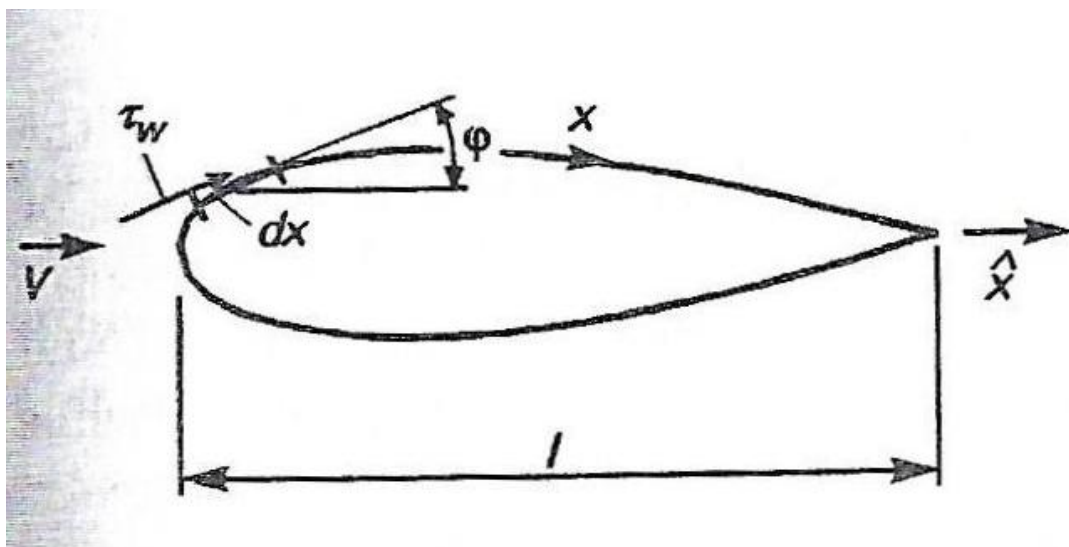
σώματος και  $l$  το μήκος του, τότε η οπισθέλκουσα στην πάνω πλευρά του σώματος που φαίνεται στο σχήμα (2.4) είναι:

$$D_f = b \int \tau_w(x) \cos \phi dx \quad (2.39)$$

όπου η συντεταγμένη  $x$ , όπως συνήθως στη θεωρία του οριακού στρώματος, ακολουθεί το περίγραμμα του σώματος. Ολοκληρώνουμε πάνω στο συνολικό μήκος της επιφάνειας στη ροή από μπροστινό άκρο έως το χείλος εκφυγής. Εισάγοντας τη  $\hat{x}$  ως τη συντεταγμένη κατά μήκος της χορδής του σώματος, και χρησιμοποιώντας τη σχέση  $dx \cdot \cos \phi = d\hat{x}$ , βλέπουμε από την (2.39) ότι:

$$D_f = b \int \tau_w(\hat{x}) d\hat{x} \quad (2.40)$$

Αν το οριακό στρώμα είναι παχύ, ή αν συμβαίνει διαχωρισμός, τότε μπορεί να εμφανιστεί σημαντική μετατόπιση. Σε αυτές τις περιπτώσεις η κατανομή πίεσης της εξωτερικής ροής πρέπει να τροποποιηθεί χρησιμοποιώντας θεωρία οριακού στρώματος υψηλότερης τάξης. Η διαφορά από την κατανομή πίεσης που υπολογίστηκε για δεδομένο περίγραμμα σώματος οδηγεί σε μία οπισθέλκουσα πίεσης που στην πραγματικότητα είναι ένα φαινόμενο τριβής.



Σχήμα 2.4 Υπολογίζοντας την οπισθέλκουσα [2].

## 2.5 ΟΡΙΑΚΟ ΣΤΡΩΜΑ ΠΛΑΚΑΣ

Πριν αναφέρουμε τις γενικές ιδιότητες των διαφορικών εξισώσεων του οριακού στρώματος στο επόμενο κεφάλαιο, θα δούμε μερικά παραδείγματα για να εξοικειωθούμε με τις εξισώσεις του οριακού στρώματος. Το απλούστερο παράδειγμα εφαρμογής των εξισώσεων του οριακού στρώματος είναι η ροή κατά μήκος μιας πολύ λεπτής επίπεδης πλάκας. Αυτή η περίπτωση ήταν το πρώτο παράδειγμα των εξισώσεων του Prandtl για το οριακό στρώμα που μελετήθηκε από τον Blasius (1908) στη διδακτορική του διατριβή στο Göttingen. Έστω ότι η πλάκα έχει την αρχή της στο  $x=0$ , εκτείνεται παράλληλα στον άξονα  $x$  και έχει ημιάπειρο μήκος (σχήμα 2.5). Θα μελετήσουμε τη μόνιμη ροή παράλληλα στον άξονα  $x$  με ταχύτητα ελευθέρου ρεύματος  $U_\infty$ . Σε αυτήν την περίπτωση η ταχύτητα της αστρόβιλης ροής είναι σταθερή, δηλαδή  $dp/dx=0$ . Οι εξισώσεις του οριακού στρώματος (2.30) έως (2.32) γίνονται:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.41)$$

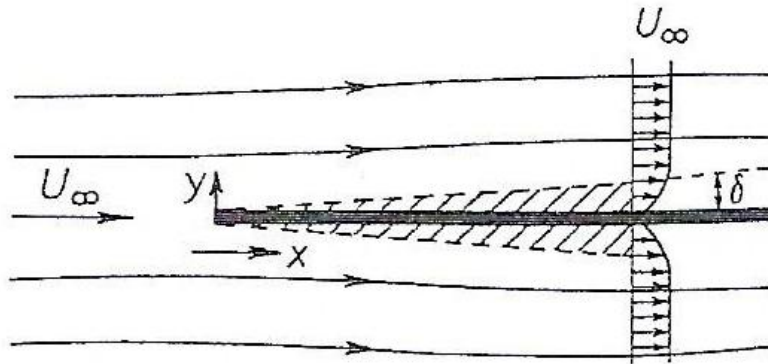
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.42)$$

$$y=0: \quad u=0, v=0 \quad (2.43)$$

$$y \rightarrow \infty: \quad u=U_\infty$$

Αφού το σύστημα δεν έχει χαρακτηριστικό μήκος, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι κατανομές της ταχύτητας σε διαφορετικές αποστάσεις από το μπροστινό άκρο είναι παρόμοιες ή ίδιες μεταξύ τους, δηλαδή οι κατανομές ταχύτητας  $u(y)$  σε διαφορετικές αποστάσεις  $x$  μπορούν να συμπέσουν με κατάλληλη επιλογή παραγόντων κλίμακας για το  $u$  και το  $y$ . Ένας κατάλληλος παράγοντας κλίμακας για το  $u$  θα μπορούσε να είναι η ταχύτητα ελευθέρου ρεύματος  $U_\infty$ , ενώ για το  $y$  το «πάχος του οριακού στρώματος»  $\delta(x)$  το οποίο αυξάνεται με την απόσταση  $x$ . Μιλώντας αυστηρά το  $\delta(x)$  δεν είναι το πάχος του οριακού στρώματος αλλά ένα

μέτρο του πάχους του οριακού στρώματος το οποίο είναι ίσο με το πάχος του οριακού στρώματος παρά έναν αριθμητικό παράγοντα. Ο νόμος ομοιότητας για την κατανομή της ταχύτητας μπορεί να γραφεί ως  $u/U_\infty = \varphi(\eta)$  με το  $\eta = y/\delta(x)$  όπου η συνάρτηση  $\varphi(\eta)$  είναι ανεξάρτητη του  $x$ .



Σχήμα 2.5 Οριακό στρώμα σε επίπεδη πλάκα σε μηδενική πρόσπτωση [2].

Η εξάρτηση του  $\delta(x)$  από το  $x$  μπορεί να εξακριβωθεί εύκολα ως εξής. Η ποσότητα  $\delta$  είναι ανάλογη του πάχους του στρώματος το οποίο επηρεάζεται από την τριβή, δηλαδή από ιξώδη φαινόμενα. Το ιξώδες προκαλεί μια μεταφορά ορμής κινούμενη από το τοίχωμα προς τα έξω. Η χαρακτηριστική ταχύτητα μεταφοράς  $U_V$  εξαρτάται από το  $\nu$  και το  $\delta$ . Κοιτάζοντας τις διαστάσεις έχουμε  $U_V \sim \nu/\delta$ . Η ποσότητα  $\delta(x)$  εξαρτάται έτσι από ποια σωματίδια ρευστού κοντά στο τοίχωμα μετακινούνται μακριά από το τοίχωμα από αυτήν την μεταφορά ορμής και ποια έχουν ήδη περάσει από τη θέση  $x$  λόγω της μεταφορικής τους κίνησης με ταχύτητα  $U_\infty$ . Το χρονικό διάστημα που απαιτείται για ένα σωματίδιο με ταχύτητα  $U_\infty$  να περάσει τη θέση  $x$  είναι  $x/U_\infty$ . Από την άλλη πλευρά, για τη μεταφορά ορμής, ο χρόνος  $\delta/U_V = \delta^2/\nu$  απαιτείται για να κινηθεί στο πάχος  $\delta$  με ταχύτητα  $U_V \sim \nu/\delta$ . Θέτοντας ίσους αυτούς τους δύο χρόνους παίρνουμε  $\delta^2/\nu \sim x/U_\infty$  ή

$$\delta(x) \sim \sqrt{\frac{x\nu}{U_\infty}} \quad (2.44)$$

Αυτό είναι ακριβώς το ίδιο με την εξίσωση (2.1) αν αντικαταστήσουμε εκεί το  $l$  με το  $x$  και το  $V$  με το  $U_\infty$ . Η μεταβλητή ομοιότητας  $\eta \sim y/\delta(x)$  τίθεται ως:

$$\eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{2\nu x}} \quad (2.45)$$

Αυτή η αρχικά αυθαίρετη επιλογή του παράγοντα  $\sqrt{2}$  για το  $\delta(x)$  μπορεί να φανεί χρήσιμη αφού η προκύπτουσα διαφορική εξίσωση τότε παίρνει μία ειδικά απλή μορφή.

Η εξίσωση συνέχειας μπορεί να ολοκληρωθεί εισάγοντας μία ροϊκή συνάρτηση  $\psi(x,y)$  όπως στην (2.37). Θέτουμε:

$$\psi = \sqrt{2\nu x U_\infty} f(\eta) \quad (2.46)$$

όπου  $f(\eta)$  είναι μία αδιάστατη ροϊκή συνάρτηση. Για τις συνιστώσες της ταχύτητας παίρνουμε:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = U_\infty f'(\eta) \quad (2.47)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\left( \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{2x}} (\eta f' - f) \quad (2.48)$$

όπου ο τόνος στην  $f$  σημαίνει παραγωγή ως προς  $\eta$ . Αν χρησιμοποιήσουμε τα παραπάνω για να σχηματίσουμε τους όρους της (2.41) παίρνουμε τελικά την παρακάτω συνήθη διαφορική εξίσωση για τη ροϊκή συνάρτηση:

$$f''' + f \cdot f'' = 0 \quad (\text{εξίσωση Blasius}) \quad (2.49)$$

Οι συνοριακές συνθήκες από την (2.43) είναι:

$$\eta=0: f=0, f'=0$$

$$\eta \rightarrow \infty: f'=1 \quad (2.50)$$

Σε αυτήν την περίπτωση οι δύο μερικές διαφορικές εξισώσεις (2.41) και (2.42) έχουν μετασχηματιστεί μέσω των μετασχηματισμών ομοιότητας (2.45) και (2.46) σε μία συνήθη διαφορική εξίσωση για τη ροϊκή συνάρτηση. Η τελευταία είναι μη-γραμμική και τρίτης τάξης. Οι τρεις

συνοριακές συνθήκες (2.50) είναι αρκετές για να καθορισθεί πλήρως η λύση.

Η αριθμητική λύση αυτής της διαφορικής εξίσωσης μπορεί να βρεθεί με χρήση π.χ. μιας μεθόδου Runge-Kutta που ονομάζεται μέθοδος σκόπευσης (shooting method). Αντί να λύσουμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών, λύνουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών με τις τιμές  $f(0)=0$ ,  $f'(0)=0$  και μία εκτιμώμενη τιμή  $f''(0)=f_w''$ . Η εκτίμηση  $f_w''$  μεταβάλλεται έως ότου η συνοριακή συνθήκη  $f'(\infty)=1$  ικανοποιηθεί. Στην πράξη αυτή η συνθήκη ικανοποιείται σε μία θέση με πεπερασμένη αλλά αρκετά μεγάλη τιμή του  $\eta$  (π.χ. εδώ η τιμή  $\eta=5$  δίνει μια απόκλιση από το 1 μικρότερη από  $10^{-4}$ ). Μερικές σημαντικές αριθμητικές τιμές για τη λύση δίνονται στον πίνακα 2.1.

Πίνακας 2.1 Χαρακτηριστικές τιμές του οριακού στρώματος σε επίπεδη πλάκα σε μηδενική πρόσπτωση [2]

$f_w''$	0.4696
$\beta_1 = \lim_{\eta \rightarrow \infty} [\eta - f(\eta)]$	1.2168
$\beta_2 = \int_0^{\infty} f'(1 - f') d\eta$	0.4696
$\beta_3 = \int_0^{\infty} f'(1 - f'^2) d\eta$	0.7385

### Κατανομή Ταχύτητας

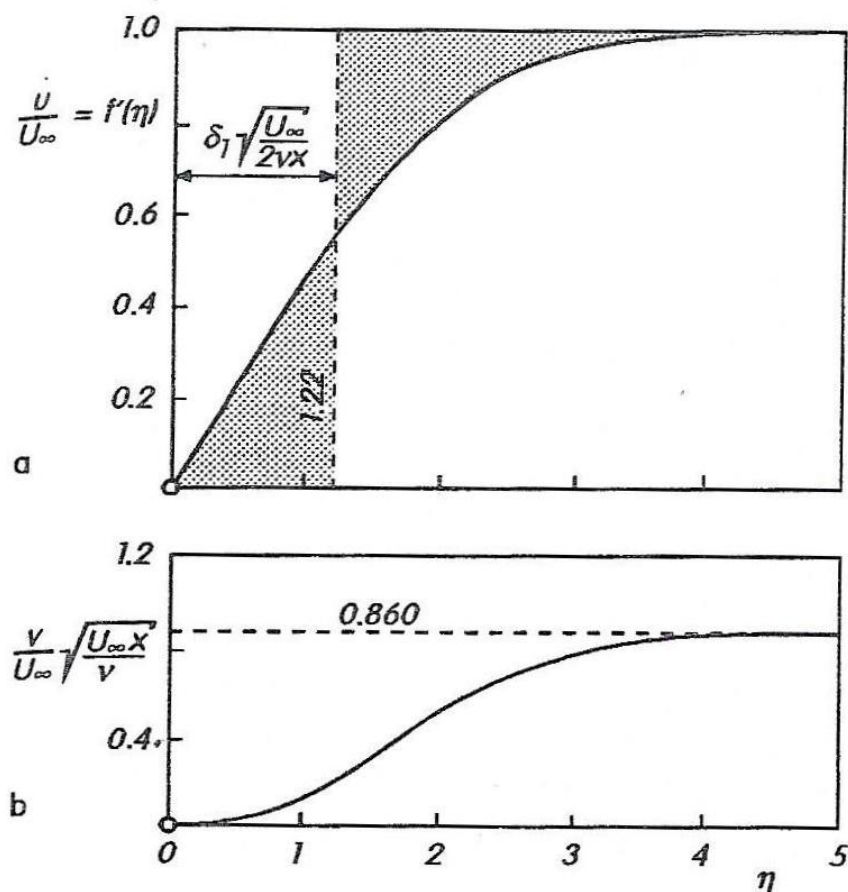
Η κατανομή της διαμήκου ταχύτητας  $u/U_{\infty}=f'(\eta)$  δίνεται στο σχήμα 2.6(a). Η καμπυλότητα κοντά στο τοίχωμα είναι πολύ μικρή. Ακριβώς πάνω στο τοίχωμα, η καμπυλότητα μηδενίζεται επειδή  $f'''(0)=0$ . Αυτό προκύπτει από τη διαφορική εξίσωση αφού  $f(0)=0$ . Η κάθετη συνιστώσα

της ταχύτητας στο οριακό στρώμα από την εξίσωση (2.48) δίνεται επίσης στο σχήμα 2.6(b). Αξίζει να σημειωθεί ότι στην εξωτερική ακμή του οριακού στρώματος, δηλαδή για  $\eta \rightarrow \infty$ , η κάθετη συνιστώσα είναι μη-μηδενική. Αυτή είναι ξανά η ταχύτητα μετατόπισης η οποία έχει ήδη αναφερθεί. Βρίσκουμε:

$$v_{\infty}(x) = \sqrt{\frac{\nu U_{\infty}}{2x}} \beta_1 = 0.8604 U_{\infty} \sqrt{\frac{\nu}{x U_{\infty}}} \quad (2.51)$$

με

$$\beta_1 = \lim_{\eta \rightarrow \infty} [\eta - f(\eta)] = 1.2168 \quad (2.52)$$



Σχήμα 2.6 Κατανομές ταχύτητας στο οριακό στρώμα σε επίπεδη πλάκα με τους υπολογισμούς του Blasius (1908) [2]  
 (a) Συνιστώσα ταχύτητας παράλληλα στο τοίχωμα  
 (b) Κάθετη συνιστώσα ταχύτητας.



### Οπισθέλκουσα τριβής

Η οπισθέλκουσα που δέχεται η πλάκα είναι καθαρά δύναμη τριβής. Αυτή μπορεί εύκολα να υπολογισθεί από τη λύση που δόθηκε παραπάνω. Από τη (2.40) η οπισθέλκουσα στη μία πλευρά της πλάκας είναι:

$$D = b \int_0^l \tau_w(x) dx \quad (2.53)$$

όπου  $b$  είναι το πλάτος και  $l$  το μήκος της πλάκας. Τώρα η τοπική διατμητική τάση του τοιχώματος είναι:

$$\tau_w(x) = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_w = \mu U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{2\nu x}} f_w'' = 0.332 \mu U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \quad (2.54)$$

όπου η αριθμητική τιμή της  $f_w''$  μπορεί να παρθεί από τον πίνακα 2.1. Ο συντελεστής επιδερμικής τριβής στην (2.17) με την ταχύτητα αναφοράς  $U_\infty$  γίνεται:

$$c_f(x) = \frac{\tau_w(x)}{\frac{\rho}{2} U_\infty^2} = \frac{0.664}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (2.55)$$

όπου χρησιμοποιείται ο αριθμός Reynolds που σχηματίζεται από το μήκος:

$$\text{Re}_x = \frac{U_\infty x}{\nu} \quad (2.56)$$

Συνδυάζοντας τις (2.53) και (2.54) βρίσκουμε την οπισθέλκουσα στη μία πλευρά της πλάκας:

$$D = f_w'' b U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{2\nu}} \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{x}} = f_w'' b U_\infty \sqrt{2\mu\rho l U_\infty} \quad (2.57)$$

Η οπισθέλκουσα της πλάκας είναι επομένως ανάλογη του  $U_\infty^{3/2}$  και του  $l^{1/2}$ , δηλαδή όχι ανάλογη του 1. Αυτό έχει να κάνει με το γεγονός ότι τα μέρη της πλάκας που βρίσκονται μακριά από το μπροστινό άκρο συνεισφέρουν σχετικά λιγότερο στην ολική οπισθέλκουσα από εκείνα που είναι μπροστά. Αυτό συμβαίνει επειδή βρίσκονται σε μία περιοχή που έχει παχύτερο στρώμα τριβής και συνεπώς μικρότερη διατμητική τάση. Αν εισάγουμε έναν αδιάστατο συντελεστή οπισθέλκουσας με τον συνήθη τρόπο χρησιμοποιώντας την εξίσωση:

$$c_D = \frac{D}{\frac{\rho}{2} U_\infty b l} \quad (2.58)$$

όπου το εμβαδόν  $b_l$  που βρέχεται λειτουργεί σαν εμβαδόν αναφοράς, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την (2.57) για να βρούμε τον τύπο:

$$c_D = \frac{1.328}{\sqrt{\text{Re}}} \quad (2.59)$$

με τον αριθμό Reynolds  $\text{Re} = U_\infty l / \nu$ . Αυτός ο τύπος ονομάζεται νόμος οπισθέλκουσας του Blasius, ισχύει για στρωτές ροές, δηλαδή για αριθμούς Reynolds κάτω από την κρίσιμη τιμή  $\text{Re}_{\text{crit}} = 5 \cdot 10^5$  με  $10^6$ . Σε περιοχές που η ροή είναι τυρβώδης η οπισθέλκουσα είναι μεγαλύτερη από αυτήν που δίνει η σχέση (2.59).

### Πάχος Οριακού Στρώματος

Δεν υπάρχει ένα μοναδικό πάχος οριακού στρώματος αφού η επίδραση του ιξώδους στο οριακό στρώμα μειώνεται ασυμπτωτικά καθώς απομακρυνόμαστε από το τοίχωμα. Η συνιστώσα της ταχύτητας που είναι παράλληλη στο τοίχωμα  $u$  προσεγγίζει ασυμπτωτικά την ταχύτητα  $U_\infty$  της εξωτερικής ροής (η συνάρτηση  $f'(\eta)$  προσεγγίζει ασυμπτωτικά την τιμή 1). Αν ορίσουμε το πάχος του οριακού στρώματος να είναι στη θέση όπου  $u = 0.99U_\infty$ , βρίσκουμε ότι  $\eta_{99} = 3.6$ . Επομένως το πάχος του οριακού στρώματος που ορίζεται με αυτόν τον τρόπο είναι:

$$\delta_{99} \approx 5.0 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \quad (2.60)$$

### Πάχος Μετατόπισης

Ένα φυσικά αποδεκτό μέτρο του πάχους του οριακού στρώματος είναι το πάχος μετατόπισης που έχει ήδη εισαχθεί στην (2.36) (σχήμα 2.3). Με αυτό κατανοούμε το πάχος κατά το οποίο η ανιξώδης εξωτερική ροή μετατοπίζεται προς τα έξω με την πτώση της ταχύτητας στο οριακό στρώμα. Η μείωση της ογκομετρικής παροχής λόγω της δράσης του ιξώδους είναι:

$$\int_0^\infty (U_\infty - u) dy$$

και επομένως η εξίσωση ορισμού του  $\delta_1$  είναι:

$$U_\infty \delta_1 = \int_0^\infty (U_\infty - u) dy$$

ή

$$\delta_1 = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U_{\infty}}\right) dy \quad (\text{πάχος μετατόπισης}) \quad (2.61)$$

Αντικαθιστώντας το  $u/U_{\infty}$  από την (2.47) γίνεται:

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{2\nu x}{U_{\infty}}} \int_0^{\infty} [1 - f'(\eta)] d\eta = \beta_1 \sqrt{\frac{2\nu x}{U_{\infty}}} = 1.7208 \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}} \quad (2.62)$$

όπου ο ορισμός του  $\beta_1$  πάρθηκε από την (2.52). Η απόσταση από το τοίχωμα  $y=\delta_1$  φαίνεται επίσης στο σχήμα 2.6a. Το ιξώδες απομακρύνει τις γραμμές ροής της εξωτερικής ροής από το τοίχωμα κατά αυτό το ποσό. Το πάχος μετατόπισης είναι προσεγγιστικά το 1/3 του πάχους του οριακού στρώματος  $\delta_{99}$  της εξίσωσης (2.60).

### Πάχος Ορμής

Σε αυτό το σημείο θα αναφερθούμε στην τιμή του πάχους ορμής  $\delta_2$ . Το μικρότερο ποσό ορμής που ρέει στο οριακό στρώμα σε σχέση με την

ανιξώδη εξωτερική ροή είναι  $\rho \int_0^{\infty} u(U_{\infty} - u) dy$  και επομένως το πάχος

ορμής μπορεί να οριστεί ως:

$$\rho U_{\infty}^2 \delta_2 = \rho \int_0^{\infty} u(U_{\infty} - u) dy$$

ή

$$\delta_2 = \int_0^{\infty} \frac{u}{U_{\infty}} \left(1 - \frac{u}{U_{\infty}}\right) dy \quad (\text{πάχος ορμής}) \quad (2.63)$$

Ο υπολογισμός για πλάκα σε μηδενική γωνία πρόσπτωσης δίνει:

$$\delta_2 = \sqrt{\frac{2\nu x}{U_{\infty}}} \int_0^{\infty} f'(1 - f') d\eta = \beta_2 \sqrt{\frac{2\nu x}{U_{\infty}}}$$

και χρησιμοποιώντας την αριθμητική τιμή του  $\beta_2$  από τον πίνακα 2.1 παίρνουμε:

$$\delta_2 = 0.664 \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}} \quad (2.64)$$

### Πάχος Ενέργειας

Η χαμηλότερη κινητική ενέργεια στο οριακό στρώμα σε σχέση με την ανιζώδη εξωτερική ροή είναι  $\rho \int_0^{\infty} u(U_{\infty}^2 - u^2) dy$  και επομένως το πάχος ενέργειας μπορεί να οριστεί ως:

$$\rho U_{\infty}^2 \delta_3 = \rho \int_0^{\infty} u(U_{\infty}^2 - u^2) dy$$

ή

$$\delta_3 = \int_0^{\infty} \frac{u}{U_{\infty}} \left( 1 - \frac{u^2}{U_{\infty}^2} \right) dy \quad (\text{πάχος ενέργειας}) \quad (2.65)$$

Ο υπολογισμός για πλάκα με μηδενική πρόσπτωση δίνει:

$$\delta_3 = \sqrt{\frac{2\nu x}{U_{\infty}}} \int_0^{\infty} f'(1 - f'^2) d\eta = \beta_3 \sqrt{\frac{2\nu x}{U_{\infty}}} = 1.0444 \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}} \quad (2.66)$$

Παρακάτω δίνονται τα αποτελέσματα των παραπάνω υπολογισμών:

Πάχος μετατόπισης:  $\delta_1 = 0.34\delta_{99}$

Πάχος ορμής:  $\delta_2 = 0.13\delta_{99}$

Πάχος ενέργειας:  $\delta_3 = 0.20\delta_{99}$

### Ανωμαλία Εμπρόσθιου Άκρου

Από τις (2.51) και (2.54) φαίνεται ότι η ταχύτητα μετατόπισης  $v_{\infty}(x)$  και η διατμητική τάση  $\tau_w(x)$  γίνονται άπειρα στο μπροστινό άκρο  $x=0$ . Αυτή η ανωμαλία είναι μια ένδειξη ότι η θεωρία του οριακού στρώματος δεν ισχύει στο μπροστινό άκρο. Αυτή η ανωμαλία μπορεί να ξεπεραστεί χρησιμοποιώντας μία θεωρία υψηλότερης τάξης.

### Πειραματικές Μελέτες

Μετρήσεις για την επιβεβαίωση της υπάρχουσας θεωρίας πραγματοποιήθηκαν πρώτα από τον B.G. Van der Hegge Zijnen (1924) και τον J.M. Burgers (1924) και στη συνέχεια από τον M. Hansen (1928). Πολύ διαφωτιστικές μετρήσεις παρουσιάστηκαν αργότερα από τον J. Nikuradse (1942). Έδειξε ότι το στρώμα τριβής εξαρτάται ισχυρά από τη μορφή της μύτης στο μπροστινό άκρο της πλάκας και επίσης από αδύναμες κλίσεις πίεσης που μπορεί να υπάρχουν στην εξωτερική ροή. Αυτές οι περιπτώσεις λήφθηκαν υπόψη στις μετρήσεις του J. Nikuradse

οι οποίες έγιναν σε πλάκα κάτω από ροή αέρα. Στο σχήμα 2.7 φαίνονται οι μετρήσεις του J. Nikuradse για την κατανομή ταχύτητας στο στρωτό οριακό στρώμα για διαφορετικές αποστάσεις από το μπροστινό άκρο της πλάκας. Η ανωμαλία στην κατανομή ταχύτητας σε διαφορετικές αποστάσεις  $x$  από το μπροστινό άκρο που προβλέπεται από τη θεωρία επιβεβαιώνεται από τις μετρήσεις και η μορφή των πειραματικών κατανομών ταχύτητας συμφωνεί αρκετά καλά με τη θεωρία. Στο σχήμα

1.4 απεικονίζεται το αδιάστατο πάχος του οριακού στρώματος  $\delta_{99} \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu}}$  ως

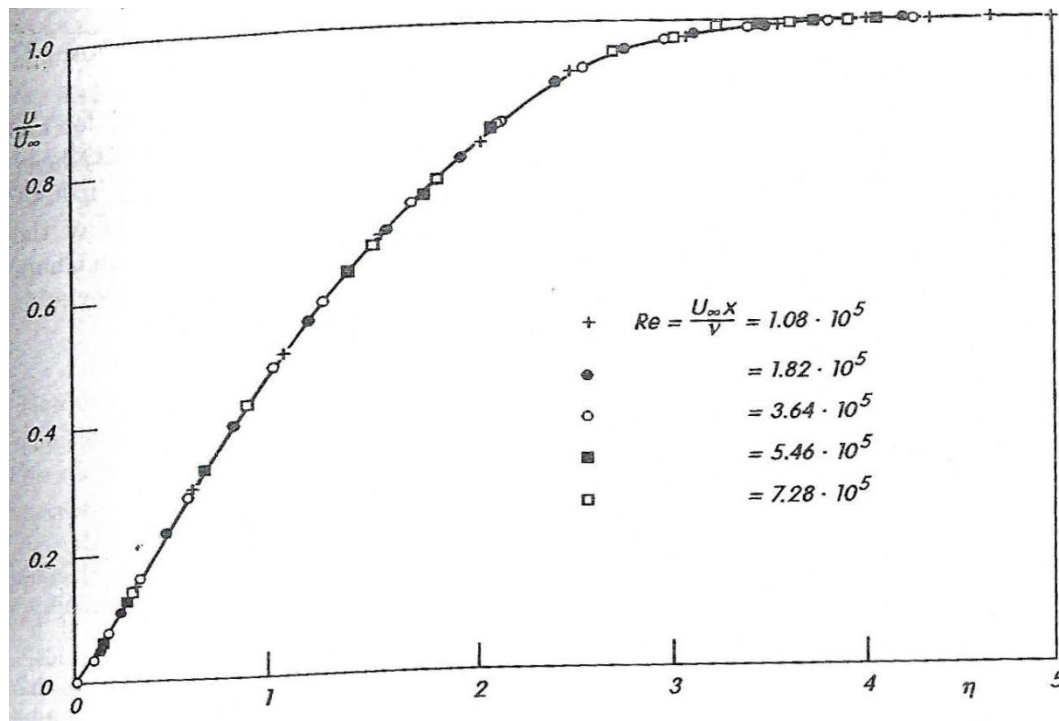
προς τον αριθμό Reynolds που σχηματίζεται με το μήκος  $x$ . Όσο το οριακό στρώμα παραμένει στρωτό, αυτή η αδιάστατη τιμή παραμένει σταθερή και η αριθμητική της τιμή είναι προσεγγιστικά ίση με αυτή που δίνει η εξίσωση (2.60). Για μεγάλους αριθμούς Reynolds  $U_\infty x/\nu$ , το οριακό στρώμα δεν παραμένει στρωτό και αντικαθίσταται από τυρβώδες οριακό στρώμα. Αυτό φαίνεται στο σχήμα 1.4 γιατί στο τυρβώδες οριακό στρώμα το πάχος του οριακού στρώματος αυξάνεται πολύ γρηγορότερα με το μήκος  $x$ . Οι μετρήσεις του B.G. Van der Hegge Zijnen (1924) και του M. Hansen (1928) δείχνουν ότι η μετάβαση από το στρωτό στο τυρβώδες λαμβάνει χώρα στην τιμή του αριθμού Reynolds  $U_\infty x/\nu = 3 \cdot 10^5$ . Από την εξίσωση (2.62) αυτό αντιστοιχεί σε έναν αριθμό Reynolds σχηματιζόμενο με το πάχος μετατόπισης  $U_\infty \delta_1/\nu = 950$ . Πιο πρόσφατες μετρήσεις έχουν δείξει ότι αυτός ο κρίσιμος αριθμός Reynolds μπορεί να πάρει ακόμη και υψηλότερες τιμές έως και  $U_\infty x/\nu = 3 \cdot 10^6$  σε ροή αέρα η οποία δεν έχει διαταραχές.

Ο στρωτός νόμος τριβής της επίπεδης πλάκας έχει επίσης εξεταστεί εξονυχιστικά. Από τη μία πλευρά η τοπική διατμητική τάση μπορεί να υπολογιστεί έμμεσα από την (2.34) από την κλίση της κατανομής ταχύτητας. Από την άλλη πλευρά άμεσες μετρήσεις διατμητικής τάσης μπορεί να γίνουν χρησιμοποιώντας ένα μικρό μέρος της πλάκας το οποίο έχει τοποθετηθεί με ευέλικτο τρόπο στο τοίχωμα. Τα αποτελέσματα αυτών των ακριβών μετρήσεων των H.W. Liepmann και S. Dhawan (1951) φαίνονται στο σχήμα 2.8. Ο συντελεστής επιδερμικής

τριβής  $c_f = \frac{\tau_w}{\frac{\rho}{2} U_\infty^2}$  σχεδιάζεται σε σχέση με τον αριθμό Reynolds που

σχηματίζεται με το μήκος  $x$ , δηλαδή  $Re_x = U_\infty x/\nu$ . Στην περιοχή τιμών του

αριθμού Reynolds από  $Re_x=2 \cdot 10^5$  έως  $Re_x=6 \cdot 10^5$  είναι πιθανές και οι δύο καταστάσεις (στρωτή και τυρβώδης). Σε αυτήν την περιοχή



Σχήμα 2.7 Κατανομές ταχύτητας στο στρωτό οριακό στρώμα σε επίπεδη πλάκα σε μηδενική γωνία πρόσπτωσης (μετρήσεις του J. Nikuradse, 1942) [2].

### 3. ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΟΡΙΑΚΟΥ ΣΤΡΩΜΑΤΟΣ

#### 3.1 ΓΕΝΙΚΑ

Σε πολλές πρακτικές περιπτώσεις δεν είναι οι λεπτομέρειες του πεδίου ταχυτήτων μέσα στο οριακό στρώμα που έχουν ενδιαφέρον, αλλά μάλλον τιμές ολοκληρωμάτων του οριακού στρώματος που εξαρτώνται από το μήκος  $x$ , αλλά είναι «συνολικές τιμές» σε σχέση με οποιαδήποτε εξάρτηση από το  $y$ . Τέτοιες κατάλληλες τιμές ολοκληρωμάτων για τη συνολική περιγραφή του οριακού στρώματος εξάγονται από την ολοκλήρωση των εξισώσεων του οριακού στρώματος ως προς το  $y$  πάνω στο πάχος του οριακού στρώματος.

#### 3.2 ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΟΡΜΗΣ

Για να κατασκευάσουμε την ολοκληρωτική εξίσωση ορμής του οριακού στρώματος περιοριζόμαστε αρχικά σε επίπεδη, μόνιμη και ασυμπίεστη ροή.

$$\int_{y=0}^h \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - U \frac{dU}{dx} \right) dy = -\frac{\tau_w}{\rho} \quad (3.1)$$

όπου  $y=0$  είναι το τοίχωμα και  $y=h$  είναι οπουδήποτε έξω από το οριακό στρώμα.

Από την εξίσωση συνέχειας, η κάθετη ταχύτητα  $v$ , μπορεί να αντικατασταθεί με:  $v = \int_{y=0}^y \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy$ . Έτσι βρίσκουμε:

$$\int_{y=0}^h \left( u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy - U \frac{dU}{dx} \right) dy = -\frac{\tau_w}{\rho}$$

Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες τον δεύτερο όρο παίρνουμε:

$$\int_{y=0}^h \left( \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy \right) dy = U \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy - \int_0^h u \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

και τελικά:

$$\int_0^h \left( 2u \frac{\partial u}{\partial x} - U \frac{\partial u}{\partial x} - U \frac{dU}{dx} \right) dy = -\frac{\tau_w}{\rho}$$

Το αποτέλεσμα αυτό γράφεται και ως:

$$\int_0^h \left( \frac{\partial}{\partial x} [u(U-u)] \right) dy + \frac{dU}{dx} \int_0^h (U-u) dy = \frac{\tau_w}{\rho}$$

Αφού και στα δύο ολοκληρώματα η ολοκληρωτέα συνάρτηση μηδενίζεται έξω από το οριακό στρώμα, μπορούμε να θέσουμε  $h \rightarrow \infty$ .

Στη συνέχεια θα εισάγουμε το πάχος μετατόπισης  $\delta_1$  και το πάχος ορμής  $\delta_2$  μέσω των εξισώσεων:

$$\delta_1 U = \int_{y=0}^{\infty} (U-u) dy \quad (\text{πάχος μετατόπισης}) \quad (3.2)$$

και

$$\delta_2 U^2 = \int_{y=0}^{\infty} u(U-u) dy \quad (\text{πάχος ορμής}) \quad (3.3)$$

Στον πρώτο όρο της παραπάνω εξίσωσης, η σειρά της παραγωγίσις ως προς  $x$  και της ολοκλήρωσης ως προς  $y$  μπορεί να αλλάξει αφού το άνω όριο  $h$  είναι ανεξάρτητο του  $x$ . Αυτό οδηγεί στην εξίσωση:

$$\frac{d}{dx} (U^2 \delta_2) + \delta_1 U \frac{dU}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho} \quad (3.4)$$



Αυτή είναι η ολοκληρωτική εξίσωση ορμής για επίπεδα ασυμπίεστα οριακά στρώματα. Με αυτή τη μορφή είναι έγκυρη και για στρωτά και για τυρβώδη οριακά στρώματα.

### 3.3 ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Χρησιμοποιώντας παρόμοια προσέγγιση με την ολοκληρωτική εξίσωση ορμής δόθηκε από τον K. Wieghardt (1948) μία ολοκληρωτική εξίσωση ενέργειας για το στρωτό οριακό στρώμα. Η εξίσωση αυτή εξάγεται αν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση κίνησης με το  $u$  και μετά ολοκληρώσουμε από  $y=0$  έως  $y=h>\delta(x)$ . Αντικαθιστώντας ξανά το  $v$  από την εξίσωση συνέχειας παίρνουμε:

$$\rho \int_0^h \left( u^2 \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy - uU \frac{dU}{dx} \right) dy = \mu \int_0^h u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy$$

Ο δεύτερος όρος μπορεί να ολοκληρωθεί κατά παράγοντες και να δώσει:

$$\int_0^h \left( u \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^h (U^2 - u^2) \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

Ο συνδυασμός του πρώτου και του τρίτου όρου δίνει:

$$\rho \int_0^h \left( u^2 \frac{\partial u}{\partial x} - uU \frac{dU}{dx} \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^h u \frac{d}{dx} (u^2 - U^2) dy$$

Αν επίσης ολοκληρώσουμε κατά παράγοντες το δεύτερο μέρος παίρνουμε:

$$\frac{1}{2} \rho \frac{d}{dx} \int_0^\infty u (U^2 - u^2) dy = \mu \int_0^\infty \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy \quad (3.5)$$

Εδώ ξανά το όριο του ολοκληρώματος μπορεί να αντικατασταθεί με  $h \rightarrow \infty$ , αφού έξω από το οριακό στρώμα οι συναρτήσεις που

ολοκληρώνονται μηδενίζονται. Η ποσότητα  $\mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$  δίνει την ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμότητα ανά μονάδα όγκου και χρόνου από την τριβή. Στο αριστερό μέρος ο όρος  $\frac{\rho}{2}(U^2 - u^2)$  είναι η απώλεια μηχανικής ενέργειας (κινητικής ενέργειας) την οποία το οριακό στρώμα χάνει επιπλέον σε σύγκριση με την αστρόβιλη ροή. Επομένως η ποσότητα  $\frac{\rho}{2} \int_0^{\infty} u(U^2 - u^2) dy$  είναι η ροή απώλειας ενέργειας και το αριστερό μέρος είναι η μεταβολή στη ροή απώλειας ενέργειας ανά μονάδα μήκους στη διεύθυνση x.

Αν εισάγουμε το πάχος ενέργειας  $\delta_3$  μέσω της σχέσης:

$$\delta_3 U^3 = \int_{y=0}^{\infty} u(U^2 - u^2) dy \quad (\text{πάχος ενέργειας}) \quad (3.6)$$

παίρνουμε από την (3.5):

$$\frac{d}{dx} (U^3 \delta_3) = 2\nu \int_0^{\infty} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy \quad (3.7)$$

ή επειδή  $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$

$$\frac{d}{dx} (U^3 \delta_3) = \frac{2}{\rho} \int_0^{\infty} \tau \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy = \frac{2}{\rho} D \quad (3.8)$$

Το ολοκλήρωμα D που ορίζεται μέσω της (3.8) ονομάζεται ολοκλήρωμα απώλειας. Αυτή είναι η ολοκληρωτική εξίσωση ενέργειας για επίπεδα ασυμπίεστα οριακά στρώματα. Στη μορφή της (3.8) είναι έγκυρη και για τυρβώδη οριακά στρώματα.

Ο K. Wieghardt (1948) έχει δείξει ότι περισσότερες ολοκληρωτικές εξισώσεις είναι δυνατόν να γραφούν για το οριακό στρώμα αν η εξίσωση του οριακού στρώματος πολλαπλασιαστεί με κάποια δύναμη  $u^n$  ( $n=0,1,2,\dots$ ) και στη συνέχεια ολοκληρώσουμε πάνω στο οριακό στρώμα. Ωστόσο η ισχύς των σχέσεων που περιέχονται στις

ολοκληρωτικές εξισώσεις που εξάγονται με αυτόν τον τρόπο μειώνεται καθώς αυξάνεται το  $n$ . Έτσι, μόνο οι δύο ολοκληρωτικές εξισώσεις, για  $n=0$  (ολοκληρωτική εξίσωση ορμής) και για  $n=1$  (ολοκληρωτική εξίσωση ενέργειας) χρησιμοποιούνται στην πράξη.

### 3.4 ΡΟΠΗ ΤΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΟΡΜΗΣ

Μία οικογένεια  $n$  το πλήθος ολοκληρωτικών εξισώσεων μπορεί να παραχθεί αν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση του οριακού στρώματος με τη δύναμη  $y^n$  και στη συνέχεια ολοκληρώσουμε πάνω στο πάχος του οριακού στρώματος. Αν επιπλέον απαλείψουμε τη συνιστώσα  $v$  χρησιμοποιώντας την εξίσωση συνέχειας, παίρνουμε:

$$\int_0^{\infty} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy - U \frac{dU}{dx} \right) y^n dy = \frac{1}{\rho} \int_0^{\infty} \frac{\partial \tau}{\partial y} y^n dy \quad (3.9)$$

Η περίπτωση  $n=0$  αντιστοιχεί στην ολοκληρωτική εξίσωση ορμής. Για  $n=1$  εξάγουμε την ροπή της ολοκληρωτικής εξίσωσης ορμής στην ακόλουθη μορφή:

$$\frac{d}{dx} \left[ \int_0^{\infty} u(U-u)y dy \right] + \int_0^{\infty} \left[ (U-u) \frac{\partial}{\partial x} \left( Uy + \int_0^y u dy \right) \right] dy = \frac{1}{\rho} \int_0^{\infty} \tau dy \quad (3.10)$$

Στην πράξη αυτή η ολοκληρωτική εξίσωση συχνά προτιμάται σε σχέση με την ολοκληρωτική εξίσωση ενέργειας, γιατί γενικά το ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στην (3.10) είναι πιο εύκολο να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τη διατμητική τάση από το ολοκλήρωμα απώλειας της (3.8). Για στρωτές ροές το δεξιό μέρος της (3.10) είναι απλά  $\nu U$ .

## **4. ΕΝΑΡΞΗ ΤΗΣ ΤΥΡΒΗΣ (ΘΕΩΡΙΑ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ)**

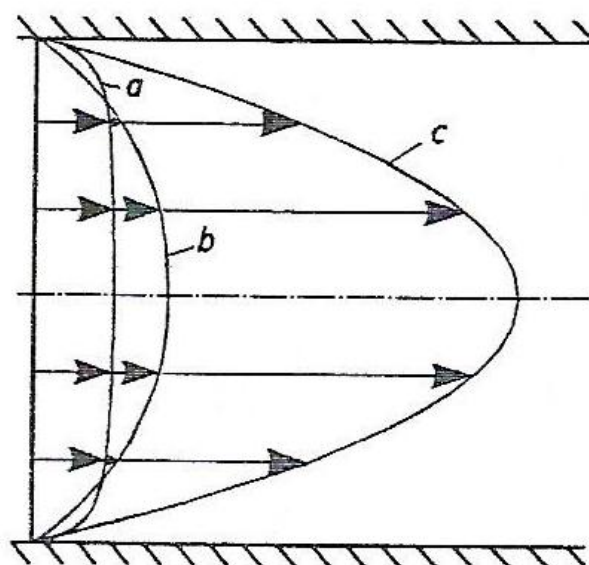
### **4.1 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΑΠΟ ΤΗ ΣΤΡΩΤΗ ΣΤΗΝ ΤΥΡΒΩΔΗ ΡΟΗ**

#### **4.1.1 Μετάβαση στη ροή σε σωλήνα**

Σε πολλές περιπτώσεις οι ροές αποκλίνουν σημαντικά από τις στρωτές ροές. Δείχνουν ένα χαρακτηριστικό γνώρισμα που ονομάζεται τύρβη. Καθώς ο αριθμός Reynolds αυξάνεται οι εσωτερικές ροές μέσα σε σωλήνες και κανάλια και τα εξωτερικά οριακά στρώματα κοντά σε σώματα εμφανίζουν μία αξιοσημείωτη αλλαγή από τη στρωτή στην τυρβώδη ροή. Αυτή η μετάβαση από τη στρωτή στην τυρβώδη ροή που ονομάζεται έναρξη της τύρβης έχει θεμελιώδη σημασία για τη Μηχανική των Ρευστών.

Αυτό το φαινόμενο παρατηρήθηκε πρώτα σε ροές σε σωλήνες και κανάλια. Σε χαμηλούς αριθμούς Reynolds κάθε σωματίδιο του ρευστού σε ένα μακρύ ίσιο σωλήνα με σταθερή διατομή και λεία τοιχώματα κινείται με σταθερή ταχύτητα σε ευθεία γραμμή. Λόγω των δυνάμεων τριβής, τα σωματίδια κοντά στο τοίχωμα κινούνται πιο αργά σε σχέση με τα σωματίδια στο εσωτερικό. Η ροή είναι τέτοια ώστε καλά διατεταγμένα στρώματα κινούνται παράλληλα (στρωτή ροή). Ωστόσο έχει παρατηρηθεί ότι η τάξη αυτή δεν υπάρχει σε μεγαλύτερους αριθμούς Reynolds. Μάλλον συμβαίνει ένα φαινόμενο ανάμιξης. Αυτό είδε ο O. Reynolds (1883) σε ροή σε σωλήνα χρησιμοποιώντας «χρωματιστά νήματα» που πρόσθεσε στη ροή. Όσο η ροή είναι στρωτή τα χρωματιστά σωματίδια του ρευστού κινούνται μέσα στο σωλήνα σαν νήματα με ξεκάθαρα όρια. Ωστόσο όταν η ροή γίνεται τυρβώδης τα χρωματιστά νήματα σπάνε και το ρευστό στο σωλήνα εμφανίζεται να είναι παντού χρωματισμένο. Στην τυρβώδη ροή, οι κάθετες κινήσεις οι οποίες προκαλούν αυτήν την ανάμιξη προστίθενται στην κύρια κίνηση στην διεύθυνση του άξονα του

σωλήνα. Αυτή η κάθετη κίνηση προκαλεί μια ανταλλαγή ορμής στην κάθετη διεύθυνση αφού κάθε σωματίδιο ουσιαστικά διατηρεί την ορμή του στην παράλληλη διεύθυνση ενώ εκτελεί την μικτή κίνηση. Αποτέλεσμα αυτού είναι ότι η κατανομή ταχύτητας στη διατομή του σωλήνα είναι πιο ομογενής σε σχέση με τη στρωτή ροή. Στο σχήμα 4.1 φαίνεται η μετρούμενη κατανομή ταχύτητας σε σωλήνα για στρωτή και τυρβώδη ροή. Ενώ η κατανομή ταχύτητας είναι παραβολική για στρωτή ροή, στην τυρβώδη ροή η ανταλλαγή ορμής την κάνει πιο ομογενή. Μία πιο λεπτομερής ανάλυση της τυρβώδους ροής θα δείξει ότι το πιο εκπληκτικό χαρακτηριστικό της είναι ότι η ταχύτητα και η πίεση σε ένα συγκεκριμένο σημείο του χώρου δεν είναι σταθερές στο χρόνο αλλά εκτελούν ανώμαλες διακυμάνσεις μεταβαλλόμενης συχνότητας. Μόνο η μέση τιμή της ταχύτητας σε μεγάλο χρονικό διάστημα μπορεί να θεωρηθεί σταθερή (οιωνεί-μόνιμη κίνηση). Η οιωνεί-μόνιμη ροή σε σωλήνα στην οποία η ταχύτητα εξαρτάται από τη θέση και το χρόνο μπορεί να χαρακτηριστεί είτε από τη χρονική μέση τιμή της ογκομετρικής παροχής  $Q$  ή τη χρονική μέση τιμή της κλίσης της πίεσης  $-\frac{d\bar{p}}{dx}$ . Αυτό φαίνεται καθαρά στο σχήμα 4.1. Η καμπύλη *a* δείχνει τη χρονική μέση τιμή της κατανομής ταχύτητας της τυρβώδους ροής σε σωλήνα. Οι άλλες δύο κατανομές αντιστοιχούν σε στρωτή ροή σωλήνα, στην ίδια ογκομετρική παροχή (καμπύλη *b*) και στην ίδια κλίση πίεσης (καμπύλη *c*) με την καμπύλη *a*.



Σχήμα 4.1 Κατανομή ταχύτητας σε σωλήνα [2].

- (α) τυρβώδης  
 (b) στρωτή, ίδια ογκομετρική παροχή με α  
 (c) στρωτή, ίδια κλίση πίεσης με α

Οι πρώτες συστηματικές μελέτες αυτών των δύο θεμελιωδώς διαφορετικών καταστάσεων ροής έγιναν από τον O. Reynolds (1883). Ο ίδιος επίσης εκτέλεσε το πείραμα των χρωματιστών νημάτων το οποίο πήρε το όνομά του. Ανακάλυψε την αρχή της ομοιότητας σε σχέση με τον αριθμό Reynolds σύμφωνα με την οποία η μετάβαση από τη στρωτή στην τυρβώδη ροή συμβαίνει πάντα στην ίδια περίπου τιμή του αριθμού Reynolds  $Re = u_m d / \nu$  όπου  $u_m = Q/A$  είναι η μέση ταχύτητα ( $Q =$  ογκομετρική παροχή,  $A =$  εμβαδόν διατομής σωλήνα). Η αριθμητική τιμή του αριθμού Reynolds στην οποία συμβαίνει η μετάβαση (κρίσιμος αριθμός Reynolds) βρέθηκε ότι είναι:

$$Re_{crit} = \left( \frac{u_m d}{\nu} \right)_{crit} = 2300 \quad (4.1)$$

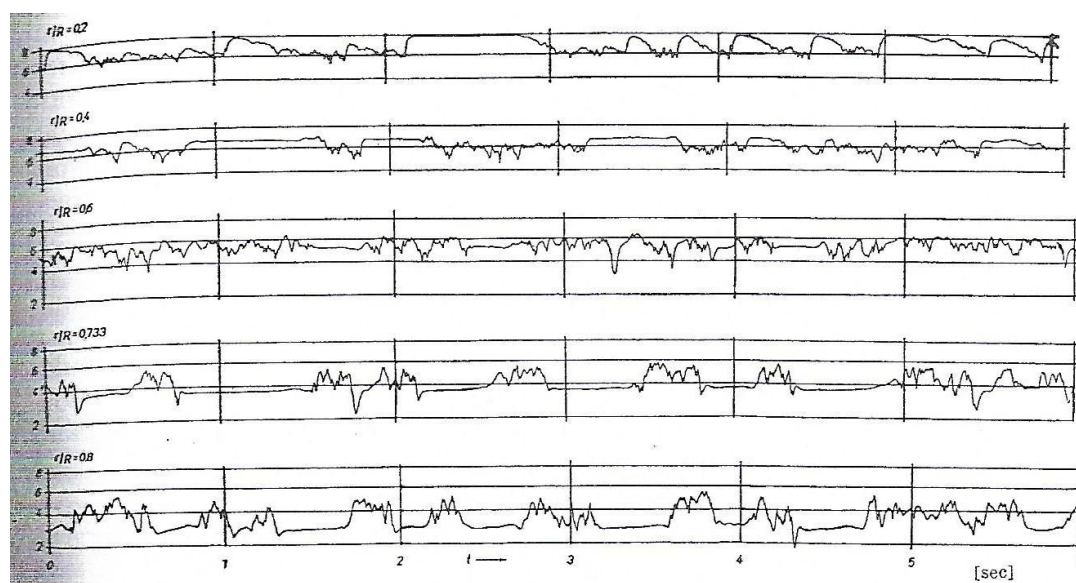
Αντίστοιχα, ροές σε σωλήνα για τις οποίες ο αριθμός Reynolds είναι  $Re < Re_{crit}$  είναι στρωτές και εκείνες για τις οποίες  $Re > Re_{crit}$  είναι τυρβώδεις.

Οι δύο στρωτές ροές στο σχήμα 4.1 (καμπύλες b και c) σχετίζονται με μία και την αυτή τυρβώδη ροή αλλά περιγράφονται από διαφορετικούς αριθμούς Reynolds: αυτοί είναι  $Re_p = -(dp/dx) d^3 / 32\rho\nu^2$  και  $Re_Q = u_m d / \nu$ . Για στρωτές ροές  $Re_p = Re_Q$ . Ωστόσο,  $Re_p$  και  $Re_Q$  πρέπει να διακριθούν για τυρβώδεις ροές και αποτελούν έναν τρόπο χαρακτηρισμού της τυρβώδους ροής σε σωλήνα και κανάλι.

Η αριθμητική τιμή του κρίσιμου αριθμού Reynolds εξαρτάται ισχυρά από τις ειδικές συνθήκες της εισόδου του σωλήνα και το πώς προσεγγίζεται ο σωλήνας. Στην πραγματικότητα, ο O. Reynolds είχε ήδη υποθέσει ότι ο κρίσιμος αριθμός Reynolds είναι μεγαλύτερος όσο λιγότερες είναι οι διαταραχές πριν το σωλήνα. Αυτό επιβεβαιώθηκε πειραματικά από τους H.T. Barnes και E.G. Coker (1905) και αργότερα από τον L. Schiller (1922) όπου βρέθηκαν τιμές έως και  $Re_{crit} = 20000$ . Ο V.W. Ekman (1910) χρησιμοποιώντας μία είσοδο χωρίς καθόλου διαταραχές έφτασε στην τιμή  $Re_{crit} = 40000$ . Από την άλλη μεριά, διαφορετικά πειράματα έχουν δείξει ότι υπάρχει ένα κατώτερο όριο του

$Re_{crit}$  το οποίο είναι περίπου  $Re_{crit}=2000$ . Κάτω από αυτήν την τιμή του αριθμού Reynolds, ακόμη και αν οι διαταραχές είναι πολύ ισχυρές, η ροή παραμένει στρωτή.

Με τη μετάβαση από τη στρωτή στην τυρβώδη ροή συνδέεται επίσης και μία αξιοσημείωτη μεταβολή στο νόμο οπισθέλκουσας του σωλήνα. Ενώ στη στρωτή ροή η πτώση πίεσης η οποία κινεί τη ροή είναι ανάλογη της πρώτης δύναμης της ταχύτητας  $u_m$ , αυτή η κλίση της πίεσης στην τυρβώδη ροή είναι σχεδόν ανάλογη του τετραγώνου της μέσης ταχύτητας. Αυτή η μεγάλη αντίσταση στη ροή οφείλεται στην τυρβώδη μικτή κίνηση.



Σχήμα 4.2 Χρονική μεταβολή της ταχύτητας ροής σε σωλήνα κοντά στη μετάβαση στρωτής-τυρβώδους για διάφορες αποστάσεις  $r$  από το κέντρο του σωλήνα (J.C. Rotta 1956) [2].

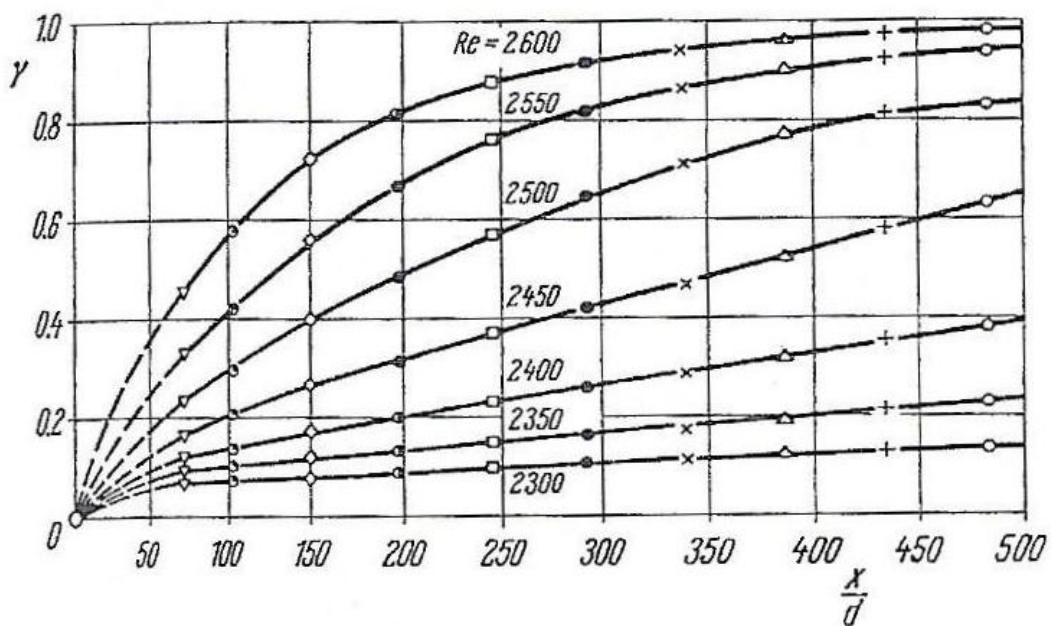
Αριθμός Reynolds  $Re=u_m d/v=2550$

Μήκος  $x/d=322$

Ταχύτητα  $u_m=4.27$  m/s

Λεπτομερείς πειραματικές μελέτες της μετάβασης από τη στρωτή στην τυρβώδη ροή σε σωλήνες έχουν δείξει ότι η ροή έχει ένα «διακοπτόμενο χαρακτήρα» σε μία περιοχή τιμών του αριθμού Reynolds κοντά στην κρίσιμη τιμή. Με αυτό εννοούμε ότι η ροή είναι ενίοτε στρωτή και ενίοτε τυρβώδης. Στο σχήμα 4.2 απεικονίζονται μετρήσεις του J.C. Rotta (1956) που δείχνουν την εξάρτηση της ταχύτητας από το χρόνο σε διαφορετικές θέσεις κατά μήκος της ακτίνας. Η απεικόνιση της

ταχύτητας δείχνει ότι υπάρχουν χρονικά διαστήματα στρωτής και τυρβώδους ροής που συμβαίνουν το ένα μετά το άλλο με ακανόνιστο τρόπο. Κοντά στο κέντρο του σωλήνα, η ταχύτητα στα διαστήματα που η ροή είναι στρωτή είναι μεγαλύτερη από τη χρονική μέση τιμή των διαστημάτων τυρβώδους ροής. Κοντά στο τοίχωμα του σωλήνα συμβαίνει το αντίστροφο. Αφού τα πειράματα έγιναν με σταθερή ογκομετρική παροχή, πρέπει να συμπεράνουμε ότι η κατανομή ταχύτητας εναλλάσσεται μεταξύ μιας ανεπτυγμένης στρωτής ροής και μιας πλήρως ανεπτυγμένης τυρβώδους ροής (καμπύλες b ή α στο σχήμα 4.1).



Σχήμα 4.3 Παράγοντας διακοπών  $\gamma$  για ροή σε σωλήνα κοντά στη μετάβαση από στρωτή σε τυρβώδη ροή συναρτήσει του μήκους  $x/d$  σε διαφορετικούς αριθμούς Reynolds (J. Rotta 1956) [2]

$\gamma=1$  συνεχώς τυρβώδης  
 $\gamma=0$  συνεχώς στρωτή.

Ο φυσικός χαρακτήρας αυτής της ροής εκφράζεται από τον συντελεστή διακοπών  $\gamma$ . Αυτός εκφράζει το κλάσμα του χρόνου στο οποίο υπάρχει τυρβώδης ροή σε μία συγκεκριμένη θέση. Επομένως  $\gamma=1$  σημαίνει συνεχώς τυρβώδης ροή και  $\gamma=0$  συνεχώς στρωτή ροή. Στο σχήμα 4.3 φαίνεται ο συντελεστής διακοπών σε διαφορετικούς αριθμούς Reynolds κατά μήκος του  $x$ . Για σταθερή τιμή του αριθμού Reynolds, ο παράγοντας διακοπών αυξάνεται συνεχώς με την απόσταση. Η μετάβαση



συμβαίνει στην περιοχή από  $Re=2300$  έως  $Re=2600$ . Κοντά στο κατώτερο όριο η ανάπτυξη από στρωτή σε πλήρως τυρβώδη ροή συμβαίνει σε πολύ μεγάλο μήκος σωλήνα, χιλιάδες φορές μεγαλύτερο από τη διάμετρο του σωλήνα.

Οι διαδικασίες που περιγράφηκαν για τη ροή σε σωλήνα με κυκλική διατομή συμβαίνουν με παρόμοιο τρόπο στην περίπτωση ροής σε επίπεδο κανάλι.

Η μετάβαση από στρωτή σε τυρβώδη ροή είναι ένα πρόβλημα ευστάθειας, που βασίζεται στην ιδέα ότι η στρωτή ροή επηρεάζεται από κάποιες μικρές διαταραχές, σαν αυτές που συμβαίνουν στην είσοδο του σωλήνα. Μόνο σε αρκετά υψηλούς αριθμούς Reynolds όπου η απόσβεση εξαιτίας του ιξώδους δεν είναι αρκετή, έτσι ώστε οι διαταραχές να γίνονται πιο έντονες και να προκαλούν την έναρξη της μετάβασης προς την τύρβη.

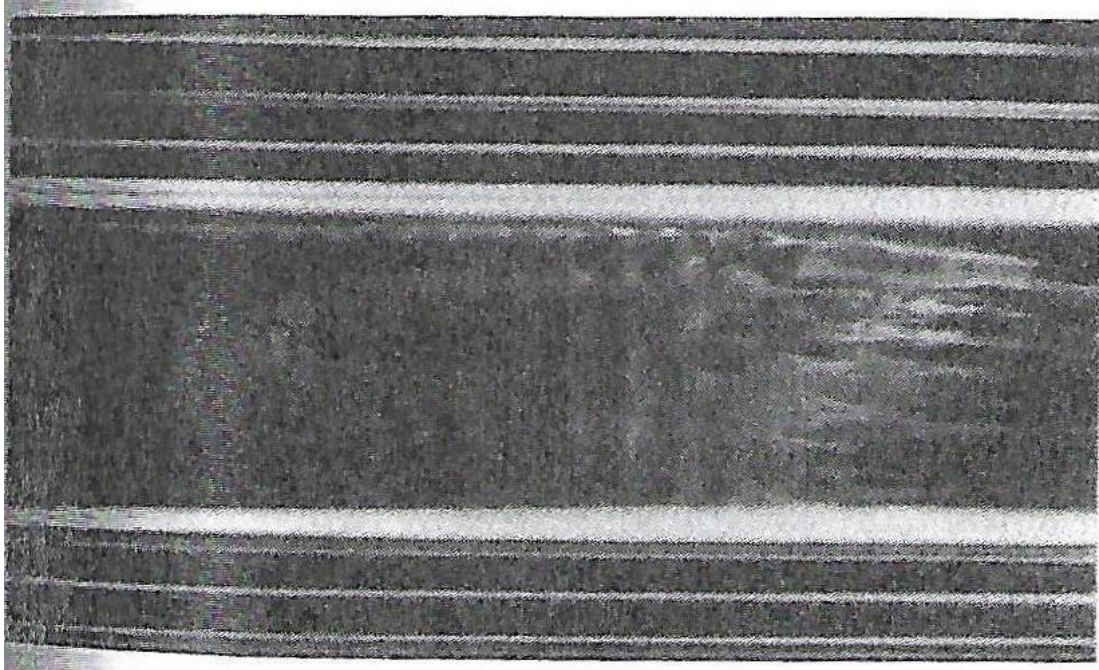
Οι αρχικές διαταραχές που συμβαίνουν σε επίπεδα οριακά στρώματα είναι δισδιάστατες αλλά στη συνέχεια εξελίσσονται σε τρισδιάστατες.

Μελέτες του παραβολικού προφίλ της ταχύτητας σε ροή σε σωλήνα μέσω της θεωρίας ευστάθειας δείχνουν ότι το προφίλ είναι σταθερό σε σχέση με τις δισδιάστατες διαταραχές. Η μετάβαση από στρωτή σε τυρβώδη ροή στους σωλήνες οφείλεται σε τρισδιάστατες διαταραχές εξαρχής.

#### **4.1.2 Μετάβαση στο οριακό στρώμα**

Σε σύγκριση με τις μελέτες σε ροή σε σωλήνα, αργότερα ανακαλύφθηκε ότι το οριακό στρώμα κοντά σε σώμα μπορεί επίσης να είναι στρωτό ή τυρβώδες. Σε αυτήν την περίπτωση, η συνολική συμπεριφορά της ροής πέρα από το σώμα, ειδικότερα η δύναμη που δρα στο σώμα, εξαρτάται ισχυρά από το κατά πόσον το οριακό στρώμα είναι στρωτό ή τυρβώδες. Η μετάβαση στρωτής-τυρβώδους στο οριακό στρώμα ενός στερεού σώματος επηρεάζεται από πολλές παραμέτρους. Οι σημαντικότερες από αυτές, πέρα από τον αριθμό Reynolds, είναι η κατανομή πίεσης της εξωτερικής ροής, η φύση του τοιχώματος (τραχύτητα) και το επίπεδο διαταραχών της εξωτερικής ροής (ένταση τύρβης). Στο σχήμα 4.4 φαίνεται η μετάβαση στρωτής-τυρβώδους στο οριακό στρώμα ενός στερεού εκ περιστροφής. Πρόκειται για μία στιγμιαία εικόνα της δομικής ανάπτυξης στη μεταβατική περιοχή. Η περιοχή της στρωτής ροής

αντικαθίσταται από αξονοσυμμετρικά κύματα που ονομάζονται κύματα Tollmien-Schlichting. Αυτά προκαλούν την έναρξη της μετάβασης στην τυρβώδη ροή μέσω του σχηματισμού μιας μεταγενέστερης χαρακτηριστικής τρισδιάστατης δομής.



Σχήμα 4.4 Άποψη της διαδικασίας μετάβασης στο οριακό στρώμα κοντά σε στερεό σώμα εκ περιστροφής (F.N.M. Brown 1957) [2].

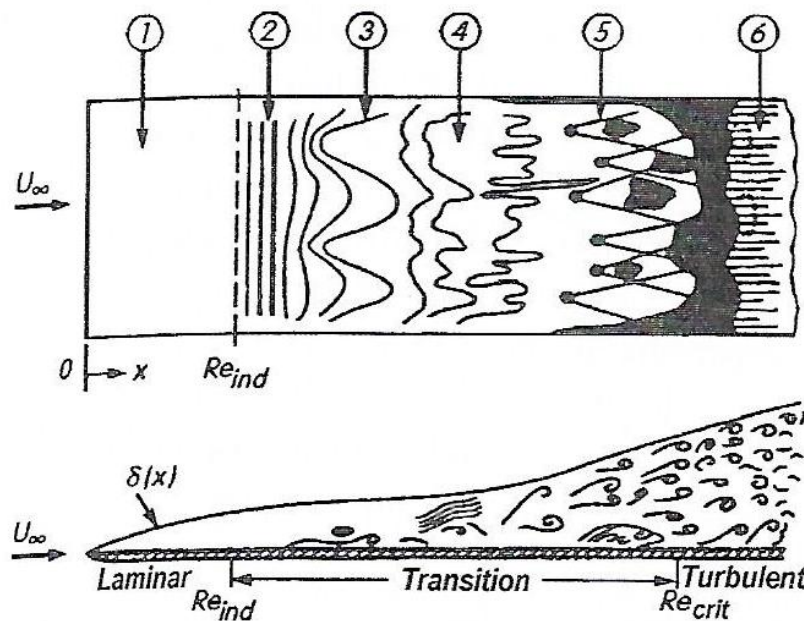
#### **Επίπεδη πλάκα σε μηδενική γωνία πρόσπτωσης**

Όπως και σε ένα στερεό εκ περιστροφής η μετάβαση στρωτής-τυρβώδους μπορεί να παρατηρηθεί σε επίπεδη πλάκα σε μηδενική γωνία πρόσπτωσης. Για το στρωτό οριακό στρώμα έχειδειχθεί ότι το πάχος του οριακού στρώματος αυξάνεται με το  $\sqrt{x}$ , όπου  $x$  είναι η απόσταση από το μπροστινό άκρο. Η μετάβαση από το στρωτό στο τυρβώδες οριακό στρώμα μελετήθηκε αρχικά από τους J.M. Burgers (1924), B.G. Van der Hegge Zijnen (1924), αργότερα από τον M. Hansen (1928) και πιο επισταμένα από τον H.L. Dryden (1934, 1937, 1939). Κοντά στο μπροστινό άκρο της πλάκας, το οριακό στρώμα είναι αρχικά πάντα στρωτό αλλά παρακάτω κατά μήκος της ροής γίνεται τυρβώδες. Για μία πλάκα με αιχμηρό μπροστινό άκρο, η μετάβαση στρωτής-τυρβώδους σε

κανονικό ρεύμα αέρα συμβαίνει σε απόσταση  $x$  από το μπροστινό άκρο που δίνεται από τη σχέση:

$$Re_{x,crit} = \left( \frac{U_{\infty} x}{\nu} \right)_{crit} = 3.5 \cdot 10^5 \text{ με } 10^6$$

Όπως και σε ένα σωλήνα, ο κρίσιμος αριθμός Reynolds για μία πλάκα σε μηδενική γωνία πρόσπτωσης μπορεί να αυξηθεί αν εξασφαλιστεί μία εξωτερική ροή χωρίς διαταραχές (μικρή ένταση τύρβης).

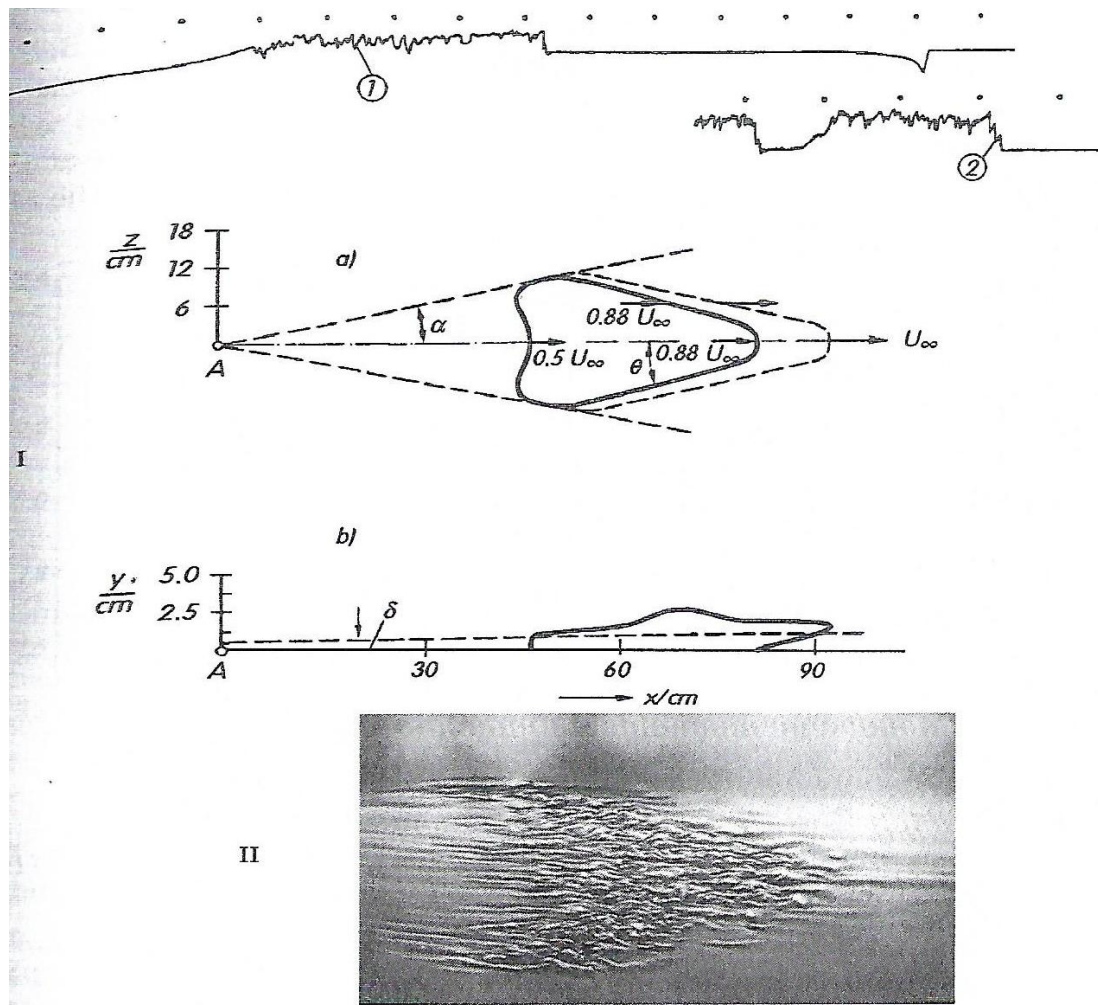


Σχήμα 4.5 Σχηματική απεικόνιση της μετάβασης στρωτής-τυρβώδους στο οριακό στρώμα επίπεδης πλάκας σε μηδενική γωνία πρόσπτωσης από την εργασία του F.M. White (1974) [2].

- (1) Ευσταθής στρωτή ροή
- (2) Ασταθή κύματα Tollmien-Schlichting
- (3) Τρισδιάστατα κύματα και σχηματισμός δίνης (δομές  $\Lambda$ )
- (4) Απόσβεση δίνης
- (5) Σχηματισμός στιγμάτων τύρβης
- (6) Πλήρως τυρβώδης ροή

Τα πειραματικά αποτελέσματα φαίνονται στο σχήμα 4.5. Δισδιάστατα κύματα Tollmien-Schlichting συμβάλλουν στο στρωτό οριακό στρώμα σε μία αδιάφορη τιμή του αριθμού Reynolds  $Re_{ind}$ . Αυτά μπορούν να

περιγραφούν χρησιμοποιώντας θεωρία ευστάθειας. Επειδή υπάρχουν δευτερεύουσες αστάθειες οι τρισδιάστατες διαταραχές συμβάλλουν περισσότερο κατάντη. Αυτές οδηγούν στο σχηματισμό μίας χαρακτηριστικής δομής  $\Lambda$ . Οι δίνες  $\Lambda$  αντικαθίστανται από τυρβώδη στίγματα τα οποία προκαλούν την έναρξη της μετάβασης στην πλήρως τυρβώδη ροή. Όταν  $Re_x = Re_{x,crit}$ , η διαδικασία μετάβασης είναι πλήρης και περαιτέρω κατάντη η ροή είναι πλήρως τυρβώδης.



Σχήμα 4.6 Ανάπτυξη ενός τεχνητού στίγματος τύρβης στο μεταβατικό οριακό στρώμα επίπεδης πλάκας σε μηδενική γωνία πρόσπτωσης [2].

(I) Μετρήσεις των G.B. Schubauer, P.S. Klebanoff (1955).

(a) Κάτοψη

(b) Πλαϊνή όψη ενός τεχνητού στίγματος τύρβης στη θέση A σε απόσταση περίπου 70cm από τη θέση της εμφάνισης. Η θέση A είναι περίπου 70cm πίσω από το μπροστινό άκρο της πλάκας.

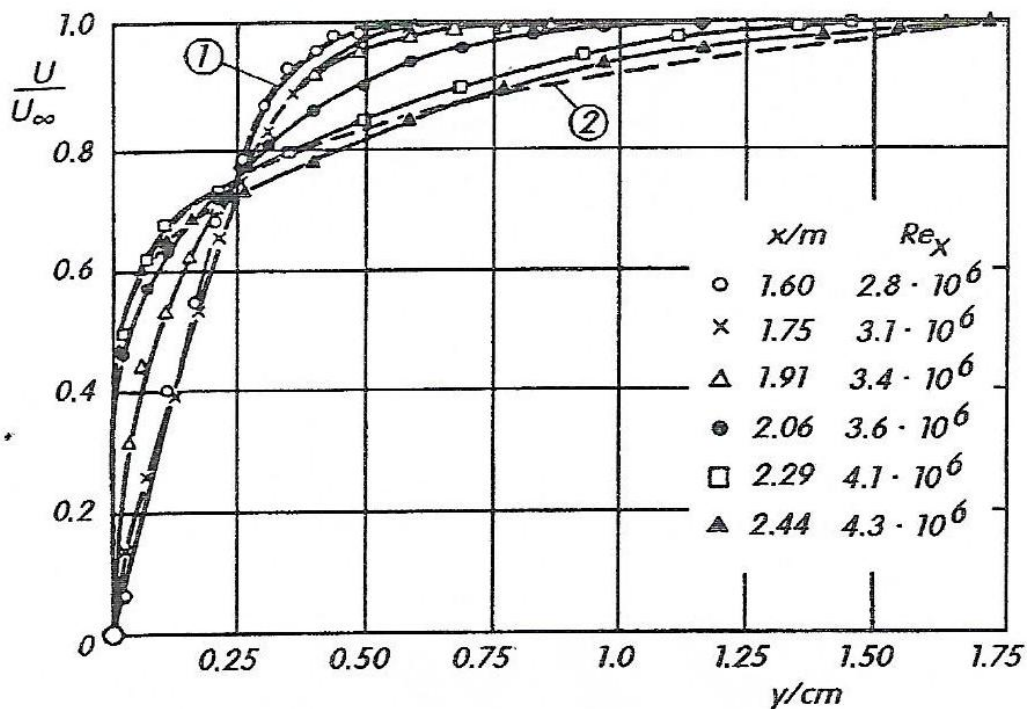
$\alpha=11.3^\circ$ ,  $\theta=15.3^\circ$ ,  $\delta$ =πάχος στρωτού οριακού στρώματος, ταχύτητα ελευθέρου ρεύματος  $U_\infty=10\text{m/s}$ .

(1) και (2): παλμογράφημα ανεμομέτρου που κινείται μέσω ενός τεχνητού στίγματος τύρβης και ενός φυσικού στίγματος τύρβης αντίστοιχα.

Χρονικό διάστημα ανάμεσα σε δύο σημάδια:  $s/60$ .

(II) εικόνα από τον R. Falco (1980).

Μελέτες που έγιναν από τους H.W. Emmons, A.E. Bryson (1951/52) και G.B. Schubauer, P.S. Klebanoff (1955) έδειξαν ότι τα στίγματα τύρβης στο σχήμα 4.6 εμφανίζονται ακανόνιστα σε αυθαίρετες θέσεις στο οριακό στρώμα και περιπλανιούνται κατάντη σε μία περιοχή σφηνοειδούς σχήματος. Τέτοια στίγματα τύρβης εμφανίζονται ακανόνιστα στο χρόνο σε διάφορες ακανόνιστα κατανομημένες θέσεις στην πλάκα.



Σχήμα 4.7 Κατανομή ταχύτητας του οριακού στρώματος πλάκας κοντά στη μετάβαση στρωτής-τυρβώδους. Μετρήσεις των G.B. Schubauer, P.S. Klebanoff (1955) [2].

(1) Στρωτή, προφίλ Blasius

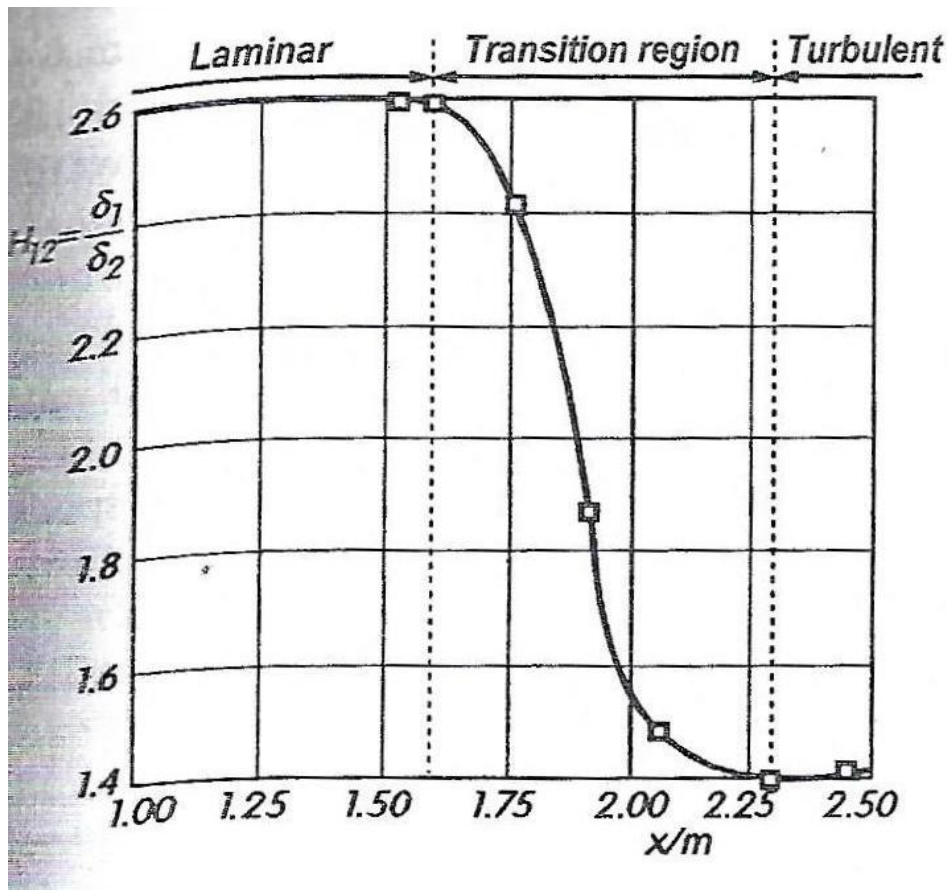
(2) Τυρβώδης,  $\delta=17\text{mm}$

Εξωτερική ταχύτητα  $U_\infty=27\text{m/s}$

Ένταση τύρβης εξωτερικής ροής  $Tu=3 \cdot 10^{-4}$ .

Όπως μπορούμε να δούμε από το σχήμα 4.5 η μετάβαση συμβαίνει μαζί με μία μεγάλη αύξηση στο πάχος του οριακού στρώματος. Στο στρωτό οριακό στρώμα το αδιάστατο πάχος οριακού στρώματος  $\frac{\delta}{\sqrt{vx/U_\infty}}$  είναι

σταθερό και προσεγγιστικά ίσο με 5. Στο σχήμα 1.4 φαίνεται αυτό το αδιάστατο πάχος οριακού στρώματος συναρτήσει του αριθμού Reynolds που σχηματίζεται με το μήκος  $x$ , δηλαδή,  $Re_x=U_\infty x/\nu$ . Για  $Re_x \geq 3 \cdot 10^5$  συμβαίνει μία μεγάλη αύξηση στο πάχος του οριακού στρώματος.



Σχήμα 4.8 Μεταβολή του παράγοντα μορφής  $H_{12}=\delta_1/\delta_2$  για το οριακό στρώμα πλάκας κοντά στη μετάβαση στρωτής-τυρβώδους. Μετρήσεις των G.B. Schubauer, P.S. Klebanoff (1955) [2].

Επίσης, υπάρχει μία αξιοσημείωτη αλλαγή στη μορφή της κατανομής της χρονικής μέσης τιμής της ταχύτητας. Στο σχήμα 4.7 φαίνεται το προφίλ της ταχύτητας στη μεταβατική περιοχή από περίπου  $Re_x=3 \cdot 10^6$  έως  $4 \cdot 10^6$  για ένα ελεύθερο ρεύμα με πολύ χαμηλή ένταση

τύρβης σύμφωνα με τις μετρήσεις των G.B. Schubauer, P.S. Klebanoff (1955). Μέσα σε αυτήν την περιοχή η κατανομή ταχύτητας αναπλάθεται από τη μορφή του προφίλ Blasius για το στρωτό οριακό στρώμα πλάκας σε εκείνο του πλήρως τυρβώδους οριακού στρώματος πλάκας.

Μαζί με την αλλαγή της μορφής του προφίλ ταχύτητας στην μεταβατική περιοχή, υπάρχει μία ισχυρή μείωση στον παράγοντα μορφής  $H_{12}=\delta_1/\delta_2$ , όπως φαίνεται στο σχήμα 4.8. Για το οριακό στρώμα πλάκας ο παράγοντας μορφής από την τιμή  $H_{12}=2.59$  στη στρωτή περιοχή μειώνεται σε  $H_{12}=1.4$  στην τυρβώδη περιοχή.

Υπάρχει επίσης μία μεγάλη μεταβολή στην οπισθέλκουσα (σε αυτήν την περίπτωση είναι οπισθέλκουσα τριβής) στην μετάβαση στρωτής-τυρβώδους. Ενώ η οπισθέλκουσα τριβής για στρωτή ροή είναι ανάλογη του  $U_\infty^{3/2}$  (εξίσωση 1.7), για τυρβώδη ροή είναι  $D\sim(U_\infty/\ln U_\infty)^2$  σύμφωνα με την (1.14).

### **Λεπτό σώμα**

Έχει αποδειχθεί ότι στη ροή στο οριακό στρώμα η κλίση της πίεσης κατά μήκος του τοιχώματος έχει σημαντική επίδραση στη θέση της μεταβατικής περιοχής. Στην περιοχή που μειώνεται η πίεση (επιταχυνόμενη ροή), το οριακό στρώμα γενικά παραμένει στρωτό, ενώ ακόμη και μία μικρή αύξηση στην πίεση γενικά προκαλεί τη μετάβαση. Για λεπτά σώματα (αεροτομές, σώματα γραμμών ροής) η οπισθέλκουσα τριβής μπορεί να μειωθεί πολύ επιλέγοντας κατάλληλα τη μορφή του σώματος και συνεπώς την κατανομή πίεσης έτσι ώστε το σημείο μετάβασης να είναι όσο πιο πίσω γίνεται. Αυτό επιτυγχάνεται μεταφέροντας τη θέση στην οποία η αεροτομή είναι ευρύτερη μακριά προς τα πίσω. Για τέτοιες αεροτομές όπου το οριακό στρώμα παραμένει στρωτό για μεγάλη απόσταση (στρωτές αεροτομές), η οπισθέλκουσα τριβής μπορεί να μειωθεί περίπου στο μισό σε σχέση με τις κανονικές αεροτομές.

Άλλα μέτρα όπως η αναρρόφηση του οριακού στρώματος μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να μεταβληθεί περισσότερο η θέση της μεταβατικής ζώνης και επομένως η οπισθέλκουσα του σώματος.

### **Αμβλέα σώματα**

Ένα εξαιρετικό φαινόμενο το οποίο σχετίζεται με τη μετάβαση στρωτής-τυρβώδους στα οριακά στρώματα εμφανίζεται στα αμβλέα σώματα όπως

οι σφαίρες και οι κυκλικοί κύλινδροι. Σε αριθμούς Reynolds περίπου  $Re=Vd/v=3 \cdot 10^5$  συμβαίνει μία απότομη και μεγάλη μείωση στο συντελεστή οπισθέλκουσας. Αυτή η μεγάλη μείωση στην οπισθέλκουσα ανακαλύφθηκε από τον G. Eiffel (1912) για τη σφαίρα και είναι αποτέλεσμα της μετάβασης στο οριακό στρώμα. Όταν το οριακό στρώμα είναι τυρβώδες, η θέση διαχωρισμού μετατοπίζεται προς τα πίσω και έτσι η περιοχή αφύπνισης γίνεται πολύ πιο στενή. Ο L. Prandtl (1914) έδειξε ότι αυτή η εξήγηση είναι πράγματι σωστή τοποθετώντας ένα λεπτό συρμάτινο βρόχο γύρω από τη σφαίρα ακριβώς μπροστά από τον ισημερινό. Αυτό εξανάγκασε με τεχνητό τρόπο το στρωτό οριακό στρώμα να γίνει τυρβώδες σε μικρότερο αριθμό Reynolds και ομοίως πέτυχε την ίδια χαμηλή οπισθέλκουσα με αυτήν που κανονικά συμβαίνει σε υψηλότερους αριθμούς Reynolds. Στο σχήμα 1.14 φαίνονται εικόνες της ροής γύρω από σφαίρα στην υποκρίσιμη ροή με μεγάλο ίχνος και οπισθέλκουσα, και μία σφαίρα στην υπερκρίσιμη ροή με μικρό ίχνος και χαμηλή οπισθέλκουσα. Η δεύτερη κατάσταση παράγεται με το συρμάτινο βρόχο του Prandtl. Αυτό το πείραμα απέδειξε με πειστικό τρόπο ότι το πέταγμα στην καμπύλη οπισθέλκουσας της σφαίρας μπορεί να κατανοηθεί μόνο ως ένα φαινόμενο οριακού στρώματος το οποίο έχει να κάνει με τη μετάβαση στρωτής-τυρβώδους.



## 5. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ

### 5.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ

Το πείραμα εκτελέστηκε στον πάγκο ροής αέρα. Ο πάγκος ροής αέρα (σχήμα 5.1) αποτελείται ουσιαστικά από έναν ανεμιστήρα, ο οποίος απορροφά αέρα από την ατμόσφαιρα και τον διοχετεύει σε έναν σωλήνα, που με τη σειρά του τον οδηγεί σε ένα δοχείο στο πάνω μέρος της συσκευής.

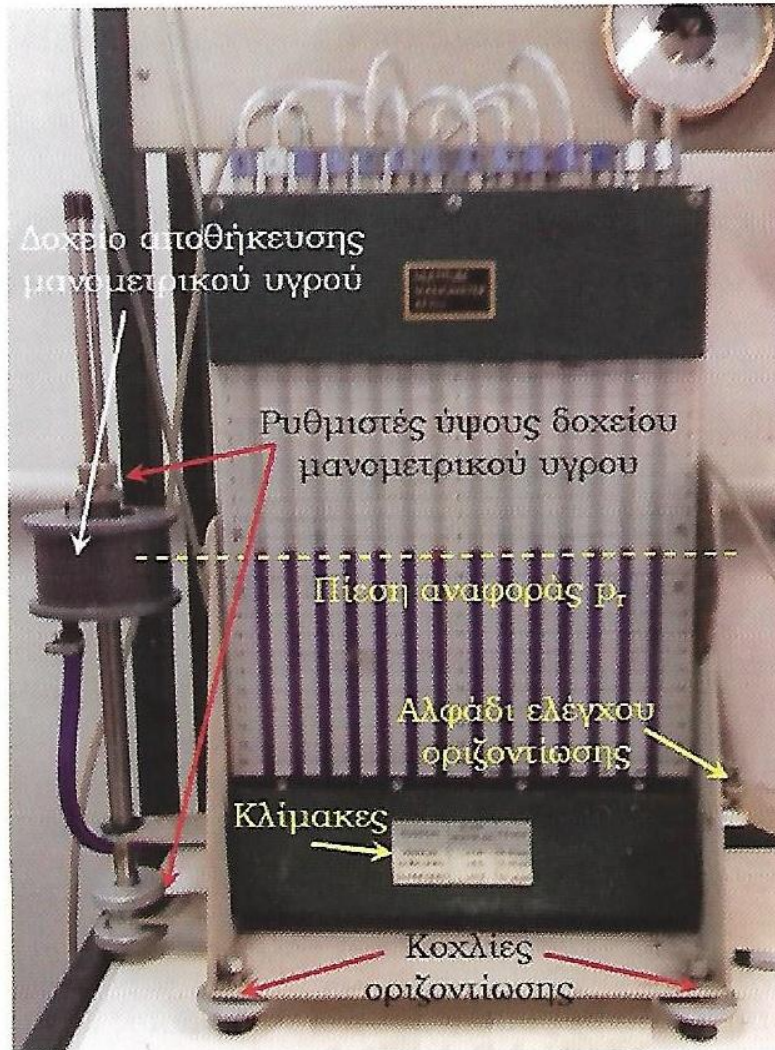


Σχήμα 5.1 Πάγκος ροής αέρα [1].

Στον σωλήνα υπάρχει μία βαλβίδα ελέγχου ροής του αέρα. Ο αέρας εισέρχεται όπως φαίνεται στο σχήμα και καταλήγει σε ένα δοχείο συγκέντρωσης αέρα στην κορυφή της συσκευής. Στην συνέχεια, επιταχύνεται κατερχόμενος στο συγκλίνον τμήμα της συσκευής. Μετά από αυτό εισέρχεται στην περιοχή όπου είναι τοποθετημένη η μικρή συσκευή στην οποία εκτελείται το πείραμα. Η συσκευή αυτή στηρίζεται με τη βοήθεια δύο ειδικών κλιπ σύνδεσης. Τελικά ο εισερχόμενος αέρας απομακρύνεται εάν αυτό χρειάζεται, από μία οπή στη βάση του πάγκου αέρα. Η απομάκρυνση αυτή είναι απαραίτητη στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε στο πείραμα καπνό, ενώ σε άλλες περιπτώσεις η από απομάκρυνσης του αέρα στο περιβάλλον δεν χρησιμοποιείται.

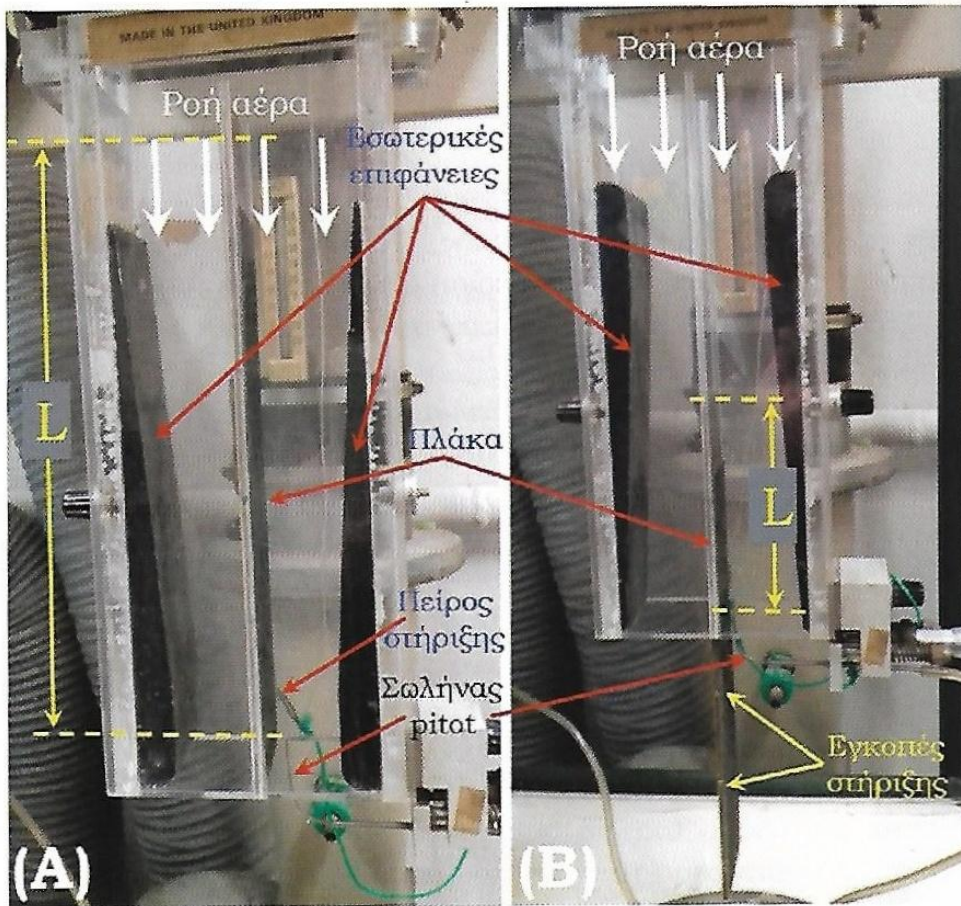
Ο πάγκος ροής αέρα είναι εφοδιασμένος με ένα βαρόμετρο και ένα θερμόμετρο για την καταγραφή της ατμοσφαιρικής πίεσης και της θερμοκρασίας κατά τη διάρκεια των πειραμάτων. Αυτά τα δεδομένα μας βοηθούν ώστε να μπορούμε να υπολογίσουμε διάφορες φυσικές ιδιότητες του αέρα κατά τη διάρκεια των πειραμάτων, όπως η πυκνότητα και το ιξώδες. Μαζί με τον πάγκο αέρα έχουμε επίσης ένα πολυμανόμετρο το οποίο μπορεί να λειτουργεί σε διαφορετικές κλίσεις και ως μανομετρικό υγρό περιέχει αιθυλική αλκοόλη. Στο μανόμετρο αυτό συνδέονται πιεζόμετρα που διαθέτουν οι διάφορες προσαρμοζόμενες συσκευές για τα πειράματα όπως και σωλήνες Pitot ή Prandtl.

Λεπτομέρεια από το πολυμανόμετρο φαίνεται στο σχήμα 5.2. Με το πολυμανόμετρο που χρησιμοποιούμε μετράμε σχετικές πιέσεις. Επίσης πρέπει να αφαιρούμε από κάθε ανάγνωση μέτρησης την πίεση αναφοράς,  $p_r$  του σχήματος 5.2, δηλαδή αυτή που καταγράφουμε στην αρχή των μετρήσεων ανάλογα με το ύψος του δοχείου του μανομετρικού υγρού. Το ύψος του δοχείου ρυθμίζεται με ειδικούς ρυθμιστές και η απαραίτητη οριζοντίωση γίνεται με κοχλίες στη βάση του μανομέτρου. Η οριζοντίωση ελέγχεται με αλφάδι προσαρμοσμένο στη δεξιά πλευρά της συσκευής. Συνήθως, το πρώτο πιεζόμετρο του μανομέτρου το αφήνουμε ανοικτό στην ατμοσφαιρική πίεση. Αν επιθυμούμε να μετρήσουμε και άλλες σχετικές πιέσεις εκτός από την ατμοσφαιρική μπορούμε να μετρήσουμε σε σχέση με το δοχείο συγκέντρωσης αέρα ή με την είσοδο στην εκάστοτε πειραματική συσκευή. Σε αυτά τα σημεία υπάρχουν αναμονές όπου μπορούμε να συνδέσουμε σωληνάκια με τα αντίστοιχα πιεζόμετρα.



Σχήμα 5.2 Πολυμανόμετρο πάγκου ροής αέρα [1].

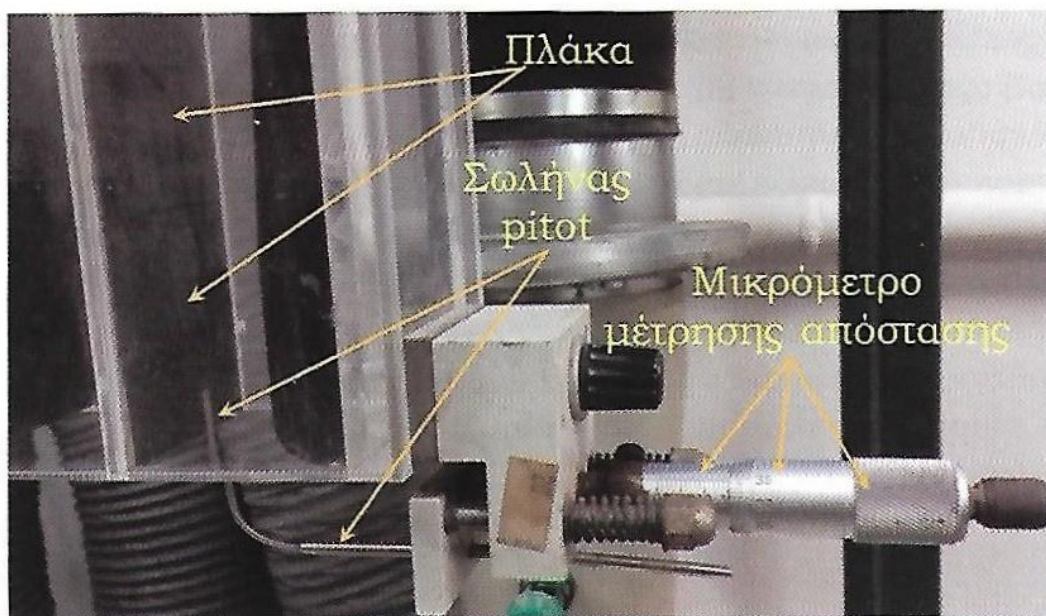
Η πειραματική μας συσκευή για τη μελέτη του οριακού στρώματος που αναπτύσσεται πάνω από πλάκα προσαρμόζεται πάνω στον πάγκο ροής αέρα. Η συσκευή φαίνεται στο σχήμα 5.3. Αποτελείται από ένα διάφανο plexiglass μέσα στο οποίο στηρίζεται η πλάκα που μελετάμε τη ροή με τη βοήθεια ενός πείρου στήριξης. Η ροή του αέρα είναι από πάνω προς τα κάτω και στα πλαϊνά της συσκευής υπάρχουν εσωτερικές επιφάνειες οι οποίες αποσπώνται. Ανάλογα με τη ρύθμιση των επιφανειών δημιουργούμε επιταχυνόμενη ή επιβραδυνόμενη ταχύτητα ελεύθερου ρεύματος. Αν αυτές οι επιφάνειες αφαιρεθούν εντελώς, τότε έχουμε ομοιόμορφη ροή ελεύθερου ρεύματος.



Σχήμα 5.3 Συσκευή μελέτης οριακού στρώματος πάνω από πλάκα. (A) Μελέτη για όλο το μήκος της πλάκας  $L=256\text{mm}$ , (B) Μελέτη για μήκος  $L=156\text{mm}$  [1].

Στο κάτω μέρος της πλάκας είναι προσαρμοσμένος ένας σωλήνας Pitot με τον οποίο κάνουμε τις μετρήσεις. Όπως βλέπουμε, οι μετρήσεις γίνονται δεξιά της πλάκας (επιφάνειας) και ο σωλήνας Pitot κινείται κάθετα προς την επιφάνεια, απομακρυνόμενος από αυτή, με τη βοήθεια μιας περιστρεφόμενης κεφαλής που έχει προσαρμοσμένο ένα μικρόμετρο μέτρησης απόστασης (βερνιέρος). Ο βερνιέρος έχει ακρίβεια μέτρησης  $10^{-5}\text{ m}$ . Περιστρέφοντας την κεφαλή μετακινούμε τον σωλήνα Pitot μέχρι να ακουμπήσει στην πλάκα. Μετά περιστρέφουμε με την αντίθετη φορά και με αυτόν τον τρόπο μετράμε την κάθετη μετατόπιση της κεφαλής του σωλήνα Pitot από την πλάκα. Λεπτομέρειες της διάταξης φαίνονται στο σχήμα 5.4. Είναι σημαντικό να επισημάνουμε ότι όταν ο σωλήνας Pitot ακουμπάει πάνω στην επιφάνεια, το κέντρο του έχει κάποια απόκλιση από την επιφάνεια της πλάκας. Πρακτικά είναι αδύνατο να πάρουμε

μέτρηση ακριβώς πάνω στην επιφάνεια. Το πάχος του σωλήνα Pitot στην οπή είναι συνολικά 0.4mm πράγμα που σημαίνει ότι η πρώτη μέτρηση όταν ο σωλήνας ακουμπάει στην επιφάνεια λαμβάνεται για απόσταση  $y=0.2\text{mm}$  από την πλάκα και όχι για  $y=0.0\text{mm}$ .



Σχήμα 5.4 Λεπτομέρεια του σωλήνα Pitot που είναι προσαρμοσμένος πάνω στο μικρόμετρο μέτρησης απόστασης [1].

Η πλάκα έχει επίσης εγκοπές στήριξης σε διάφορα σημεία κατά μήκος της. Αυτό γίνεται για να μπορούμε να μελετήσουμε το οριακό στρώμα που αναπτύσσεται σε διάφορα μήκη της πλάκας. Επειδή ο σωλήνας Pitot δεν κινείται κατά ύψος, μπορούμε να αλλάξουμε το μήκος της πλάκας που εκτίθεται στο ελεύθερο ρεύμα στηρίζοντάς την με τον πείρο σε διαφορετικά σημεία όπως φαίνεται στο σχήμα 5.3(B). Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να μελετήσουμε τη ροή κατά τα μήκη πλάκας:

$L=106\text{mm}$ ,  $L=156\text{mm}$ ,  $L=206\text{mm}$ ,  $L=256\text{mm}$

Τέλος, η μία πλευρά της πλάκας είναι λεία, ενώ στην άλλη πλευρά της πλάκας έχει προσαρμοστεί ένα χοντρό γυαλόχαρτο. Με αυτόν τον τρόπο περιστρέφοντας την πλάκα μπορούμε να μελετήσουμε τη ροή πάνω σε τραχεία ή λεία επιφάνεια ανάλογα με το ποια επιφάνεια βρίσκεται στην πλευρά που μετράει ο σωλήνας Pitot.

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι αυτή η σχετικά απλή διάταξη μας επιτρέπει να εκτελέσουμε πειράματα για μελέτη ροής πάνω από τραχεία

ή λεία πλάκα, με αντίζωση ή ευνοϊκή βαθμίδα πίεσης ή ομοιόμορφη ροή ελεύθερου ρεύματος και για τέσσερα διαφορετικά μήκη πλάκας.

## 5.2 ΕΚΤΕΛΕΣΗ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ

Για να εκτελέσουμε το πείραμα ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

1. Προσδιορίζουμε τις εσωτερικές επιφάνειες της συσκευής ανάλογα με το αν θέλουμε να δημιουργήσουμε επιβραδυνόμενο ή επιταχυνόμενο ελεύθερο ρεύμα. Αν αφαιρέσουμε εντελώς τις επιφάνειες θα έχουμε ένα ομοιόμορφο σταθερό ελεύθερο ρεύμα.
2. Συνδέουμε τη συσκευή στο πάνω μέρος του πάγκου ροής αέρα. Προσέχουμε όταν έχουμε κλειδώσει τα κλιπ σύνδεσης και ασκούμε ελαφριά δύναμη δεξιά αριστερά στο plexiglass, η συσκευή να μην μπορεί να κουνηθεί από τη θέση της. Υπάρχει μία «πατούρα» πάνω στην οποία κάθεται η συσκευή.
3. Επιλέγουμε ποιο μέρος της πλάκας θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε, δηλαδή το τραχύ ή το λείο και προσθέτουμε την πλάκα συρταρωτά μέσα στην συσκευή από κάτω προς τα πάνω. Προσέχουμε να ασφαλίσουμε την πλάκα με τον πείρο στήριξης, χρησιμοποιώντας τις εγκοπές στήριξης όπως φαίνεται στο σχήμα 5.3. Προσέχουμε επίσης ο σωλήνας Pitot να είναι αρκετά απομακρυσμένος από την πλάκα για να μην του προξενήσουμε ζημιά.
4. Σημειώνουμε την πίεση αναφοράς  $p_r$  που δείχνει το πολυμανόμετρο το οποίο ελέγχουμε ξανά ότι είναι σωστά οριζοντιωμένο. Επίσης σημειώνουμε την ένδειξη του βαρομέτρου για την ατμοσφαιρική πίεση και τη θερμοκρασία σε  $^{\circ}\text{C}$  από το θερμόμετρο του πάγκου ροής αέρα.
5. Ελέγχουμε τη σύνδεση του σωλήνα Pitot με το πολυμανόμετρο.
6. Εκκινούμε τον πάγκο ροής αέρα από το διακόπτη εκκίνησης on-off κάτω δεξιά.
7. Ένας αποτελεσματικός τρόπος να πάρουμε τις μετρήσεις με τον σωλήνα Pitot είναι ο εξής: Περιστρέφουμε τον βερνιέρο του μικρομέτρου ώστε ο σωλήνας Pitot να ακουμπήσει στην πλάκα. Χρειάζεται προσοχή όταν ο σωλήνας ακουμπήσει και αρχίσει να

λυγίζει συμπιεζόμενος πάνω στην πλάκα γιατί υπάρχει κίνδυνος να σπάσει. Παρατηρούμε την ένδειξη της ολικής πίεσης στο πολυμανόμετρο και κινούμε ελαφρά το μικρόμετρο προς ή απομακρυνόμενοι από την πλάκα όσο ακουμπάει ο σωλήνας Pitot πάνω στην πλάκα. Η κίνησή μας στην προσαρμογή αυτή δεν πρέπει να ξεπερνάει την μισή περιστροφή (0.5mm). Κοιτώντας μόνο την ένδειξη του μανομέτρου και περιστρέφοντας δεξιά αριστερά το μικρόμετρο, εντοπίζουμε σε ποιο σημείο έχουμε τη μικρότερη διαφορά ολικής πίεσης από την  $p_r$ , δηλαδή για το δικό μας μανόμετρο, εντοπίζουμε που ακριβώς η ένδειξή του κινείται σε υψηλότερη στάθμη.

8. Στο σημείο που εντοπίζουμε τη χαμηλότερη ολική πίεση κοιτάμε την ένδειξη του μικρομέτρου και σημειώνουμε απόσταση  $y=0.2\text{mm}$ , γιατί όπως είπαμε ο ίδιος ο σωλήνας Pitot έχει ένα πάχος. Αυτό είναι το κοντινότερο σημείο στην πλάκα με τη μικρότερη ταχύτητα αέρα και γι' αυτό η πίεση εκεί είναι η μικρότερη.
9. Στη συνέχεια παίρνουμε διαδοχικές μετρήσεις (αναγνώσεις) ολικής πίεσης από το μανόμετρο για τον σωλήνα Pitot αφού περιστρέψουμε (απομακρυνόμενοι από την πλάκα), μισή περιστροφή (0.5mm). όσο είμαστε κοντά στην πλάκα, μετράμε ανά μισή περιστροφή και απομακρυνόμενοι μπορούμε να μετρήσουμε και ανά ολόκληρη περιστροφή. Με αυτόν τον τρόπο, δεν σημειώνουμε αναγνώσεις μικρομέτρου σε διάφορα τυχαία σημεία που αυξάνει την πιθανότητα λάθους, αλλά παρατηρούμε μόνο την πρώτη ένδειξη όταν είμαστε πάνω στην πλάκα. Έτσι, αν η υποδιαίρεσή μας στο όργανο έχει ένδειξη 20 (δηλαδή τα τρέχοντα χιλιοστά και 20/100 του χιλιοστού) παίρνουμε τις ενδείξεις πίεσης περιστρέφοντας μισή περιστροφή, δηλαδή στις αναγνώσεις 20-70-20 κ.ο.κ. Σημειώνουμε τα αντίστοιχα  $y$  έχοντας υπόψη την αρχική μετατόπιση 0.2mm.
10. Οι μετρήσεις μας σταματάνε όταν για δύο διαδοχικές μετρήσεις δεν βλέπουμε πλέον μεταβολή στην πίεση. Αυτό σημαίνει ότι έχουμε φτάσει στο πάχος του οριακού στρώματος. Σε εκείνο το σημείο, μπορούμε να περιστρέψουμε το μικρόμετρο πλησιάζοντας μισή περιστροφή, προκειμένου να πάρουμε μερικές μετρήσεις κοντά στην ακμή του οριακού στρώματος.

11. Όταν τελειώσουμε, απασφαλίζουμε τον πείρο και αλλάζουμε πλευρά στην πλάκα ώστε να πάρουμε μετρήσεις και από τη λεία και από την τραχεία επιφάνεια.
12. Αν επιθυμούμε, μετράμε με διαφορετικά ρυθμισμένες επιφάνειες για τη διαμόρφωση του ελεύθερου ρεύματος και σε διαφορετικά μήκη πλάκας στηρίζοντας ανάλογα με τη βοήθεια του πείρου στήριξης (σχήμα 5.3(B)).

Εκτελώντας τα παραπάνω βήματα καταγράφουμε τα δεδομένα του πειράματος. Είναι εμφανές ότι μπορούμε να εκτελέσουμε πάρα πολλά πειράματα με την ανωτέρω διαδικασία.



## 6. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

### 6.1 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΑΕΡΑ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ

Μετρήθηκε η πίεση σε διάφορες αποστάσεις από την πλάκα και κάτω από διαφορετικές συνθήκες σύμφωνα με την περιγραφή που δόθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Η ταχύτητα υπολογίστηκε από την διαφορά πίεσης μέσω της εξίσωσης Bernoulli:

$$\Delta P = \frac{1}{2} \rho u^2 \Rightarrow u = \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}} \quad (6.1)$$

Η θερμοκρασία του πειράματος ήταν  $\theta=20 \text{ }^\circ\text{C}=293 \text{ K}$  και η σταθερά για τον αέρα είναι  $R_a = 287.2 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$ . Η πυκνότητα του αέρα υπολογίστηκε από την καταστατική εξίσωση:

$$\rho = \frac{P}{R_a T} = \frac{101500}{287.2 \cdot 293} = 1.206 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (6.2)$$

Το δυναμικό ιξώδες του αέρα υπολογίστηκε από την σχέση του Sutherland [4]:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{T_0 + C}{T + C} \left( \frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \quad (6.3)$$

Για τον αέρα:  $C=120\text{K}$  και  $T_0=291.15$  και  $\mu_0=18.2\cdot 10^{-6} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ .

Ο παραπάνω τύπος δίνει:  $\mu=18.291\cdot 10^{-6} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ .

Ο αδιάστατος τοπικός αριθμός Reynolds,  $Re_x$ , υπολογίζεται από την σχέση:

$$\text{Re}_x = \frac{\rho V x}{\mu} \quad (6.4)$$

όπου  $x$  είναι η απόσταση από το σημείο προσβολής της πλάκας από το ρεύμα αέρα και  $V$  είναι η ταχύτητα της αδιατάρακτης ροής. Στην περίπτωση τυρβώδους ροής, το πάχος του οριακού στρώματος δίνεται από την σχέση:

$$\delta = 0.37 \frac{x}{\text{Re}_x^{0.2}} \quad (6.5)$$

## 6.2 ΠΙΝΑΚΕΣ

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα πειραματικά αποτελέσματα για λεία επιφάνεια και για διάφορες περιπτώσεις (συγκλίνον, αποκλίνον, χωρίς εμπόδια, μικρή και μεσαία παροχή) και σε διάφορες αποστάσεις από το σημείο προσβολής της πλάκας. Οι μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν με τη διαδικασία που περιγράφηκε αναλυτικά στο προηγούμενο κεφάλαιο.

1) Λεία επιφάνεια, αποκλίνον ακροφύσιο, μικρή παροχή

L=25,5 cm			
y(mm)	F(mb)	κλίμακα βερνύλου	v (m/s)
0,2	2,2	9,85	4,097018
0,3	2,2	9,95	4,097018
0,4	2,2	10,05	4,097018
0,5	2,2	10,15	4,097018
0,6	2,2	10,25	4,097018
0,7	2,2	10,35	4,097018
0,8	2,3	10,45	5,794059
0,9	2,3	10,55	5,794059
1	2,3	10,65	5,794059
1,1	2,4	10,75	7,096244
1,2	2,4	10,85	7,096244
1,3	2,4	10,95	7,096244
1,4	2,4	11,05	7,096244
1,5	2,4	11,15	7,096244
1,6	2,4	11,25	7,096244
1,7	2,5	11,35	8,194057
1,8	2,5	11,45	8,194057
1,9	2,5	11,55	8,194057
2	2,5	11,65	8,194057
2,1	2,5	11,75	8,194057
2,2	2,5	11,85	8,194057
2,3	2,5	11,95	8,194057
2,4	2,6	12,05	9,161212
2,5	2,6	12,15	9,161212
2,6	2,6	12,25	9,161212
2,7	2,6	12,35	9,161212
2,8	2,7	12,45	10,0356
2,9	2,7	12,55	10,0356
3	2,7	12,65	10,0356
3,1	2,8	12,75	10,83969
3,2	2,8	12,85	10,83969
3,3	2,8	12,95	10,83969
3,4	2,8	13,05	10,83969
3,5	2,8	13,15	10,83969
3,6	2,8	13,25	10,83969
3,7	2,9	13,35	11,58812
3,8	2,9	13,45	11,58812
3,9	2,9	13,55	11,58812
4	2,9	13,65	11,58812
4,1	2,9	13,75	11,58812
4,2	3	13,85	12,29106
4,3	3	13,95	12,29106
4,4	3	14,05	12,29106
4,5	3	14,15	12,29106
4,6	3	14,25	12,29106
4,7	3	14,35	12,29106
4,8	3	14,45	12,29106
4,9	3	14,55	12,29106
5	3	14,65	12,29106
5,1	3	14,75	12,29106
5,2	3,1	14,85	12,95591
5,3	3,1	14,95	12,95591
5,4	3,1	15,05	12,95591
5,5	3,1	15,15	12,95591
5,6	3,1	15,25	12,95591
5,7	3,1	15,35	12,95591
5,8	3,1	15,45	12,95591
5,9	3,1	15,55	12,95591
6	3,1	15,65	12,95591
6,1	3,1	15,75	12,95591
6,2	3,2	15,85	15,58827
6,3	3,2	15,95	15,58827
6,4	3,2	16,05	15,58827
6,5	3,2	16,15	15,58827

L=23cm			
$\gamma$ (mm)	P(mb)	κλίμακα βερνιέρου	v (m/s)
0,2	2,2	9,95	4,097018
0,3	2,2	10,05	4,097018
0,4	2,2	10,15	4,097018
0,5	2,2	10,25	4,097018
0,6	2,2	10,35	4,097018
0,7	2,2	10,45	4,097018
0,8	2,3	10,55	5,794059
0,9	2,3	10,65	5,794059
1	2,3	10,75	5,794059
1,1	2,4	10,85	7,096244
1,2	2,4	10,95	7,096244
1,3	2,4	11,05	7,096244
1,4	2,5	11,15	8,194037
1,5	2,5	11,25	8,194037
1,6	2,6	11,35	9,161212
1,7	2,6	11,45	9,161212
1,8	2,6	11,55	9,161212
1,9	2,6	11,65	9,161212
2	2,7	11,75	10,0356
2,1	2,7	11,85	10,0356
2,2	2,7	11,95	10,0356
2,3	2,8	12,05	10,83969
2,4	2,8	12,15	10,83969
2,5	2,8	12,25	10,83969
2,6	2,9	12,35	11,58812
2,7	2,9	12,45	11,58812
2,8	2,9	12,55	11,58812
2,9	3	12,65	12,29106
3	3	12,75	12,29106
3,1	3	12,85	12,29106
3,2	3	12,95	12,29106
3,3	3	13,05	12,29106
3,4	3,1	13,15	12,95591
3,5	3,1	13,25	12,95591
3,6	3,1	13,35	12,95591
3,7	3,1	13,45	12,95591
3,8	3,2	13,55	13,58827
3,9	3,2	13,65	13,58827
4	3,2	13,75	13,58827

L=20,5			
γ(mm)	P(mb)	κλίμακα βερνιέρου	v (m/s)
0,2	2,2	9,85	4,097018
0,3	2,2	9,95	4,097018
0,4	2,2	10,05	4,097018
0,5	2,3	10,15	5,794059
0,6	2,3	10,25	5,794059
0,7	2,3	10,35	5,794059
0,8	2,3	10,45	5,794059
0,9	2,3	10,55	5,794059
1	2,4	10,65	7,096244
1,1	2,4	10,75	7,096244
1,2	2,4	10,85	7,096244
1,3	2,4	10,95	7,096244
1,4	2,4	11,05	7,096244
1,5	2,4	11,15	7,096244
1,6	2,5	11,25	8,194037
1,7	2,5	11,35	8,194037
1,8	2,6	11,45	9,161212
1,9	2,6	11,55	9,161212
2	2,6	11,65	9,161212
2,1	2,6	11,75	9,161212
2,2	2,7	11,85	10,0356
2,3	2,7	11,95	10,0356
2,4	2,7	12,05	10,0356
2,5	2,8	12,15	10,83969
2,6	2,8	12,25	10,83969
2,7	2,8	12,35	10,83969
2,8	2,9	12,45	11,58812
2,9	2,9	12,55	11,58812
3	2,9	12,65	11,58812
3,1	2,9	12,75	11,58812
3,2	3	12,85	12,29106
3,3	3	12,95	12,29106
3,4	3	13,05	12,29106
3,5	3	13,15	12,29106
3,6	3	13,25	12,29106
3,7	3	13,35	12,29106
3,8	3,1	13,45	12,95591
3,9	3,1	13,55	12,95591
4	3,1	13,65	12,95591
4,1	3,1	13,75	12,95591
4,2	3,2	13,85	13,58827
4,3	3,2	13,95	13,58827
4,4	3,2	14,05	13,58827
4,5	3,2	14,15	13,58827
4,6	3,2	14,25	13,58827

L=18			
γ(mm)	P(mb)	κλίμακα βερνιέρου	v (m/s)
0,2	2,2	9,9	4,097018
0,3	2,2	10	4,097018
0,4	2,2	10,1	4,097018
0,5	2,2	10,2	4,097018
0,6	2,3	10,3	5,794059
0,7	2,3	10,4	5,794059
0,8	2,3	10,5	5,794059
0,9	2,4	10,6	7,096244
1	2,4	10,7	7,096244
1,1	2,4	10,8	7,096244
1,2	2,4	10,9	7,096244
1,3	2,4	11	7,096244
1,4	2,5	11,1	8,194037
1,5	2,5	11,2	8,194037
1,6	2,6	11,3	9,161212
1,7	2,6	11,4	9,161212
1,8	2,6	11,5	9,161212
1,9	2,7	11,6	10,0356
2	2,7	11,7	10,0356
2,1	2,7	11,8	10,0356
2,2	2,8	11,9	10,83969
2,3	2,9	12	11,58812
2,4	2,9	12,1	11,58812
2,5	2,9	12,2	11,58812
2,6	2,9	12,3	11,58812
2,7	3	12,4	12,29106
2,8	3	12,5	12,29106
2,9	3	12,6	12,29106
3	3	12,7	12,29106
3,1	3,1	12,8	12,95591
3,2	3,1	12,9	12,95591
3,3	3,1	13	12,95591
3,4	3,1	13,1	12,95591

L=16,2			
γ(mm)	P(mb)	κλίμακα βερνιέρου	v (m/s)
0,2	2,2	9,9	4,097018
0,3	2,2	10	4,097018
0,4	2,2	10,1	4,097018
0,5	2,2	10,2	4,097018
0,6	2,2	10,3	4,097018
0,7	2,2	10,4	4,097018
0,8	2,2	10,5	4,097018
0,9	2,3	10,6	5,794059
1	2,3	10,7	5,794059
1,1	2,3	10,8	5,794059
1,2	2,3	10,9	5,794059
1,3	2,4	11	7,096244
1,4	2,4	11,1	7,096244
1,5	2,4	11,2	7,096244
1,6	2,4	11,3	7,096244
1,7	2,5	11,4	8,194037
1,8	2,5	11,5	8,194037
1,9	2,6	11,6	9,161212
2	2,6	11,7	9,161212
2,1	2,6	11,8	9,161212
2,2	2,6	11,9	9,161212
2,3	2,7	12	10,0356
2,4	2,7	12,1	10,0356
2,5	2,7	12,2	10,0356
2,6	2,7	12,3	10,0356
2,7	2,8	12,4	10,83969
2,8	2,8	12,5	10,83969
2,9	2,9	12,6	11,58812
3	2,9	12,7	11,58812
3,1	3	12,8	12,29106
3,2	3	12,9	12,29106
3,3	3	13	12,29106
3,4	3	13,1	12,29106
3,5	3,1	13,2	12,95591
3,6	3,1	13,3	12,95591
3,7	3,1	13,4	12,95591
3,8	3,1	13,5	12,95591

L=13,7			
γ(mm)	P(mb)	κλίμακα βερνιέρου	v (m/s)
0,2	2,2	9,95	4,097018
0,3	2,2	10,05	4,097018
0,4	2,3	10,15	5,794059
0,5	2,3	10,25	5,794059
0,6	2,3	10,35	5,794059
0,7	2,4	10,45	7,096244
0,8	2,4	10,55	7,096244
0,9	2,5	10,65	8,194037
1	2,6	10,75	9,161212
1,1	2,6	10,85	9,161212
1,2	2,6	10,95	9,161212
1,3	2,6	11,05	9,161212
1,4	2,6	11,15	9,161212
1,5	2,6	11,25	9,161212
1,6	2,7	11,35	10,0356
1,7	2,7	11,45	10,0356
1,8	2,7	11,55	10,0356
1,9	2,8	11,65	10,83969
2	2,8	11,75	10,83969
2,1	2,8	11,85	10,83969
2,2	2,9	11,95	11,58812
2,3	2,9	12,05	11,58812
2,4	3	12,15	12,29106
2,5	3	12,25	12,29106
2,6	3	12,35	12,29106
2,7	3	12,45	12,29106



L=11,3			
$\gamma(\text{mm})$	P(mb)	κλίμακα βερνιέρου	v (m/s)
0,2	2,2	9,9	4,097018
0,3	2,2	10	4,097018
0,4	2,2	10,1	4,097018
0,5	2,3	10,2	5,794059
0,6	2,3	10,3	5,794059
0,7	2,3	10,4	5,794059
0,8	2,4	10,5	7,096244
0,9	2,4	10,6	7,096244
1	2,5	10,7	8,194037
1,1	2,5	10,8	8,194037
1,2	2,5	10,9	8,194037
1,3	2,6	11	9,161212
1,4	2,6	11,1	9,161212
1,5	2,6	11,2	9,161212
1,6	2,7	11,3	10,0356
1,7	2,7	11,4	10,0356
1,8	2,7	11,5	10,0356
1,9	2,8	11,6	10,83969
2	2,8	11,7	10,83969
2,1	2,8	11,8	10,83969
2,2	2,8	11,9	10,83969
2,3	2,9	12	11,58812
2,4	2,9	12,1	11,58812
2,5	2,9	12,2	11,58812
2,6	2,9	12,3	11,58812
2,7	3	12,4	12,29106
2,8	3	12,5	12,29106
2,9	3	12,6	12,29106
3	3	12,7	12,29106
3,1	3	12,8	12,29106

2) Λεία επιφάνεια, αποκλίνον ακροφύσιο, μεσαία παροχή

L=25,5 cm			
γ(mm)	P(mb)	κλίμακα βερνιέρου	v (m/s)
0,2	4	9,85	8,118253
0,3	4,1	9,95	9,076483
0,4	4,2	10,05	9,942789
0,5	4,3	10,15	10,73944
0,6	4,4	10,25	11,48094
0,7	4,4	10,35	11,48094
0,8	4,5	10,45	12,17738
0,9	4,6	10,55	12,83609
1	4,6	10,65	12,83609
1,1	4,7	10,75	13,4626
1,2	4,7	10,85	13,4626
1,3	4,8	10,95	14,06123
1,4	4,9	11,05	14,63539
1,5	4,9	11,15	14,63539
1,6	5	11,25	15,18786
1,8	5,1	11,45	15,72093
2	5,2	11,65	16,23651
2,2	5,4	11,85	17,22142
2,4	5,5	12,05	17,69332
2,6	5,6	12,25	18,15297
2,8	5,7	12,45	18,60125
3	5,8	12,65	19,03899
3,1	6	12,75	19,88558
3,2	6	12,85	19,88558
3,3	6	12,95	19,88558
3,4	6,1	13,05	20,29563
3,5	6,2	13,15	20,69757
3,6	6,2	13,25	20,69757
3,7	6,3	13,35	21,09184
3,8	6,4	13,45	21,47888
3,9	6,4	13,55	21,47888
4	6,4	13,65	21,47888
4,2	6,5	13,85	21,85907
4,4	6,6	14,05	22,23275
4,6	6,6	14,25	22,23275
4,8	6,7	14,45	22,60026
5	6,8	14,65	22,96189
5,2	6,8	14,85	22,96189
5,4	6,9	15,05	23,31791
5,6	6,9	15,25	23,31791
5,8	6,9	15,45	23,31791
6	6,9	15,65	23,31791
6,2	7	15,85	23,66857
6,4	7	16,05	23,66857
6,6	7	16,25	23,66857
6,8	7	16,45	23,66857

L=23cm			
$\gamma$ (mm)	P(mb)	κλίμακα βερνιέρου	v (m/s)
0,2	3,8	9,95	5,740472
0,3	3,9	10,05	7,030613
0,4	4,1	10,15	9,076483
0,5	4,2	10,25	9,942789
0,6	4,3	10,35	10,73944
0,7	4,4	10,45	11,48094
0,8	4,6	10,55	12,83609
0,9	4,6	10,65	12,83609
1	4,7	10,75	13,4626
1,1	4,8	10,85	14,06123
1,2	4,9	10,95	14,63539
1,3	5	11,05	15,18786
1,4	5	11,15	15,18786
1,5	5	11,25	15,18786
1,6	5,1	11,35	15,72093
1,7	5,2	11,45	16,23651
1,8	5,3	11,55	16,73621
1,9	5,3	11,65	16,73621
2,1	5,4	11,85	17,22142
2,3	5,6	12,05	18,15297
2,5	5,7	12,25	18,60125
2,7	5,8	12,45	19,03899
2,9	5,9	12,65	19,46689
3,1	6,1	12,85	20,29563
3,3	6,2	13,05	20,69757
3,5	6,2	13,25	20,69757
3,7	6,3	13,45	21,09184
3,9	6,5	13,65	21,85907
4,1	6,5	13,85	21,85907
4,3	6,6	14,05	22,23275
4,4	6,6	14,15	22,23275
4,5	6,7	14,25	22,60026
4,6	6,7	14,35	22,60026
4,7	6,7	14,45	22,60026
4,8	6,8	14,55	22,96189
5	6,8	14,75	22,96189
5,2	6,8	14,95	22,96189
5,4	6,8	15,15	22,96189

L=20,5			
γ(mm)	P(mb)	κλίμακα βερνιέρου	v (m/s)
0,2	3,9	9,85	7,030613
0,3	4,1	9,95	9,076483
0,4	4,2	10,05	9,942789
0,5	4,3	10,15	10,73944
0,6	4,4	10,25	11,48094
0,7	4,4	10,35	11,48094
0,8	4,5	10,45	12,17738
0,9	4,5	10,55	12,17738
1	4,6	10,65	12,83609
1,1	4,7	10,75	13,4626
1,3	4,8	10,95	14,06123
1,5	5	11,15	15,18786
1,7	5,1	11,35	15,72093
1,9	5,2	11,55	16,23651
2,1	5,4	11,75	17,22142
2,3	5,5	11,95	17,69332
2,5	5,6	12,15	18,15297
2,7	5,7	12,35	18,60125
2,9	5,8	12,55	19,03899
3,1	5,9	12,75	19,46689
3,3	6	12,95	19,88558
3,5	6,2	13,15	20,69757
3,7	6,3	13,35	21,09184
3,9	6,3	13,55	21,09184
4,1	6,4	13,75	21,47888
4,3	6,5	13,95	21,85907
4,5	6,6	14,15	22,23275
4,7	6,6	14,35	22,23275
4,9	6,7	14,55	22,60026
5,1	6,7	14,75	22,60026
5,3	6,8	14,95	22,96189
5,5	6,8	15,15	22,96189
5,7	6,8	15,35	22,96189

L=18			
$\gamma$ (mm)	P(mb)	κλίμακα βερνιέρου	v (m/s)
0,2	4	9,9	8,118253
0,3	4,1	10	9,076483
0,4	4,2	10,1	9,942789
0,5	4,4	10,2	11,48094
0,6	4,5	10,3	12,17738
0,7	4,5	10,4	12,17738
0,8	4,6	10,5	12,83609
0,9	4,7	10,6	13,4626
1	4,8	10,7	14,06123
1,1	4,9	10,8	14,63539
1,2	4,9	10,9	14,63539
1,3	5	11	15,18786
1,5	5,2	11,2	16,23651
1,7	5,4	11,4	17,22142
1,9	5,4	11,6	17,22142
2,1	5,5	11,8	17,69332
2,3	5,7	12	18,60125
2,5	5,8	12,2	19,03899
2,7	6	12,4	19,88558
2,9	6	12,6	19,88558
3,1	6,1	12,8	20,29563
3,3	6,2	13	20,69757
3,5	6,3	13,2	21,09184
3,7	6,4	13,4	21,47888
3,9	6,4	13,6	21,47888
4,1	6,5	13,8	21,85907
4,3	6,6	14	22,23275
4,5	6,6	14,2	22,23275
4,7	6,6	14,4	22,23275
4,9	6,7	14,6	22,60026
5,1	6,7	14,8	22,60026

L=16,2			
γ(mm)	P(mb)	κλίμακα βερνιέρου	v (m/s)
0,2	4	9,8	8,118253
0,3	4,1	9,9	9,076483
0,4	4,2	10	9,942789
0,5	4,4	10,1	11,48094
0,6	4,6	10,2	12,83609
0,7	4,6	10,3	12,83609
0,8	4,8	10,4	14,06123
0,9	4,9	10,5	14,63539
1	5	10,6	15,18786
1,1	5,1	10,7	15,72093
1,2	5,2	10,8	16,23651
1,3	5,2	10,9	16,23651
1,4	5,3	11	16,73621
1,6	5,4	11,2	17,22142
1,8	5,5	11,4	17,69332
2	5,6	11,6	18,15297
2,2	5,8	11,8	19,03899
2,4	5,9	12	19,46689
2,6	6	12,2	19,88558
2,8	6,1	12,4	20,29563
3	6,2	12,6	20,69757
3,2	6,3	12,8	21,09184
3,4	6,4	13	21,47888
3,6	6,4	13,2	21,47888
3,8	6,5	13,4	21,85907
4	6,5	13,6	21,85907
4,2	6,6	13,8	22,23275
4,3	6,6	13,9	22,23275
4,4	6,7	14	22,60026
4,5	6,7	14,1	22,60026
4,6	6,8	14,2	22,96189
4,7	6,8	14,3	22,96189
4,8	6,8	14,4	22,96189

L=13,7			
γ(mm)	P(mb)	κλίμακα βερνιέρου	v (m/s)
0,2	4,7	9,95	13,4626
0,3	4,9	10,05	14,63539
0,4	5	10,15	15,18786
0,5	5	10,25	15,18786
0,6	5,1	10,35	15,72093
0,7	5,2	10,45	16,23651
0,8	5,2	10,55	16,23651
0,9	5,3	10,65	16,73621
1	5,4	10,75	17,22142
1,1	5,4	10,85	17,22142
1,2	5,5	10,95	17,69332
1,3	5,6	11,05	18,15297
1,5	5,6	11,25	18,15297
1,7	5,7	11,45	18,60125
1,9	5,9	11,65	19,46689
2,1	6	11,85	19,88558
2,3	6,1	12,05	20,29563
2,5	6,2	12,25	20,69757
2,7	6,3	12,45	21,09184
2,9	6,4	12,65	21,47888
3,1	6,4	12,85	21,47888
3,3	6,5	13,05	21,85907
3,5	6,6	13,25	22,23275
3,7	6,6	13,45	22,23275
3,8	6,7	13,55	22,60026
3,9	6,7	13,65	22,60026
4	6,8	13,75	22,96189
4,1	6,8	13,85	22,96189
4,2	6,8	13,95	22,96189

L=11,3			
γ(mm)	P(mb)	κλίμακα βερνιέρου	v (m/s)
0,2	4,6	9,9	12,83609
0,3	4,6	10	12,83609
0,4	4,7	10,1	13,4626
0,5	4,9	10,2	14,63539
0,6	5	10,3	15,18786
0,7	5,1	10,4	15,72093
0,8	5,2	10,5	16,23651
0,9	5,2	10,6	16,23651
1	5,3	10,7	16,73621
1,1	5,4	10,8	17,22142
1,2	5,5	10,9	17,69332
1,3	5,6	11	18,15297
1,5	5,7	11,2	18,60125
1,7	5,8	11,4	19,03899
1,9	6	11,6	19,88558
2,1	6,1	11,8	20,29563
2,3	6,2	12	20,69757
2,5	6,4	12,2	21,47888
2,7	6,5	12,4	21,85907
2,9	6,5	12,6	21,85907
3,1	6,6	12,8	22,23275
3,3	6,6	13	22,23275
3,5	6,6	13,2	22,23275
3,7	6,6	13,4	22,23275
3,9	6,7	13,6	22,60026
4,1	6,7	13,8	22,60026

3) Λεία επιφάνεια, συγκλίνον ακροφύσιο, μικρή παροχή

L=25,5 cm			
$\gamma$ (mm)	P(mb)	κλίμακα βερνιέρου	v (m/s)
0,2	4,8	9,85	11,54879
0,3	4,9	9,95	12,24934
0,4	5	10,05	12,91194
0,5	5	10,15	12,91194
0,6	5	10,25	12,91194
0,7	5,1	10,35	13,54216
0,8	5,1	10,45	13,54216
0,9	5,2	10,55	14,14432
1	5,2	10,65	14,14432
1,1	5,2	10,75	14,14432
1,2	5,3	10,85	14,72188
1,3	5,3	10,95	14,72188
1,4	5,3	11,05	14,72188
1,5	5,4	11,15	15,27761
1,6	5,4	11,25	15,27761
1,7	5,4	11,35	15,27761
1,8	5,4	11,45	15,27761
1,9	5,4	11,55	15,27761

L=23cm			
$\gamma$ (mm)	P(mb)	κλίμακα βερνιέρου	v (m/s)
0,2	4,7	9,95	10,8029
0,3	4,8	10,05	11,54879
0,4	4,9	10,15	12,24934
0,5	5	10,25	12,91194
0,6	5	10,35	12,91194
0,7	5,1	10,45	13,54216
0,8	5,1	10,55	13,54216
0,9	5,2	10,65	14,14432
1	5,2	10,75	14,14432
1,1	5,2	10,85	14,14432
1,2	5,3	10,95	14,72188
1,3	5,3	11,05	14,72188
1,4	5,3	11,15	14,72188
1,5	5,3	11,25	14,72188
1,6	5,4	11,35	15,27761
1,7	5,4	11,45	15,27761
1,8	5,4	11,55	15,27761
1,9	5,4	11,65	15,27761
2	5,4	11,75	15,27761



L=20,5			
$\gamma$ (mm)	P(mb)	κλίμακα βερνιέρου	v (m/s)
0,2	4,6	9,85	10,00155
0,3	4,7	9,95	10,8029
0,4	4,8	10,05	11,54879
0,5	4,9	10,15	12,24934
0,6	5	10,25	12,91194
0,7	5	10,35	12,91194
0,8	5,1	10,45	13,54216
0,9	5,1	10,55	13,54216
1	5,2	10,65	14,14432
1,1	5,2	10,75	14,14432
1,2	5,3	10,85	14,72188
1,3	5,3	10,95	14,72188
1,4	5,3	11,05	14,72188
1,5	5,4	11,15	15,27761
1,6	5,4	11,25	15,27761
1,7	5,4	11,35	15,27761
1,8	5,4	11,45	15,27761

L=18			
$\gamma$ (mm)	P(mb)	κλίμακα βερνιέρου	v (m/s)
0,2	4,9	9,9	12,24934
0,3	4,9	10	12,24934
0,4	5	10,1	12,91194
0,5	5	10,2	12,91194
0,6	5,1	10,3	13,54216
0,7	5,1	10,4	13,54216
0,8	5,2	10,5	14,14432
0,9	5,2	10,6	14,14432
1	5,3	10,7	14,72188
1,1	5,3	10,8	14,72188
1,2	5,3	10,9	14,72188
1,3	5,3	11	14,72188
1,4	5,4	11,1	15,27761
1,5	5,4	11,2	15,27761
1,6	5,4	11,3	15,27761
1,7	5,4	11,4	15,27761

L=16,2			
$\gamma$ (mm)	P(mb)	κλίμακα βερνιέρου	v (m/s)
0,2	4,5	9,9	9,13012
0,3	4,8	10	11,54879
0,4	5	10,1	12,91194
0,5	5,1	10,2	13,54216
0,6	5,1	10,3	13,54216
0,7	5,2	10,4	14,14432
0,8	5,2	10,5	14,14432
0,9	5,3	10,6	14,72188
1	5,3	10,7	14,72188
1,1	5,3	10,8	14,72188
1,2	5,4	10,9	15,27761
1,3	5,4	11	15,27761
1,4	5,4	11,1	15,27761
1,5	5,4	11,2	15,27761
1,6	5,4	11,3	15,27761
1,7	5,4	11,4	15,27761

L=13,7			
$\gamma$ (mm)	P(mb)	κλίμακα βερνιέρου	v (m/s)
0,2	4,9	9,95	12,24934
0,3	5,1	10,05	13,54216
0,4	5,2	10,15	14,14432
0,5	5,3	10,25	14,72188
0,6	5,3	10,35	14,72188
0,7	5,3	10,45	14,72188
0,8	5,3	10,55	14,72188
0,9	5,4	10,65	15,27761
1	5,4	10,75	15,27761
1,1	5,4	10,85	15,27761
1,2	5,4	10,95	15,27761
1,3	5,4	11,05	15,27761
1,4	5,4	11,15	15,27761

L=11,3			
$\gamma$ (mm)	P(mb)	κλίμακα βερνιέρου	v (m/s)
0,2	4,7	9,9	10,8029
0,3	4,7	10	10,8029
0,4	4,8	10,1	11,54879
0,5	4,9	10,2	12,24934
0,6	5	10,3	12,91194
0,7	5,1	10,4	13,54216
0,8	5,2	10,5	14,14432
0,9	5,2	10,6	14,14432
1	5,3	10,7	14,72188
1,1	5,3	10,8	14,72188
1,2	5,3	10,9	14,72188
1,3	5,4	11	15,27761
1,4	5,4	11,1	15,27761
1,5	5,4	11,2	15,27761
1,6	5,4	11,3	15,27761

4) Λεία επιφάνεια, συγκλίνον ακροφύσιο, μεσαία παροχή

L=25,5 cm			
$\gamma$ (mm)	P(mb)	κλίμακα βερνιέρου	v (m/s)
0,2	7,2	9,85	24,35476
0,3	7,4	9,95	25,02214
0,4	7,5	10,05	25,34924
0,5	7,5	10,15	25,34924
0,6	7,6	10,25	25,67217
0,7	7,7	10,35	25,99109
0,8	7,8	10,45	26,30615
0,9	7,9	10,55	26,61747
1	8	10,65	26,9252
1,1	8	10,75	26,9252
1,2	8,1	10,85	27,22945
1,3	8,1	10,95	27,22945
1,4	8,2	11,05	27,53034
1,6	8,3	11,25	27,82797
1,8	8,4	11,45	28,12245
2	8,4	11,65	28,12245
2,2	8,4	11,85	28,12245
2,4	8,4	12,05	28,12245

L=23cm			
$\gamma$ (mm)	P(mb)	κλίμακα βερνιέρου	v (m/s)
0,2	6,8	9,95	22,96189
0,3	6,9	10,05	23,31791
0,4	7,1	10,15	24,01412
0,5	7,4	10,25	25,02214
0,6	7,5	10,35	25,34924
0,7	7,6	10,45	25,67217
0,8	7,7	10,55	25,99109
0,9	7,8	10,65	26,30615
1	7,9	10,75	26,61747
1,1	8	10,85	26,9252
1,2	8	10,95	26,9252
1,3	8,1	11,05	27,22945
1,4	8,2	11,15	27,53034
1,5	8,2	11,25	27,53034
1,6	8,2	11,35	27,53034
1,7	8,3	11,45	27,82797
1,8	8,3	11,55	27,82797
1,9	8,4	11,65	28,12245
2	8,4	11,75	28,12245
2,1	8,4	11,85	28,12245
2,2	8,5	11,95	28,41389
2,3	8,6	12,05	28,70236
2,4	8,7	12,15	28,98796
2,5	8,7	12,25	28,98796
2,6	8,7	12,35	28,98796

L=20,5			
$\gamma$ (mm)	P(mb)	κλίμακα βερνιέρου	v (m/s)
0,2	6,6	9,85	22,23275
0,3	6,7	9,95	22,60026
0,4	7	10,05	23,66857
0,5	7,3	10,15	24,6907
0,6	7,5	10,25	25,34924
0,7	7,8	10,35	26,30615
0,8	7,8	10,45	26,30615
0,9	7,8	10,55	26,30615
1	7,8	10,65	26,30615
1,1	7,9	10,75	26,61747
1,2	7,9	10,85	26,61747
1,3	8	10,95	26,9252
1,4	8	11,05	26,9252
1,5	8,2	11,15	27,53034
1,6	8,2	11,25	27,53034
1,7	8,2	11,35	27,53034
1,8	8,3	11,45	27,82797
1,9	8,4	11,55	28,12245
2	8,4	11,65	28,12245
2,1	8,4	11,75	28,12245
2,2	8,4	11,85	28,12245
2,3	8,5	11,95	28,41389
2,4	8,5	12,05	28,41389
2,5	8,5	12,15	28,41389
2,6	8,5	12,25	28,41389
2,7	8,6	12,35	28,70236
2,8	8,6	12,45	28,70236

L=18			
$\gamma$ (mm)	P(mb)	κλίμακα βερνιέρου	v (m/s)
0,2	7,1	9,9	24,01412
0,3	7,2	10	24,35476
0,4	7,3	10,1	24,6907
0,5	7,5	10,2	25,34924
0,6	7,6	10,3	25,67217
0,7	7,7	10,4	25,99109
0,8	7,8	10,5	26,30615
0,9	8	10,6	26,9252
1	8,1	10,7	27,22945
1,1	8,2	10,8	27,53034
1,2	8,2	10,9	27,53034
1,3	8,3	11	27,82797
1,4	8,3	11,1	27,82797
1,5	8,4	11,2	28,12245
1,6	8,4	11,3	28,12245
1,7	8,4	11,4	28,12245

L=16,2			
$\gamma$ (mm)	P(mb)	κλίμακα βερνιέρου	v (m/s)
0,2	7,1	9,8	24,01412
0,3	7,2	9,9	24,35476
0,4	7,5	10	25,34924
0,5	7,7	10,1	25,99109
0,6	7,8	10,2	26,30615
0,7	7,9	10,3	26,61747
0,8	8	10,4	26,9252
0,9	8,1	10,5	27,22945
1	8,2	10,6	27,53034
1,1	8,2	10,7	27,53034
1,2	8,3	10,8	27,82797
1,3	8,4	10,9	28,12245
1,4	8,4	11	28,12245
1,5	8,4	11,1	28,12245
1,7	8,4	11,3	28,12245

L=13,7			
$\gamma$ (mm)	P(mb)	κλίμακα βερνιέρου	v (m/s)
0,2	7,6	9,95	25,67217
0,3	8	10,05	26,9252
0,4	8,1	10,15	27,22945
0,5	8,2	10,25	27,53034
0,6	8,2	10,35	27,53034
0,7	8,3	10,45	27,82797
0,8	8,3	10,55	27,82797
0,9	8,3	10,65	27,82797
1	8,4	10,75	28,12245
1,1	8,4	10,85	28,12245
1,2	8,4	10,95	28,12245

L=11,3			
$\gamma$ (mm)	P(mb)	κλίμακα βερνιέρου	v (m/s)
0,2	7,6	9,9	25,67217
0,3	7,6	10	25,67217
0,4	7,7	10,1	25,99109
0,5	8,1	10,2	27,22945
0,6	8,2	10,3	27,53034
0,7	8,3	10,4	27,82797
0,8	8,3	10,5	27,82797
0,9	8,3	10,6	27,82797
1	8,4	10,7	28,12245
1,1	8,4	10,8	28,12245
1,2	8,4	10,9	28,12245
1,3	8,4	11	28,12245

5) Λεία επιφάνεια, χωρίς εμπόδια, μικρή παροχή

L=25,5 cm			
$\gamma$ (mm)	P(mb)	κλίμακα βερνιέρου	v (m/s)
0,2	2,7	10,85	13,57195
0,3	2,7	10,95	13,57195
0,4	2,7	11,05	13,57195
0,5	2,7	11,15	13,57195
0,6	2,8	11,25	14,17544
0,7	2,8	11,35	14,17544
0,8	2,8	11,45	14,17544
0,9	2,9	11,55	14,75427
1	2,9	11,65	14,75427
1,1	2,9	11,75	14,75427
1,2	2,9	11,85	14,75427
1,3	2,9	11,95	14,75427
1,4	2,9	12,05	14,75427
1,5	3	12,15	15,31123
1,6	3	12,25	15,31123
1,7	3	12,35	15,31123
1,8	3,1	12,45	15,84863
1,9	3,1	12,55	15,84863
2	3,2	12,65	16,36839
2,1	3,2	12,75	16,36839
2,2	3,2	12,85	16,36839
2,3	3,2	12,95	16,36839
2,4	3,2	13,05	16,36839
2,5	3,2	13,15	16,36839
2,6	3,2	13,25	16,36839
2,7	3,3	13,35	16,87215
2,8	3,3	13,45	16,87215
2,9	3,3	13,55	16,87215
3	3,3	13,65	16,87215
3,1	3,3	13,75	16,87215
3,2	3,3	13,85	16,87215



L=23cm			
$\gamma$ (mm)	P(mb)	κλίμακα βερνιέρου	v (m/s)
0,2	2,6	9,95	12,94035
0,3	2,7	10,05	13,57195
0,4	2,8	10,15	14,17544
0,5	2,8	10,25	14,17544
0,6	2,9	10,35	14,75427
0,7	2,9	10,45	14,75427
0,8	3	10,55	15,31123
0,9	3	10,65	15,31123
1	3	10,75	15,31123
1,1	3,1	10,85	15,84863
1,2	3,1	10,95	15,84863
1,3	3,1	11,05	15,84863
1,4	3,1	11,15	15,84863
1,5	3,1	11,25	15,84863
1,6	3,2	11,35	16,36839
1,7	3,2	11,45	16,36839
1,8	3,2	11,55	16,36839
1,9	3,4	11,65	17,3613
2	3,4	11,75	17,3613
2,1	3,4	11,85	17,3613
2,2	3,5	11,95	17,83704
2,3	3,5	12,05	17,83704
2,4	3,5	12,15	17,83704
2,5	3,5	12,25	17,83704
2,6	3,6	12,35	18,30042
2,7	3,6	12,45	18,30042
2,8	3,6	12,55	18,30042

L=20,5			
$\gamma$ (mm)	P(mb)	κλίμακα βερνιέρου	v (m/s)
0,2	2,7	9,85	13,57195
0,3	2,8	9,95	14,17544
0,4	2,8	10,05	14,17544
0,5	2,9	10,15	14,75427
0,6	2,9	10,25	14,75427
0,7	3	10,35	15,31123
0,8	3	10,45	15,31123
0,9	3	10,55	15,31123
1	3,1	10,65	15,84863
1,1	3,1	10,75	15,84863
1,2	3,1	10,85	15,84863
1,3	3,1	10,95	15,84863
1,4	3,1	11,05	15,84863
1,5	3,2	11,15	16,36839
1,6	3,2	11,25	16,36839
1,7	3,2	11,35	16,36839
1,8	3,2	11,45	16,36839
1,9	3,4	11,55	17,3613
2	3,4	11,65	17,3613
2,1	3,4	11,75	17,3613
2,2	3,4	11,85	17,3613
2,3	3,4	11,95	17,3613
2,4	3,4	12,05	17,3613
2,5	3,4	12,15	17,3613
2,6	3,4	12,25	17,3613
2,7	3,4	12,35	17,3613
2,8	3,4	12,45	17,3613
2,9	3,5	12,55	17,83704
3	3,5	12,65	17,83704
3,1	3,5	12,75	17,83704
3,2	3,5	12,85	17,83704
3,3	3,5	12,95	17,83704

L=18			
$\gamma$ (mm)	P(mb)	κλίμακα βερνιέρου	v (m/s)
0,2	2,8	9,9	14,17544
0,3	2,8	10	14,17544
0,4	2,9	10,1	14,75427
0,5	3	10,2	15,31123
0,6	3	10,3	15,31123
0,7	3,1	10,4	15,84863
0,8	3,1	10,5	15,84863
0,9	3,1	10,6	15,84863
1	3,2	10,7	16,36839
1,1	3,3	10,8	16,87215
1,2	3,3	10,9	16,87215
1,3	3,3	11	16,87215
1,4	3,3	11,1	16,87215
1,5	3,3	11,2	16,87215
1,6	3,4	11,3	17,3613
1,7	3,4	11,4	17,3613
1,8	3,4	11,5	17,3613
1,9	3,4	11,6	17,3613
2	3,5	11,7	17,83704
2,1	3,6	11,8	18,30042
2,2	3,6	11,9	18,30042
2,3	3,6	12	18,30042

L=16,2			
$\gamma$ (mm)	P(mb)	κλίμακα βερνιέρου	v (m/s)
0,2	2,6	9,9	12,94035
0,3	2,8	10	14,17544
0,4	3	10,1	15,31123
0,5	3,1	10,2	15,84863
0,6	3,1	10,3	15,84863
0,7	3,2	10,4	16,36839
0,8	3,2	10,5	16,36839
0,9	3,2	10,6	16,36839
1	3,2	10,7	16,36839
1,1	3,2	10,8	16,36839
1,2	3,3	10,9	16,87215
1,3	3,3	11	16,87215
1,4	3,3	11,1	16,87215
1,5	3,3	11,2	16,87215
1,6	3,4	11,3	17,3613
1,7	3,4	11,4	17,3613
1,8	3,4	11,5	17,3613
1,9	3,4	11,6	17,3613
2	3,4	11,7	17,3613
2,1	3,5	11,8	17,83704
2,2	3,5	11,9	17,83704
2,3	3,5	12	17,83704

L=13,7			
$\gamma$ (mm)	P(mb)	κλίμακα βερνιέρου	v (m/s)
0,2	3	9,95	15,31123
0,3	3,1	10,05	15,84863
0,4	3,2	10,15	16,36839
0,5	3,2	10,25	16,36839
0,6	3,3	10,35	16,87215
0,7	3,3	10,45	16,87215
0,8	3,3	10,55	16,87215
0,9	3,3	10,65	16,87215
1	3,3	10,75	16,87215
1,1	3,3	10,85	16,87215
1,2	3,4	10,95	17,3613
1,3	3,4	11,05	17,3613
1,4	3,4	11,15	17,3613
1,5	3,4	11,25	17,3613
1,6	3,4	11,35	17,3613
1,7	3,4	11,45	17,3613
1,8	3,4	11,55	17,3613
1,9	3,4	11,65	17,3613
2	3,5	11,75	17,83704
2,1	3,5	11,85	17,83704
2,2	3,5	11,95	17,83704

L=11,3			
$\gamma$ (mm)	P(mb)	κλίμακα βερνιέρου	v (m/s)
0,2	2,9	9,95	14,75427
0,3	2,9	10,05	14,75427
0,4	2,9	10,15	14,75427
0,5	3	10,25	15,31123
0,6	3	10,35	15,31123
0,7	3,1	10,45	15,84863
0,8	3,2	10,55	16,36839
0,9	3,3	10,65	16,87215
1	3,3	10,75	16,87215
1,1	3,4	10,85	17,3613
1,2	3,4	10,95	17,3613
1,3	3,4	11,05	17,3613
1,4	3,4	11,15	17,3613
1,5	3,4	11,25	17,3613
1,6	3,4	11,35	17,3613
1,7	3,4	11,45	17,3613
1,8	3,4	11,55	17,3613
1,9	3,4	11,65	17,3613
2	3,5	11,75	17,83704
2,1	3,5	11,85	17,83704
2,2	3,5	11,95	17,83704
2,3	3,5	12,05	17,83704

6) Λεία επιφάνεια, χωρίς εμπόδια, μεσαία παροχή

L=25,5 cm			
$\gamma$ (mm)	P(mb)	κλίμακα βερνιέρου	v (m/s)
0,2	4,4	9,85	19,09938
0,3	4,4	9,95	19,09938
0,4	4,5	10,05	19,52864
0,5	4,6	10,15	19,94866
0,6	4,6	10,25	19,94866
0,7	4,7	10,35	20,36001
0,8	4,7	10,45	20,36001
0,9	4,7	10,55	20,36001
1	4,8	10,65	20,76322
1,1	4,8	10,75	20,76322
1,2	4,8	10,85	20,76322
1,4	5	11,05	21,54701
1,6	5	11,25	21,54701
1,8	5,1	11,45	21,9284
2	5,2	11,65	22,30327
2,2	5,2	11,85	22,30327
2,4	5,3	12,05	22,67195
2,6	5,4	12,25	23,03472
2,8	5,4	12,45	23,03472
3	5,5	12,65	23,39187
3,2	5,5	12,85	23,39187
3,4	5,6	13,05	23,74365
3,6	5,6	13,25	23,74365
3,8	5,6	13,45	23,74365
4	5,7	13,65	24,09029
4,2	5,8	13,85	24,43201
4,4	5,8	14,05	24,43201
4,6	5,8	14,25	24,43201
4,8	5,8	14,45	24,43201

L=23cm			
$\gamma$ (mm)	P(mb)	κλίμακα βερνιέρου	v (m/s)
0,2	4	9,95	17,27604
0,3	4,1	10,05	17,74945
0,4	4,2	10,15	18,21055
0,5	4,4	10,25	19,09938
0,6	4,6	10,35	19,94866
0,7	4,6	10,45	19,94866
0,8	4,7	10,55	20,36001
0,9	4,8	10,65	20,76322
1	4,8	10,75	20,76322
1,1	4,8	10,85	20,76322
1,2	4,8	10,95	20,76322
1,4	5	11,15	21,54701
1,6	5,1	11,35	21,9284
1,8	5,1	11,55	21,9284
2	5,2	11,75	22,30327
2,2	5,2	11,95	22,30327
2,4	5,3	12,15	22,67195
2,6	5,4	12,35	23,03472
2,8	5,5	12,55	23,39187
3	5,5	12,75	23,39187
3,2	5,6	12,95	23,74365
3,4	5,6	13,15	23,74365
3,6	5,6	13,35	23,74365
3,8	5,7	13,55	24,09029
4	5,8	13,75	24,43201
4,1	5,8	13,85	24,43201
4,2	5,8	13,95	24,43201
4,3	5,8	14,05	24,43201



L=20,5			
$\gamma$ (mm)	P(mb)	κλίμακα βερνιέρου	v (m/s)
0,2	4,2	9,85	18,2105475
0,3	4,3	9,95	18,6602583
0,4	4,3	10,05	18,6602583
0,5	4,6	10,15	19,9486553
0,6	4,7	10,25	20,360011
0,7	4,7	10,35	20,360011
0,8	4,8	10,45	20,7632187
0,9	4,8	10,55	20,7632187
1,1	4,9	10,75	21,1587441
1,3	5	10,95	21,5470104
1,5	5,1	11,15	21,928403
1,7	5,2	11,35	22,3032746
1,9	5,3	11,55	22,6719488
2,1	5,4	11,75	23,034723
2,3	5,4	11,95	23,034723
2,5	5,5	12,15	23,3918718
2,7	5,5	12,35	23,3918718
2,9	5,6	12,55	23,743649
3,1	5,6	12,75	23,743649
3,3	5,7	12,95	24,0902899
3,5	5,7	13,15	24,0902899
3,7	5,8	13,35	24,4320132
3,9	5,8	13,55	24,4320132

L=18			
$\gamma$ (mm)	P(mb)	κλίμακα βερνιέρου	v (m/s)
0,2	4,4	9,9	19,09938
0,3	4,6	10	19,94866
0,4	4,6	10,1	19,94866
0,5	4,7	10,2	20,36001
0,6	4,8	10,3	20,76322
0,7	4,9	10,4	21,15874
0,8	5	10,5	21,54701
0,9	5	10,6	21,54701
1	5,1	10,7	21,9284
1,1	5,1	10,8	21,9284
1,2	5,1	10,9	21,9284
1,3	5,2	11	22,30327
1,4	5,2	11,1	22,30327
1,5	5,3	11,2	22,67195
1,6	5,3	11,3	22,67195
1,7	5,4	11,4	23,03472
1,8	5,4	11,5	23,03472
1,9	5,5	11,6	23,39187
2	5,5	11,7	23,39187
2,1	5,5	11,8	23,39187
2,3	5,6	12	23,74365
2,5	5,6	12,2	23,74365
2,7	5,6	12,4	23,74365
2,9	5,7	12,6	24,09029
3,1	5,7	12,8	24,09029
3,3	5,8	13	24,43201
3,5	5,8	13,2	24,43201
3,7	5,8	13,4	24,43201

L=16,2			
$\gamma$ (mm)	P(mb)	κλίμακα βερνιέρου	v (m/s)
0,2	4,1	9,8	17,74945
0,3	4,2	9,9	18,21055
0,4	4,5	10	19,52864
0,5	4,6	10,1	19,94866
0,6	4,8	10,2	20,76322
0,7	4,9	10,3	21,15874
0,8	4,9	10,4	21,15874
0,9	5	10,5	21,54701
1	5,1	10,6	21,9284
1,1	5,1	10,7	21,9284
1,2	5,2	10,8	22,30327
1,3	5,2	10,9	22,30327
1,4	5,3	11	22,67195
1,5	5,4	11,1	23,03472
1,6	5,4	11,2	23,03472
1,8	5,4	11,4	23,03472
2	5,5	11,6	23,39187
2,2	5,6	11,8	23,74365
2,4	5,6	12	23,74365
2,6	5,7	12,2	24,09029
2,8	5,7	12,4	24,09029
3	5,7	12,6	24,09029
3,2	5,8	12,8	24,43201
3,4	5,8	13	24,43201
3,6	5,8	13,2	24,43201
3,8	5,8	13,4	24,43201

L=13,7			
$\gamma$ (mm)	P(mb)	κλίμακα βερνιέρου	v (m/s)
0,2	4,7	9,95	20,36001
0,3	5	10,05	21,54701
0,4	5	10,15	21,54701
0,5	5,1	10,25	21,9284
0,6	5,2	10,35	22,30327
0,7	5,2	10,45	22,30327
0,8	5,2	10,55	22,30327
0,9	5,3	10,65	22,67195
1	5,4	10,75	23,03472
1,2	5,4	10,95	23,03472
1,4	5,4	11,15	23,03472
1,6	5,4	11,35	23,03472
1,8	5,5	11,55	23,39187
2	5,6	11,75	23,74365
2,2	5,7	11,95	24,09029
2,4	5,7	12,15	24,09029
2,6	5,7	12,35	24,09029
2,8	5,8	12,55	24,43201
3	5,8	12,75	24,43201
3,1	5,8	12,85	24,43201
3,2	5,8	12,95	24,43201
3,3	5,8	13,05	24,43201

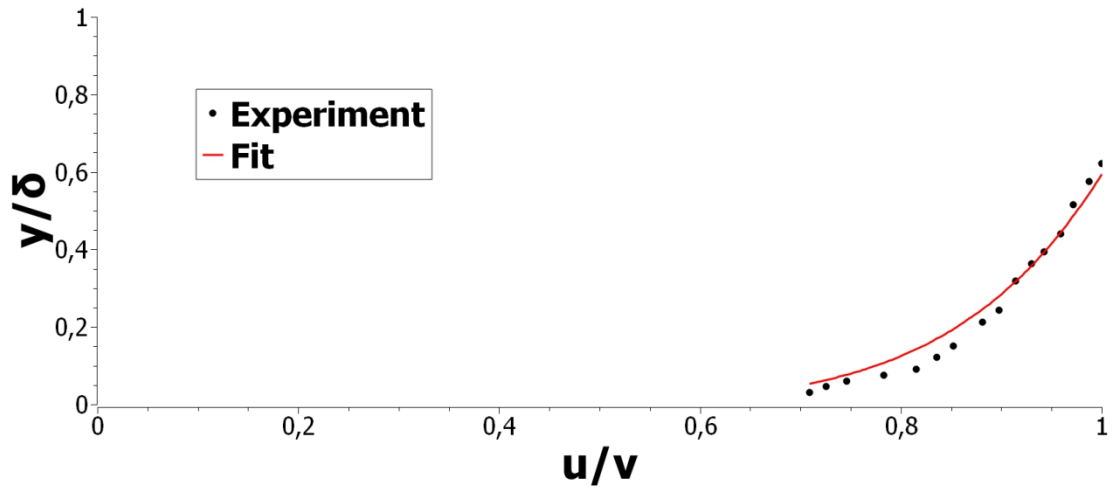
L=11,3			
γ(mm)	P(mb)	κλίμακα βερνιέρου	v (m/s)
0,2	4,6	9,9	19,94866
0,3	4,6	10	19,94866
0,4	4,7	10,1	20,36001
0,5	5	10,2	21,54701
0,6	5,1	10,3	21,9284
0,7	5,2	10,4	22,30327
0,8	5,2	10,5	22,30327
0,9	5,2	10,6	22,30327
1	5,3	10,7	22,67195
1,2	5,4	10,9	23,03472
1,4	5,5	11,1	23,39187
1,6	5,6	11,3	23,74365
1,8	5,6	11,5	23,74365
2	5,6	11,7	23,74365
2,2	5,6	11,9	23,74365
2,4	5,7	12,1	24,09029
2,6	5,7	12,3	24,09029
2,8	5,8	12,5	24,43201
3	5,8	12,7	24,43201
3,2	5,8	12,9	24,43201

### 6.3 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ

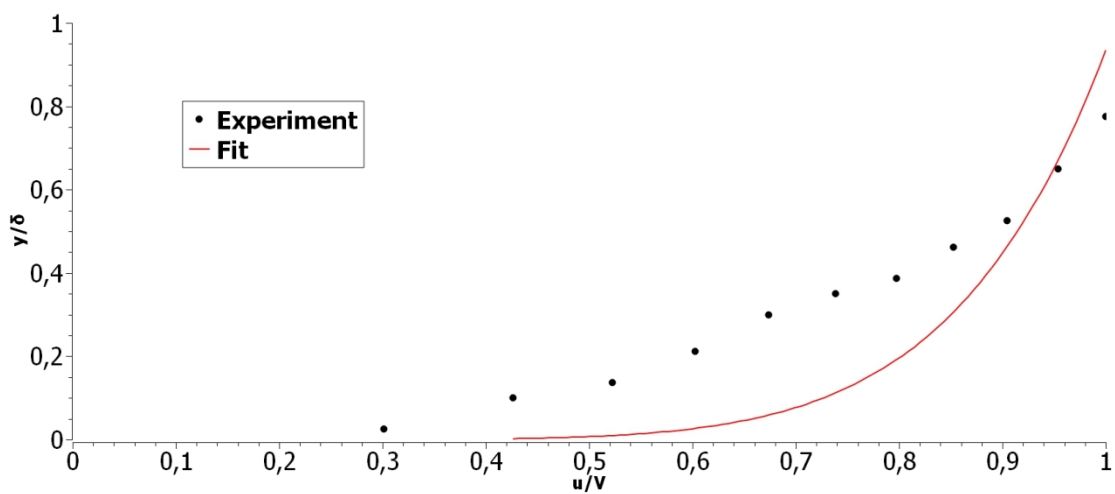
Στη συνέχεια παρουσιάζονται ενδεικτικά διαγράμματα της αδιάστατης ταχύτητας συναρτήσει της αδιάστατης απόστασης από την πλάκα. Γενικά η συμφωνία των πειραματικών αποτελεσμάτων με τα θεωρητικά αναμενόμενα είναι ικανοποιητική. Οι διαφορές οφείλονται κυρίως σε τυχαία πειραματικά σφάλματα.

Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνονται τα πειραματικά αποτελέσματα για λεία πλάκα, αποκλίνον και μικρή παροχή για  $x=25.5\text{cm}$ . Η προσαρμογή έγινε με μία καμπύλη της μορφής:

$$\frac{u}{V} = a \left( \frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \text{ με } a=1.072. \text{ Υπολογίστηκαν: } Re=228000 \text{ και } \delta=8 \text{ mm.}$$



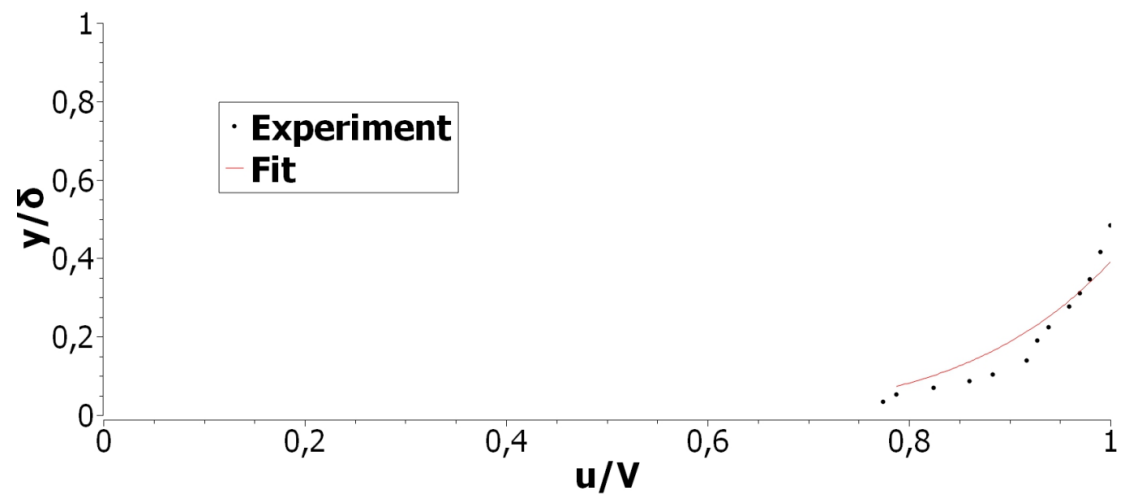
Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνονται τα πειραματικά αποτελέσματα για λεία πλάκα, χωρίς εμπόδια και μεσαία παροχή για  $x=23\text{cm}$ . Η προσαρμογή έγινε με μία καμπύλη της μορφής:  $\frac{u}{V} = a\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}$  με  $a=1.684$ . Υπολογίστηκαν:  $Re=370496$  και  $\delta=6.6\text{ mm}$ .



Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνονται τα πειραματικά αποτελέσματα για λεία πλάκα, συγκλίνον και μεσαία παροχή για  $x=20.5\text{cm}$ . Η προσαρμογή

έγινε με μία καμπύλη της μορφής:  $\frac{u}{V} = a\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}$  με  $a=2.564$ .

Υπολογίστηκαν:  $Re=387923$  και  $\delta=5.78\text{ mm}$ .



## 7. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Αντικείμενο της παρούσας εργασίας είναι το οριακό στρώμα που δημιουργείται κατά τη ροή νερού πάνω σε επίπεδη πλάκα. Παρουσιάστηκε η θεωρία του οριακού στρώματος και οι εξισώσεις υπολογισμού του πάχους του οριακού στρώματος και της διατμητικής τάσης.

Πραγματοποιήθηκε μία σειρά μετρήσεων της ταχύτητας της ροής σε διάφορες αποστάσεις από το σημείο προσβολής της πλάκας από τη ροή του νερού. Η ταχύτητα σε κάθε θέση μετρήθηκε για διάφορες αποστάσεις από την πλάκα. Επιβεβαιώθηκαν ποιοτικά τα βασικά χαρακτηριστικά της θεωρίας του οριακού στρώματος. Παρουσιάζονται επίσης ενδεικτικά διαγράμματα της αδιάστατης ταχύτητας συναρτήσει του αδιάστατου μήκους. Τα αποτελέσματα βρίσκονται σε ικανοποιητική συμφωνία με τα θεωρητικά αναμενόμενα.



## **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

- 1] Ξένος Μ. και Τζιρτζιλάκης Ε., Μηχανική Ρευστών με Εφαρμογές, εκδόσεις Gotsis 2018.
- 2] Schlichting H and Gersten K., Boundary Layer Theory, 8<sup>th</sup> Edition, Springer, Berlin 2000.
- 3] <http://www.thermopedia.com/content/595/>
- 4] Ματαράς Δ., Φυσικές Διεργασίες ΙΙ, Τμήμα Χημικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πατρών.
- 5] Νανούσης Ν.Δ., Ρευστομηχανική Β' τόμος, εκδόσεις Στέλλα Παρίκου & ΣΙΑ 2009.
- 6] Cebesi T. and Smith A.M.O., Analysis of Turbulent Boundary Layers, Academic Press, New York 1974.
- 7] Markland E., A First Course in Air Flow, Tecquipment Limited, Nottingham, England 1976.
- 8] Pletcher R.H., Tannehill J. and Anderson D.A., Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, 3<sup>rd</sup> Edition, CRC Press 2013.
- 9] TecQuipment Teaching Manuals, Tecquipment Limited, Nottingham, England 1976.